

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СЕТЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ЦИКЛЫ

А. А. Волков, Э. А. Дедиков

Харьков

При исследовании систем автоматического управления, содержащих сложные гидравлические или пневматические сети, возникает задача определения динамических характеристик этих сетей и исследования их динамических свойств.

Для сложных сетей или систем решение этой задачи связано с получением математического описания их неустановившихся процессов и решением полученных зависимостей при помощи электронных вычислительных устройств.

Математическое описание ступенчато-неоднородных гидравлических цепей или сложных сетей структурно определяется математическим описанием их отдельных однородных участков и топологией всей сети. Неустановившиеся процессы в отдельных однородных участках сети могут быть описаны дифференциальными уравнениями в частных производных. Математическое описание гидравлических сетей в неустановившемся режиме наряду с дифференциальными уравнениями однородных участков будет включать в себя и уравнения их связи, определяемые топологией сети, что в совокупности представит сложную систему уравнений, аналитическое решение которой может быть весьма затруднительно. Представляется возможным использовать аппарат теории многополюсников и некоторые сведения из теории графов для математического описания гидравлических сетей с целью определения на электронных вычислительных машинах динамических характеристик этих сетей в любых сечениях их однородных участков. Эта задача тесным образом связана с нахождением установившихся колебаний давлений и расходов в некоторых точках сети.

Известные работы в области исследования подобных систем с применением теории пассивных четырехполюсников, например [1], предусматривают знание нагрузочных импеданцев и предназначены для разветвленных цепей, имеющих вид корневых деревьев. Для сетей, которые имеют наряду с висячими ветвями циклы, метод, описанный в [1], не пригоден.

Цель данной работы заключается в изложении метода определения колебаний давления и расхода жидкости или газа в произвольных сечениях однородных участков сети при помощи ЭВМ.

1. Для описания неустановившегося движения воздуха по изолированной ветви шахтной вентиляционной сети воспользуемся уравнением одномерного неустановившегося движения сжимаемой жидкости, движущейся с дозвуковой скоростью [2]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial (pv)}{\partial t} + \frac{\lambda}{8g} v^2, \\ -\frac{\partial h}{\partial t} &= C_0^2 \frac{\partial (pv)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь h , ρ , v — средние давления, плотность и скорость потока,
 C_0 — скорость распределения звука в шахтной атмосфере,
 λ — коэффициент сопротивления,
 δ — гидравлический радиус сечения.

Практически плотность шахтной атмосферы при дозвуковых скоростях течения меняется незначительно в силу этого можно принять $\rho = \text{const}$. Умножим и разделим каждый член уравнения, содержащий v на S , а v^2 на S^2 , где S площадь сечения выработки. Обозначим $Sv = q$ расход воздуха через сечение x в единицу времени,

$\frac{\lambda \rho}{8\delta} = R_a$ — удельная аэродинамическое сопротивление ветви;

$\frac{\rho}{S} = L_a$ — удельная акустическая масса, коэффициент, связывающий изменение расхода и потерю давления на участке ветви равной единице при нестационарном движении;

$\frac{S}{\rho C_0^2} = C_a$ — удельная акустическая гибкость, коэффициент связывает изменение давления на единичном участке ветви с избыточным притоком воздуха на этот участок.

С учетом этих обозначений система (1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial x} &= L_a \frac{\partial q}{\partial t} + R_a q^2 \\ -\frac{\partial q}{\partial x} &= C_a \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (2) содержит нелинейный член $R_a q^2$. С целью упрощения задачи производится линеаризация уравнений посредством разложения нелинейной функции в ряд Тейлора по степеням малых приращений, взятых в окрестности установившегося режима, принимаемого за начало отсчета. После соответствующих преобразований и пренебрежения членами более высоких порядков малости система (2) приобретает вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial x} &= L_a \frac{\partial \Delta q}{\partial t} + 2R_a q_0 \Delta q \\ -\frac{\partial \Delta q}{\partial x} &= C_a \frac{\partial \Delta h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь Δq , Δh — избыточные значения расхода и давления в сечении x ветви над стационарными, существовавшими при $t < 0$.

Тогда, в силу линейности системы (3) граничные и начальные условия могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} x=0 \quad \Delta h(0, t) &= f_1(t) \quad t=0 \quad \Delta h(x, 0) = 0 \\ x=l \quad \Delta q(l, t) &= f_2(t) \quad \Delta q(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $\Delta h(x, t)$ и $\Delta q(x, t)$ функции, удовлетворяющие условиям Дирихле. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \Delta h(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \\ \Delta q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $H(x, \omega)$, $Q(x, \omega)$ — частотные спектры, функции $\Delta h(x, t)$ и $\Delta q(x, t)$, определяемые из выражений

$$\begin{aligned} H(x, \omega) &= \int_0^{\infty} \Delta h(x, t) e^{-j\omega t} dt \\ Q(x, \omega) &= \int_0^{\infty} \Delta q(x, t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Функции $\Delta h(x, t)$ и $\Delta q(x, t)$ можно рассматривать как бесконечные суммы функции вида $H(x, \omega)e^{j\omega t}$ и $Q(x, \omega)e^{j\omega t}$. Будем искать решение системы (3) для каждого составляющего этих сумм. В этом случае система (3) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} -\frac{dH(x, \omega)}{dx} &= j\omega L_a Q(x, \omega) + 2R_a q_a Q(x, \omega) \\ -\frac{dQ(x, \omega)}{dx} &= j\omega C_a H(x, \omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned} Q(x, \omega) &= A_1(\omega) e^{\nu(\omega)x} + A_2(\omega) e^{-\nu(\omega)x} \\ H(x, \omega) &= -\rho(\omega) A_1 e^{\nu(\omega)x} + \rho(\omega) A_2 e^{-\nu(\omega)x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nu(\omega) &= \sqrt{(j\omega L_a + 2R_a q_a) j\omega C_a} \\ \rho(\omega) &= \sqrt{\frac{j\omega L_a + 2R_a q_a}{j\omega C_a}}. \end{aligned}$$

$A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ — определяются по заданным граничным условиям. В частности при заданных граничных условиях вида:

$$\begin{aligned} x=0 \quad Q(0, \omega) &= Q_1 e^{j\omega t} \\ x=l \quad Q(l, \omega) &= Q_2 e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Решение (7) имеет вид

$$\begin{aligned} H(0, \omega) &= \rho(\omega) \operatorname{cth} \nu(\omega) l Q(0, \omega) - \frac{\rho(\omega)}{\operatorname{sh} \nu(\omega) l} Q(l, \omega), \\ H(l, \omega) &= \frac{\rho(\omega)}{\operatorname{sh} \nu(\omega) l} Q(0, \omega) - \rho(\omega) \operatorname{cth} \nu(\omega) l Q(l, \omega). \end{aligned} \quad (9)$$

или в матричном виде

$$\vec{H}(\omega) = Z(\omega) \vec{Q}(\omega). \quad (10)$$

Здесь $Z(\omega)$ — квадратная матрица, составленная из коэффициентов системы (9), известная под названием матрицы полных сопротивлений четырехполюсника.

2. Рассматривается задача нахождения установившихся колебаний расходов в наперед заданных сечениях ветвей, расположенных в сети, имеющей замкнутые циклы.

Задаана вентиляционная сеть G произвольной конфигурации. Связь между комплексными амплитудами потоков (расходов) и давлений на концах ветви дается уравнениями (9).

Система G содержит сосредоточенные источники давлений и местные сопротивления, падение на которых $H = R_m Q$ (линеаризованный случай). Для узлов сети справедливы законы Кирхгофа.

Ставится задача: в заданных n — точках сети определить значения потоков $Q_1^{(-)}$, $Q_2^{(-)}$, ..., $Q_n^{(-)}$. Удобно рассматривать электрическую ана-

логию этой задачи. Пусть $G = (X, \Gamma)$ конечный мультиграф, где X — множество вершин, Γ — множество ребер [3]. Множество Γ состоит из трех типов ребер.

1. Ребро y_k ($k = 1, 2, \dots, n$), соответствует последовательно включенному источнику напряжения $H_k^{(-)}$ (рис. 1) с уравнениями

$$Q_k^{(-)} = Q_k, \quad Q_k^{(-)} = Q'_k H'_k = H_k + H_k^{(-)}. \quad (11)$$

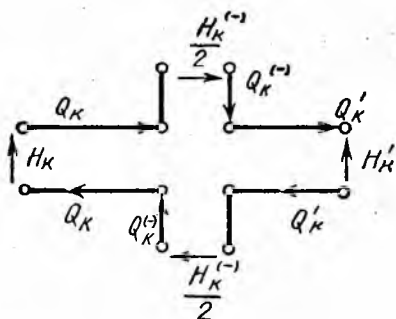


Рис. 1.

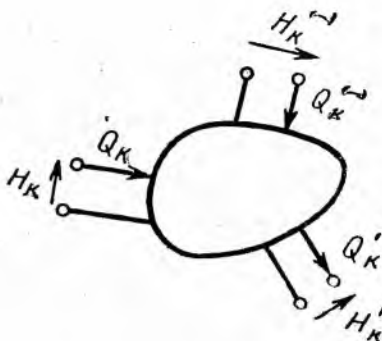


Рис. 2.

Логически систему рис. 1 можно заменить шестиполусником рис. 2 с уравнениями (10).

2. Ребро y_k ($k = n + 1, n + 2, \dots, n + r$) соответствует четырехполуснику рис. 3 с уравнениями

$$Q_k = Q'_k, \quad H'_k = H_k - Q'_k R_k, \quad (12)$$

где R_k — сосредоточенное пассивное сопротивление.

3. Ребро y_k ($k = n + r + 1, n + r + 2, \dots, n + r + m$) соответствует длинной линии с уравнениями

$$\begin{aligned} H_k &= \alpha_k Q_k - \beta_k Q'_k \\ H'_k &= \beta_k Q_k - \alpha_k Q'_k. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь α_k, β_k — элементы матрицы $Z(\omega)$ в (10).

В соответствии с реальной газодинамической задачей* предполагается, что на висячих вершинах мультиграфа G выполняется условие

$$H_k = 0, \quad (H'_k = 0). \quad (14)$$

Для каждой невисячей вершины X_s ($X_s \in X$) должны выполняться два типа соотношений, связывающие граничные значения токов (потоков) и напряжений (давлений) для ребер y_k , соединенных в вершине X_s (рис. 4).

$$\sum_{k=1}^n Q_k = 0, \quad H_1 = H_2 = \dots = H_n. \quad (15)$$

Например, рассматривается сеть, приведенная на рис. (5, а). Необходимо определить значения потоков в точках А, В, С, D и Е. Эта сеть моделируется мультиграфом G , с вершинами X_s , ребрами y_k с выбранными на них направлениями, причем ребра $y_1, \dots, y_5$ — типа 1, осталь-

* Висячими вершинами сеть сообщается с атмосферой так, что избыточное давление здесь было равно нулю.

ные y_k ребра типа 3 (рис. 5, б). Ребра y_2, y_3, y_4, y_5 введены формально в G для того, чтобы определить токи (потоки) $Q_2^{(-)}, Q_3^{(-)}$ и $Q_4^{(-)}, Q_5^{(-)}$, приложенные напряжения (давления) $H_2^{(-)}, H_3^{(-)}, H_4^{(-)}, H_5^{(-)}$ в соответствии с рис. 5, а можно считать равными нулю. В силу условия (14) на

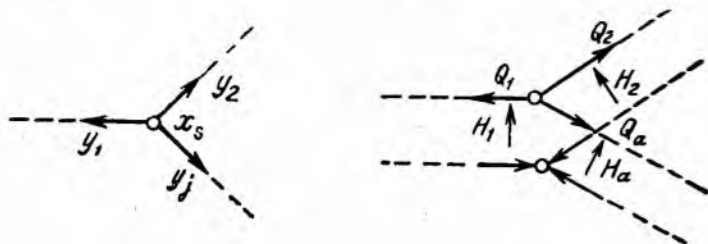


Рис. 4.

висячей вершине X_1 ко входу длинной линии y_6 (в точке A) подключен активный двухполюсник, обеспечивающий напряжение (давление) $H_1^{(-)} = H_1 e^{i\omega t}$.

Задача определения потоков в точках A, B, C, D, E равносильна задаче нахождения внешних токов $Q_1^{(-)}, \dots, Q_5^{(-)}$ пассивного $2n$ -полюсника ($n=5$), составленного из ребер $y_6, \dots, y_{15}$.

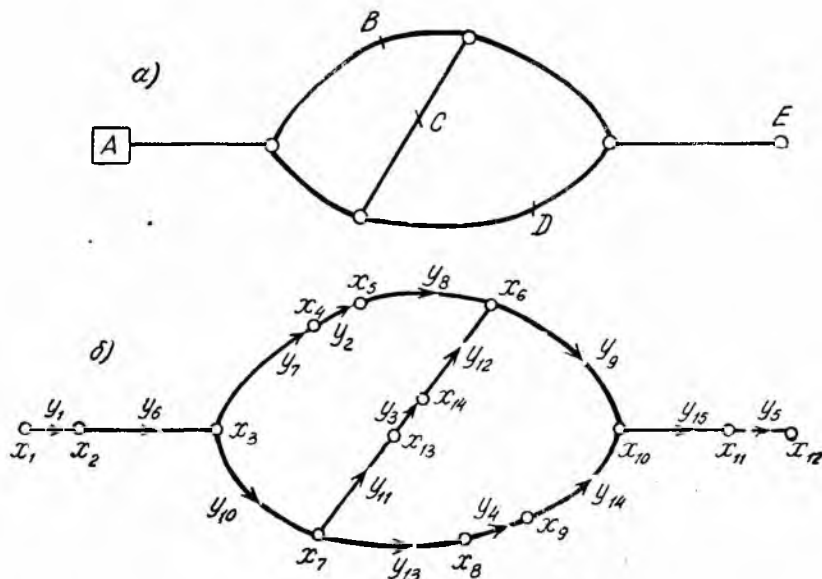


Рис. 5.

Количество уравнений (11) равно $3n$, уравнений (12) — $2r$, уравнений (13) — $2m$; число уравнений (14), (15) для каждой вершины X_i совпадает с числом a_i инцидентных ей ребер, так что всего уравнений (14), (15) будет $\sum_{i=1}^{(X)} g_i = 2|\Gamma| = 2|n + r + m|$, где $|X|, |\Gamma|$ — количество вершин и ребер мультиграфа G . Всех уравнений получится $4(n + r + m) + n$. Следовательно, обозначая через $\vec{v} = (H_1, H_2, Q_1, Q_2,$

$H_2, H'_2, \dots, Q'_{n+r+m}, Q_1^{(-)}, Q_2^{(-)}, \dots, Q_n^{(-)}$, можно переписать систему уравнений (11), (12), (13), (14), (15) в матричной форме $\vec{v} \cdot A(\omega) = \vec{\omega}$, где $A(\omega)$ квадратная матрица, $\vec{\omega} = (0, 0, \dots, 0, H_1^{(-)}, H_2^{(-)}, \dots, H_n^{(-)})$. Эта система имеет решение $\vec{v} = \vec{\omega} A(\omega)$, если $\det A(\omega) \neq 0$.

Переменное $H_k(H'_k)$ на висячих вершинах удобнее исключать, исходя (14); аналогично H_k, H'_k, Q_k, Q'_k для всех активных ребер можно исключить с помощью (11), (14). После этого активные ребра, инцидентные висячим вершинам могут быть удалены для упрощения схемы из $G(y_1, y_6$ на рис. 5, б), оставшийся мультиграф обозначается $G_0 = (X_0, \Gamma_0)$. Получается система

$$\vec{v}_0 A_0(\omega) = \vec{\omega}_0 \quad (16)$$

меньшей размерности, чем предыдущая, с решением $\vec{v}_0 = \vec{\omega}_0 A_0^{-1}(\omega)$. В обозначениях $A_0^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & Y \end{pmatrix}$, где Y блок матрицы $A_0^{-1}(\omega)$ размерности $n \times n$, можно записать часть решения $\vec{v}_0 = (\vec{v}_1, \vec{Q}^{(-)})$ в виде

$$\vec{Q}^{(-)} = \vec{H}^{(-)} Y. \quad (17)$$

Здесь для удобства все векторы считаются строками, так что матрица Y' , транспонированная по отношению к найденной, называется матрицей полных проводимостей $2n$ -полюсника.

В качестве исходных данных для составления системы (16) выбираются матрица инцидентий S^* мультиграфа G и таблица значений L_k . $\beta_k (k = n + r + 1, \dots, n + r + m)$, заготовленных заранее, или вычисляемых по стандартным подпрограммам. Так рис. 5, б (без пунктирных ребер) соответствует таблица 1, приспособленная для составления системы (16).

Двойные линии разбивают матрицу инцидентий S на блоки $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}$

так, чтобы столбцы блока $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$ соответствовали активным ребрам, строки блока $\begin{bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ — висячим вершинам X_2, X_{11} . Уравнения из системы (16) для вершины X_3 имеют вид $Q'_6 - Q_7 - Q_{10} = 0$, $H'_6 - H_7 = 0$, $H'_6 - H_{10} = 0$; для вершины X_4 $Q'_7 - Q_7^{(-)} = 0$; для активного ребра y_2 — $H'_7 + H_8 = H_2^{(-)}$; для пассивного ребра y_7 (13) $\alpha_7 Q_7 - \beta_7 Q'_7 - H_7 = 0$. $\beta_7 Q_7 - \alpha_7 Q'_7 - H'_7 = 0$ и т. д. Сопоставляя эти уравнения с таблицей, можно сформулировать следующие правила составления системы (16), справедливые для всякого G и удобные для ввода в вычислительную машину.

1. Каждая строка блока $(S_1 S_2)$ дает уравнение $\sum_i S_{ij} Q_j = 0$, где i — номер строки, j — номер столбца; сумма берется по всем столбцам, S_{ij} — элемент матрицы S ; $Q_j = Q_j^{(-)}$ при $j \leq n$.
 Q_j — первый поток (ток) j -го столбца при $S_{ij} = 1$ и $j > n$;
 Q_j — второй поток (ток) j -го столбца при $S_{ij} = 1$ и $j > n$ (см. уравнение для вершины X_4).

* См. [3] Напомним, что на ребрах мультиграфа G выбраны направления; с их учетом составляется S , как матрица инцидентий для дуг графа.

2. i -ая строка блока S_2 с k отличными от нуля элементами дает $k-1$ уравнений: $H_{j1} - H_{j2} = 0$, $H_{j1} - H_{j3} = 0$, ..., $H_{j1} - H_{jk} = 0$, где $i_1, i_2, \dots, j_k$ — номера столбцов с отличными от нуля элементами, H_j — первое давление (напряжение) j -го столбца при $S_{ij} = -1$; H_j — второе давление (напряжение) j -го столбца при $S_{ij} = 1$ (см. уравнение для вершины X_3).

3. j -му столбцу блока S_0 соответствует одно уравнение $H_l - H_k = H_j^{-1}$, где H_l, H_k выбираются следующим образом. Пусть в j -ом столбце элемент $S_{ij} = 1$, $S_{pj} = -1$. В i -й строке блока S_2 отыскивается любой отличный от нуля элемент S_{iq} и значение давления (напряжения) из столбца q берется в качестве H_l , причем значению $S_{iq} = -1$ отвечает левое давление (напряжение) столбца q , значению $S_{iq} = 1$ — правое. Аналогично в p -ой строке из S_2 отбирается элемент $S_{pr} = +1$ (-1) и в качестве H_k принимается правое (левое) давление (напряжение) столбца r (см. уравнение для активного ребра y_2).

4. Для j -го столбца блоков $\left[\frac{S_2}{S_4} \right]$, составляются два уравнения $\alpha_i Q_i - \beta_j Q'_j - H_j = 0$, $\beta_j Q_i - \alpha_i Q'_j - H'_j = 0$, где $Q_i(H_i)$ первый поток (давление) j -го столбца, $Q'_i(H'_i)$ — второй поток (давление) j -го столбца, причем, если $H_j(H'_j) = H_j^{-1}$, то последнее переносится в правую часть (см. уравнения для ребра y_7).

Можно подсчитать, что число уравнений системы (16) общей схемы G_0 равно $4|G_0| - 3n_0 - d_0$, где n_0, d_0 — количество активных ребер и висячих вершин в G_0 . Для примера рис. 5, б число уравнений составляет $4 \cdot 13 - 3 \cdot 3 - 2 = 41$. Вычисление матрицы Y можно производить либо обращая матрицу $A_0(\omega)$ системы (16), либо решая систему (16) и при этом выделять переменные на клеммах образованного $2n$ полюсника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Гризодубов. Применение теории пассивных четырехполюсников к расчету распространения колебаний в гидросистемах. «Автоматика и телемеханика», 1950, № 2.
2. И. А. Чарный. Неустановившееся движение реальной жидкости по трубам. Гостехтеориздат М., 1951.
3. К. Берж. Теория графов и ее применения. Изд.-во иностр. лит., 1963.