УДК 621.391.832

О. В. ОВЧАРЕНКО

ВЫРАЖЕНИЕ ФАЗЫ СИГНАЛА С ФИНИТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ ЧЕРЕЗ ЕГО АМПЛИТУДУ $A(t)$ ПРИ $A(t)>0$

Обозначим через $S(\omega)$ комплексный спектр вещественного сигнала $u(t)$. Если $u(t)$ имеет сплошной спектр на носителе $(-\Delta-\omega_0, -\omega_0+\Delta)\cup(-\Delta+\omega_0, \omega_0+\Delta)$, то $u(t)$ может быть естественным образом представлен в виде $u(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\Phi(t))$, где амплитуда $A(t)$ и фаза $\Phi(t)$ однозначно определяются с помощью интеграла [1]

$$I(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0+\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

следующим образом:

$$A(t) = 2|I(t)|, \quad \Phi(t) = \arg I(t). \qquad (1)$$

Существует другой способ определения амплитуды и фазы модулированных колебаний, основанный на преобразовании Гильберта:

$$A(t) = \sqrt{u^2(t) + (Hu(t))^2}; \qquad \Phi(t) = -\omega_0 t + \arccos\frac{u(t)}{A(t)}, \qquad (2)$$

где

$$Hu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$$

преобразование Гильберта (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши). Оба описанные способа — спектральный и гильбертов дают одну и ту же амплитуду и фазу [2].

В работе под амплитудой и фазой сигнала $u(t)$ понимаются функции $A(t)$, $\Phi(t)$, определяемые формулами (1) или (2). Эти функции будем называть гильбертовой амплитудой и фазой.

В литературе давно рассматривается задача об установлении связи между фазой и амплитудой модулированного сигнала (фазовая проблема) [3]. К настоящему времени установлено, что в широких классах сигналов множество фаз для каждой фиксированой амплитуды бесконечномерно и, следовательно, в таких классах сигналов эта задача не представляет интереса для практики. С другой стороны, в достаточно узких классах сигналов множество всех фаз для каждой фиксированной амплитуды может быть конечномерным и даже одномерным, например, в классе минимально фазовых сигналов. Следовательно, в узких классах сигналов рассматриваемая задача имеет практическое значение.

Цель статьи — вывод формулы, описывающей множество всех фаз, соответствующих заданной амплитуде, справедливой в узком классе сигналов $u(t)$ с финитным аналитическим спектром на носителе. Помимо этого требования на класс сигналов налагается еще два условия: сигналы $u(t)$ должны быть такими, чтобы их амплитуда $A(t)$ нигде не обращалась в нуль и убывала на бесконечности как $1/|t|$. Последнее требование дает возможность применить асимптотические формулы для амплитуды $A(t)$, полученные в работе [1].

В данной работе в описанном классе сигналов решается уравнение

$$A^2(t) = u^2(t) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau - t}\right)^2 \qquad (3)$$

относительно $u(t)$ при фиксированной допустимой амплитуде $A(t)$ а затем по формуле (2) находятся все фазы, соответствующие этой амплитуде. Уравнение (3), являясь нелинейным сингулярным интегральным уравнением (НСИУ), относится к наиболее сложному классу уравнений математической физики; для него нет разработанных методов решения. Ниже приводится метод решения НСИУ (3), и с его помощью решается поставленная выше задача о связи фазы с амплитудой. Отдельные классы линейных СИУ — так называемые характеристические СИУ, эффективно решаются путем сведения их к соответствующей линейной задаче Римана [4, с. 176]. Оказывается, НСИУ (3) тем же методом может быть приведено к линейной задаче Римана, в качестве коэффициента $G(t)$ которой [4, с. 106] выступает функция $A^2(t)$. Известно, что линейная задача Римана решается в замкнутой форме в том случае, когда $G(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на всей вещественной оси R, включая бесконечно удаленную точку [4, с. 45], и при условии, что индекс функции $G(t)$ [4, с. 101] конечен. Для обеспечения гельдеровости коэффициента задачи Римана на бесконечности мы используем асимптотику сигнала $u(t)$ на бесконечности. Ее нетрудно получить в рассматриваемом случае сигналов с аналитическим спекторм на носителе с помощью прямых вычислений [1]. Для сигналов, имеющих более сложные спектры, нужно применять общие тауберовы теоремы. Отметим, наконец, что принятое ограничение $A(t)>0$ не носит принципиального характера и налагается лишь для упрощения вычислений. Наличие нулей у функции $A(t)$ переводит соответствующую задачу Римана в разряд исключительных случаев [4, с. 130], которая также поддается решению в замкнутой форме, если количество нулей и их кратности конечны. Однако при этом вычисления становятся более громоздкими.

Решение НСИУ. Вводим функцию комплексной переменной, определяемую интегралом типа Коши:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau - z}. \tag{4}$$

Если $u(t)$ непрерывна, то $\Psi(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости D^+ и нижней D^- комплексной плоскости C [4, с. 16]. Обозначим через $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$ предельные функции $\Psi(z)$ при $z \to \to t \in R$ со стороны D^+, D^- соответственно. Согласно формулам Сохоцкого [4, с. 38] $u(t) = \Psi^+(t) - \Psi^-(t)$; **(5)**;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau - z} = i\,[\Psi^+(t) + \Psi^-(t)]. \tag{6}$$

Подставляя (5), (6) в (3), получаем граничное условие $-4\Psi^+(t) \times \times \psi^-(t) = A^2(t)$ **(7)** для функции $\Psi(z)$. Предположим, что $\Psi^-(z) \neq 0$ в D^-, тогда функция

$$\Psi(z) = \begin{cases} -4\Psi^+(z) \text{ в } D^+; \\ [\Psi^-(z)]^{-1} \text{ в } D^- \end{cases}$$

голоморфна в D^+, D^- и удовлетворяет граничному условию

$$\tilde{\Psi}^+(t) = A^2(t)\tilde{\Psi}^-(t),$$

т. е. $\tilde{\Psi}(z)$ является решением классической линейной однородной задачи Римана с коэффициентом $G(t) = A^2(t)$.

Хотя $A^2(t) > 0$ на R, эта задача относится к разряду исключительных случаев, так как на контуре, в качестве которого выступает замкнутая вещественная ось $\hat{R} = R \cup \{\infty\}$, имеется точка, где коэффициент задачи Римана $G(t)$ обращается в нуль. Такой точкой является бесконечно удаленная точка, так как $A^2(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ как $1/t^2$. Следует подчеркнуть, что при использовании степенной регуляризации рассматриваемой задачи (обычно применяемой для нейтрализации нулей на контуре [4, с. 130]) при которой $G(t)$ перейдет в $G_1(t) = (t^2+1)G(t)$, мы не избавляемся от нарушения на бесконечности гельдеровости коэффициента задачи Римана. В самом деле, хотя при этом $G_1(t)$ и не будет для $|t| \to \infty$ стремиться к нулю, $G_1(t)$ будет стремиться к периодической функции $\tilde{E}(t)$ (см. асимптотику функции $A^2(t)$ в [1]). А любая периодическая функция, как известно, не удовлетворяет условию Гельдера на бесконечности.

Для преодоления этой трудности мы используем при регуляризации исходной задачи Римана асимптотику функции $A^2(t)$ [1]:

$$A^2(t)\big|_{|t| \to \infty} = \frac{4}{(\Delta t)^2}\tilde{E}(t),$$

где
$$\tilde{E}(t) = c_0 + c_2 \cos(2\Delta t + \varphi_2),$$

c_0, c_2, φ_2 — вещественные константы, $c_0 > 0$, $c_2 > 0$. В соответствии с нашим предположением $A(t) > 0$, имеем $c_0 > c_2$.

Чтобы построить регуляризующие функции, продолжим определенную на вещественной оси R функцию $\tilde{E}(t)$ до целой функции $\tilde{E}(z) = c_0 + c_2 \cos(2\Delta z + \varphi_2)$. Эту функцию можно представить в виде произведения двух целых функций $\tilde{E}(z) = 2C_2 E^+(z) E^-(z)$, где $E^\pm(z)$ не имеют нулей в $D^\pm$ и описываются формулами [1]

$$E^\pm(z) = \cos\left(\Delta z + \frac{1}{2}\varphi_2 \pm i\Delta h\right), \tag{8}$$

где
$$h = \frac{1}{2\Delta}\ln\left(\frac{c_0}{c_2} + \sqrt{\left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2 - 1}\right), \tag{9}$$

при этом $\operatorname{ch} 2\Delta h = \dfrac{c_0}{c_2}$.

Теперь введем новую неизвестную функцию

$$\Psi_1^\pm(z) = \frac{(\Delta z \pm i)\Psi^\pm(z)}{\sqrt{2c_2}E^\pm(z)}. \tag{10}$$

Так как $E^{\pm}(z)$ не имеют нулей в $D^{\pm}$, то $\Psi_1^{\pm}(z)$ являются голоморфными функциями в $D^{\pm}$. Из (7) получаем граничное условие для $\Psi_1(z)$: $-\Psi_1^{+}(t)\,\Psi_1^{-}(t)=G_1(t)$,

$$\text{где } G_1(t)=\frac{(\Delta^2t^2+1)A^2(t)}{4\tilde{E}(t)}. \tag{11}$$

Ясно, что $G(t)\to 1$ при $|t|\to\infty$ и, следовательно, коэффициент $G_1(t)$ новой задачи Римана удовлетворяет условию Гельдера, кроме того, он не равен нулю на всей оси $\hat{R}$, включая бесконечно удаленную точку. Так как функция $\tilde{E}(t)$ вещественна и удовлетворяет неравенствам $0<\tilde{E}(t)\leqslant c_0+c_2$ то, согласно (11), вещественная функция $G_1(t)$ обладает свойством $0<G_1(t)<\infty$. Следовательно, ее индекс равен нулю.

Пусть $X^{\pm}(z)$ канонические функции [4, с. 109] вспомогательной задачи Римана: $X^{+}(t)=G_1(t)X^{-}(t)$,

тогда
$$X^{\pm}(z)\,e^{\Gamma^{\pm}(z)}; \tag{12}$$

где
$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_1(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \tag{13}$$

в силу того, что индекс равен нулю.

Функции $X^{\pm}(t)$ голоморфны в $D^{\pm}$ и нигде не обращаются в нуль, поэтому можно ввести новую неизвестную кусочно-голоморфную функцию

$$\Psi_2(z)=\begin{cases}-\Psi_1^{+}(z)/X^{+}(z) \text{ в } D^{+};\\ 1/\Psi_1^{-}(z)\,X^{-}(z) \text{ в } D^{-}.\end{cases} \tag{14}$$

Легко проверить, что эта функция должна удовлетворять граничному условию $\Psi_2^{+}(t)=\Psi_2^{-1}(t)$, представляющему собой условие аналитического продолжения. Но это значит, что $\Psi_2(z)$ может быть любой целой функцией $f(z)$.

Выразим граничные функции $\Psi^{\pm}(t)$ через $f(t)$. Из (10), (14) имеем

$$\Psi^{+}(t)=-f(t)X^{+}(t)\sqrt{2c_2}E^{+}(t)/(\Delta t+i);$$

$$\Psi^{-}(t)=\frac{\sqrt{2c_2}E^{-}(t)}{f(t)X^{-}(t)(\Delta t-i)}.$$

Подставляя $\Psi^{\pm}(t)$ в (5), получаем общее решение НСИУ (3):

$$u(t)=-\sqrt{2c_2}\left[f(t)X^{+}(t)\frac{E^{+}(t)}{\Delta t+i}+\frac{1}{f(t)X^{-}(t)}\cdot\frac{E^{-}(t)}{\Delta t-i}\right]. \tag{15}$$

Выражение фазовой функции через амплитудную. Дальнейшие шаги должны быть направлены на выбор такой целой функции $f(z)$, при которой правая часть равенства (15) будет вещественна и представима в виде $A(t)\cos(\omega_0 t+\Phi(t))$, где $A(t)$ — заданная функция. Оказывается, это требование однозначно определяет функцию $f(z)$.

Представим входящие в (15) функции в экспоненциальной форме:

$$f(t)=|f(t)|e^{i\alpha(t)}\quad(16);\quad \Delta t\pm i=\sqrt{\Delta^2t^2+1}\,e^{\pm i\delta(t)},\ 0<\delta(t)<\pi;\ (17)$$

$$E^{\pm}(t)=\cos\left(\Delta t+\frac{1}{2}\varphi_2\pm i\Delta h\right)=\frac{1}{2}\left[e^{i\Delta(t)\mp\Delta h}+e^{-i\Delta(t)\pm\Delta h}\right],\tag{18}$$

где
$$\Delta(t)=\Delta t+\frac{1}{2}\varphi_2.$$

Применяя формулы Сохоцкого к интегралу типа Коши (13), получаем

$$\Gamma^+(t)=\frac{1}{2}\ln G_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_1(\tau)}{\tau-t}d\tau;$$

$$\Gamma^-(t)=-\frac{1}{2}\ln G_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_1(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

откуда следует, что функции $\Gamma_1^{\pm}(t)=i\Gamma^{\pm}(t)$ комплексно сопряжены и могут быть представлены в виде

$$\Gamma_1^{\pm}(t)=g(t)\cos\gamma(t)\pm ig(t)\sin\gamma(t),$$

где
$$g(t)=|\Gamma_1^+(t)|=|\Gamma_1^-(t)|,\ \gamma(t)=\arg\Gamma_1^+(t);$$

$$g(t)\cos\gamma(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_1(\tau)}{\tau-t}d\tau;$$

$$g(t)\sin\gamma(t)=\frac{1}{2}\ln G_1(t),$$

поэтому

$$\Gamma^+(t)-\Gamma^-(t)=\ln G_1(t)=2g(t)\sin\gamma(t).\tag{19}$$

Итак,

$$X^{\pm}(t)=e^{\Gamma^{\pm}(t)}=e^{-ig(t)\cos\gamma(t)\pm g(t)\sin\gamma(t)}.\tag{20}$$

Используя соотношения (16), (17), (18), (20), записываем выражение (15) в виде

$$u(t)=\frac{-\sqrt{2c_2}}{\sqrt{\Delta^2t^2+1}}e^{g(t)\sin\gamma(t)}\times$$

$$\times\left\{\left(|f(t)|+\frac{1}{|f(t)|}\right)[e^{-\Delta h}\cos(\alpha_1(t)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\cos(\alpha_1(t)-\Delta(t))]+\right.$$

$$\left.+i\left(|f(t)|-\frac{1}{|f(t)|}\right)[e^{-\Delta h}\sin(\alpha_1(t)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\sin(\alpha_1(t)-\Delta(t))]\right\}, \tag{21}$$

где $$\alpha_1(t)=\alpha(t)-g(t)\cos\gamma(t)-\delta(t).$$

Приравнивая к нулю мнимую часть выражения (21), получаем два уравнения

$$|f(t)|-\frac{1}{|f(t)|}=0;$$

$$e^{-\Delta h}\sin(\alpha_1(t)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\sin(\alpha_1(t)-\Delta(t))=0. \tag{22}$$

Первое из этих уравнений однозначно определяет $|f(t)|\equiv 1$, а второе определяет $\alpha(t)=\arg f(t)$, входящую в $\alpha_1(t)$.

Покажем, что если $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению (22), то выражение (21) не может описывать амплитудно-модулированное высокочастотное колебание. Действительно, пусть выполняется равенство (22), которое можно преобразовать так:

$$\operatorname{tg}\alpha_1(t)=\frac{e^{2\Delta h}-1}{e^{2\Delta h}+1}\operatorname{tg}\Delta(t),$$

откуда следует что $\alpha_1(t)$ является медленно изменяющейся функцией .В силу равенства (22) выражение (21) принимает вид

$$u_1(t)=-\frac{1}{2}A_1(t)F(t)B(t),$$

где $$A_1(t)=\frac{\sqrt{2c_2}}{\sqrt{\Delta^2t^2+1}}e^{g(t)\sin\gamma(t)}; \tag{23}$$

$$B(t)=e^{-\Delta h}\cos(\alpha_1(t)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\cos(\alpha_1(t)-\Delta(t));$$

$$F(t)=|f(t)|+\frac{1}{|f(t)|},$$

причем вследствие медленности изменения функций $A(t)$ и $\alpha_1(t)$ функции $A_1(t)$ и $B(t)$ — медленно изменяющиеся. В этих условиях функция $F(t)$ должна быть быстро изменяющейся, если $u(t)$ высокочастотное колебание. В силу медленности изменения произведения $A_1(t)\,B(t)$ можно выбрать равный нескольким периодам высокочастотных колебаний интервал времени T, на котором произведение $A_1(t)\,B(t)$ не изменяет знак. Но тогда

$$F(t)=|f(t)|+\frac{1}{|f(t)|}\geqslant 0,$$

функция $u(t)=-\frac{1}{2}A_1(t)F(t)B(t)$ не изменяет знак в интервале T, а это значит, что $u(t)$ не является высокочастотным амплитудно модулированным колебанием:

$$u(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\Phi(t)),$$

Итак, нужно исходить из того, что $|f(t)|\equiv 1$. Тогда выражение (21) примет вид

$$u(t)=-A_1(t)\,[e^{-\Delta h}\cos(\alpha_1(t)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\cos(\alpha_1(t)-\Delta(t))], \tag{24}$$

в котором $\alpha_1(t)$, а следовательно, и $\alpha(t)$ уже не есть медленно изменяющиеся функции.

Покажем, что $\alpha(t)$ должна быть линейной функцией, чтобы выражение (24) описывало сигнал с финитным сплошным спектром. Для этого, используя (10), (14), представим целую функцию $f(z)$ как

$$f(z)=\Psi_2(z)=\begin{cases}-\dfrac{(\Delta z+i)\,\Psi^+(z)}{\sqrt{2c_2}\,E^+(z)\,X^+(z)} & \text{в } D^+;\\[2ex] \dfrac{\sqrt{2c_2}\,E^-(z)}{(\Delta z-i)\,\Psi^-(z)X^-(z)} & \text{в } D^-.\end{cases} \tag{25}$$

Согласно определениям (4), (12), (8), функции $\Psi^\pm(z)$, $X^\pm(z)$ голоморфны в $D^\pm$ и убывают на бесконечности, а $E^\pm(z)$ являются целыми функциями экспоненциального типа. Поэтому в силу (25) $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа. Кроме того, $|f(t)|\equiv 1$. Все такие функции описываются формулой $f(z)=e^{i(\omega z+\varphi_0)}$, где ω, φ_0 — произвольные вещественные числа. В самом деле, из тождества $f(t)f^*(t)=|f(t)|^2\equiv 1$ и аналитичности $f(z)f^*(z^*)$ следует, что $f(z)f^*(z)\equiv 1$, поэтому $f(z)$ не имеет нулей, но тогда указанное представление вытекает из теоремы Адамара о целых функциях [5, с. 31]. Следовательно, $\alpha(t)=\omega t+\varphi_0$, $\alpha_1(t)=\omega t+\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)$, где $\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)=\varphi_0-g(t)\cos\gamma(t)-\delta(t)$.

Приведем выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (24), к виду $A_2(t)\cos(\omega t+\Phi(t))$, где $\omega>0$. Это можно сделать в двух случаях, соответствующих различным знакам константы ω в равенстве $\alpha(t)=\omega t+\varphi_0$. Имеем

$$-e^{-\Delta h}\cos(\pm\omega t+\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)+\Delta(t))-e^{\Delta h}\cos(\pm\omega t+\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)-\Delta(t))=$$

$$=-[e^{-\Delta h}\cos(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\cos(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)-\Delta(t))]\cos\omega t\pm$$

$$\pm[e^{-\Delta h}\sin(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\sin(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)-\Delta(t))]\sin\omega t=$$

$$=A_2(t)\cos(\omega t\pm\Phi(t,\varphi_0)),$$

где $$\Phi(t,\varphi_0)=\operatorname{arctg}\frac{e^{-\Delta h}\sin(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\sin(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)-\Delta(t))}{e^{-\Delta h}\cos(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\cos(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)-\Delta(t))}; \tag{26}$$

$$A_2^2(t)=[e^{-\Delta h}\cos(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\cos(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)-\Delta(t))]^2+$$

$$+[e^{-\Delta h}\sin(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)+\Delta(t))+e^{\Delta h}\sin(\tilde{\alpha}_1(t,\varphi_0)-\Delta(t))]^2=$$

$$= e^{-2\Delta h} + e^{2\Delta h} + 2\cos 2\Delta t = 2\,[\mathrm{ch}\, 2\Delta h + \cos(2\Delta t + \varphi_2)] =$$

$$= \frac{2}{c_2}\,[c_0 + c_2 \cos(2\Delta t + \varphi_2)] = 2\frac{\tilde{E}(t)}{c_2}. \qquad (27)$$

На последнем шаге здесь использовано равенство (9). Из формулы (27) следует, что $A_2(t)$ не зависит от φ_0. Теперь заметим, что согласно равенствам (23) и (19) находим

$$A_1^2(t) = \frac{2c_2}{\Delta^2 t^2 + 1}\, e^{2g(t)\sin\gamma(t)} = \frac{2c_2}{\Delta^2 t^2 + 1}\, G_1(t),$$

поэтому с учетом (11) произведение

$$A_1^2(t)\, A_2^2(t) = \frac{2c_2}{\Delta^2 t^2 + 1}\, G_1(t)\, 2\frac{\tilde{E}(t)}{c_2} = \frac{4\tilde{E}(t)}{\Delta^2 t^2 + 1}\, G_1(t) = A^2(t).$$

Следовательно,

$$u(t) = A_1(t)\, A_2(t) \cos(\omega t \pm \Phi(t, \varphi_0)) = A(t)\cos(\omega t \pm \Phi(t, \varphi_0)).$$

Итак, все функции $u(t)$, имеющие одну и ту же допустимую амплитудную функцию $A(t) > 0$ и имеющие финитный аналитический спектр ширины 2Δ, описываются выражением

$$u(t, \omega, \varphi_0) = A(t)\cos(\omega t \pm \Phi(t, \varphi_0)),$$

в котором фазовая функция $\Phi(t, \varphi_0)$ определяется формулой (26). В нее входят медленно изменяющиеся функции, которые при фиксированных ω и φ_0 однозначно определяются амплитудной функцией $A(t)$, поэтому поставленная в работе задача о выражении фазовой функции через амплитудную решена полностью.

Список литературы: 1. *Овчаренко О. В.* Асимптотика сигналов с финитным аналитическим спектром//Радиотехника. 1990. Вып. 92. С. 62—67. 2. *Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А.* Амплитуда, фаза, частота — основные понятия теории колебаний//Усп. физ. наук. 1977. Т. 123, вып. 4. С. 657—682. 3. *Василенко Г. И., Тараторин А. М.* Восстановление изображений. М., 1986. 185 с. 4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977. 640 с. 5. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М., 1983. 175 с.

Поступила в редколлегию 13.07.88