

ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕЩЕННОГО ОДНОМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ

к.т.н. И.В. Рубан, к.т.н. С.В. Дуденко, М.Н. Колмыков
(представил д.т.н., проф. Ю.В. Стасев)

В статье вводятся в рассмотрение и исследуются аналитические выражения смещенного одномерного дискретного преобразования Хартли.

Постановка задачи. В настоящее время при обработке информации, в частности для цифровой фильтрации и дискретной свертки, широко применяются унитарные преобразования, к которым относят дискретно-косинусное преобразование, преобразование Уолша-Адамара, преобразование Хаара и другие [1, 2]. Указанные преобразования позволяют строить алгоритмы обработки информации, причем различия в математических свойствах преобразований приводят к различиям в свойствах и характеристиках, разработанных на их основе алгоритмов. Таким образом, нахождение и исследование неизвестных свойств существующих унитарных преобразований позволит строить новые алгоритмы обработки информации.

Анализ литературы. К классу унитарных преобразований относят и дискретное преобразование Хартли [3]. Дискретное преобразование Хартли (ДПХ) оперирует числами в вещественной области представления и, следовательно, обладает более низкой вычислительной сложностью в сравнении с другими преобразованиями (например, преобразование Фурье, которое оперирует комплексными величинами). На данный час свойства и области применения ДПХ только исследуются.

Цель статьи. Введение в рассмотрение и исследование нового свойства дискретного преобразования Хартли, которое на наш взгляд может быть полезным при обработке информации.

Суть одномерного дискретного преобразования Хартли. Обращение к преобразованию Хартли обусловлено тем, что оно обладает свойством симметричности преобразования.

Прямое и обратное ДПХ определяется соотношениями:

$$H(v) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \text{cas} (2\pi v\tau/N); \quad (1)$$

$$f(\tau) = \sum_{v=0}^{N-1} H(v) \text{cas} (2\pi v\tau/N),$$

где

$$\text{cas}(\Theta) = \cos(\Theta) + \sin(\Theta).$$

Особенностью данного преобразования является функция $\text{cas}(\Theta)$, введенная Хартли в 1942 году (рис. 1).

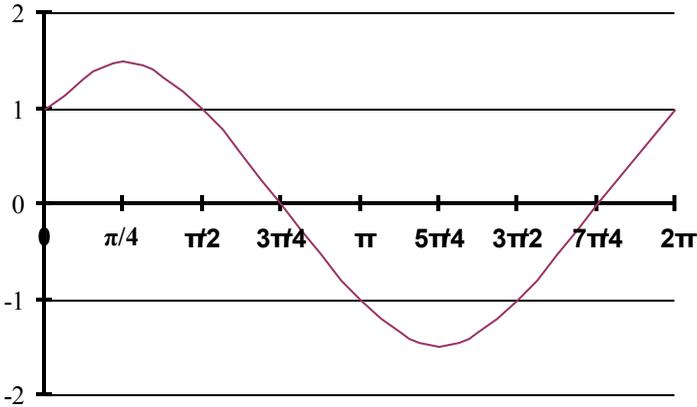


Рис. 1. График функции $\text{cas}(\Theta)$

Суть смещенного дискретного преобразования Хартли. Периодичность функции $\text{cas}(\Theta)$ позволила получить аналитические выражения смещенного дискретного преобразования Хартли (СДПХ):

$$H(v) = N^{-1} \sum_{\tau=1}^N f(\tau) \text{cas} (2\pi v\tau/N); \quad (2)$$

$$f(\tau) = \sum_{v=1}^N H(v) \text{cas} (2\pi v\tau/N).$$

Рассмотрим характер изменений свойств преобразования на примере обработки четырех точечного вектора.

Используя выражение (2) получим матрицу коэффициентов функции $\text{cas}(\Theta)$

$${}^4\mathbf{K}_{\text{cas}} = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi \\ \frac{\pi}{2} & 2\pi & \frac{3\pi}{2} & 4\pi \\ \frac{3\pi}{2} & 3\pi & \frac{9\pi}{2} & 6\pi \\ \frac{\pi}{2} & 4\pi & \frac{3\pi}{2} & 8\pi \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Матрица коэффициентов (3) позволяет построить матрицу коэффициентов СДПХ для четырехточечного вектора в следующем виде:

$${}^4\mathbf{H}_{\text{CM}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Для сравнения соответствующая матрица ДПХ имеет вид:

$${}^4\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Сравнив матрицы ${}^4\mathbf{H}_{\text{CM}}$ и ${}^4\mathbf{H}$, можем заметить, что в случае использования СДПХ энергия сигнала смещается в сторону последней точки, а не первой, как у ДПХ.

Аналитические выражения СДПХ для преобразования четырехточечного вектора будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(1) &= (1/4) [f(1) - f(2) - f(3) + f(4)]; \\ \mathbf{H}(2) &= (1/4) [-f(1) + f(2) - f(3) + f(4)]; \\ \mathbf{H}(3) &= (1/4) [-f(1) - f(2) + f(3) + f(4)]; \\ \mathbf{H}(4) &= (1/4) [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Возьмем, для примера, вектор {18; 86; 2; 255} и преобразуем его с помощью выражения (1), получим вектор {90,25; -38,25; -80,25; 46,25}. При использовании выражения (2) получается результирующий вектор вида {46,25; 80,25; 38,25; 90,25}, что позволяет сделать следующие выводы:

- 1) энергия сигнала сместилась из первой точки в последнюю точку;
- 2) изменились фазы второй и третьей точек.

Заметим, что для ДПХ справедлива теорема о сдвиге [4].

Теорема о сдвиге. Для выполнения операции сдвига каждый элемент исходной последовательности $f(\tau) = \{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{N-1}\}$, имеющей ДПХ вида $\mathbf{H}(v) = \{\alpha_0 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_{N-1}\}$, перемещается на количество позиций T вправо, последний элемент в соответствии со свойством цикличности [1] перемещается на первую позицию и далее вправо на $T - 1$

позиций.

В целом, для последовательности $f(\tau - T)$ ДПХ имеет вид

$$H_T(v) = \cos(2\pi T v / N) H(v) - \sin(2\pi T v / N) H(N - v).$$

Например, в соответствии с теоремой для $T = 1$ имеем последовательность $f(\tau - T) = \{a_{N-1} a_0 a_1 a_2 a_3 \dots a_{N-2}\}$ для которой ДПХ будет иметь вид:

$$H_T(v) = \{a_0 C_1 a_1 C_2 a_2 C_3 a_3 \dots C_{N-1} a_{N-1}\} - \{0 S_1 a_{N-1} S_2 a_{N-2} S_3 a_{N-3} \dots S_{N-1} a_1\},$$

где $C_v = \cos(2\pi v / N)$; $S_v = \sin(2\pi v / N)$.

Возникает вопрос, не является ли СДПХ – частным случаем теоремы о сдвиге. Проверим нашу гипотезу на примере четырех точечного СДПХ (6). Осуществим преобразование вектора $\{18; 86; 2; 255\}$ в соответствии с (1), а затем будем сдвигать его циклически влево, в результате получим следующие значения:

Таблица 1

Числовые значения точек векторов,
преобразованных с помощью выражений для ДПХ

	0-я точка	1-я точка	2-я точка	3-я точка
Обрабатываемый вектор	18	86	2	255
Результирующий вектор	90,25	-38,25	-80,25	46,25
сдвиг влево на одну точку				
Обрабатываемый вектор	86	2	255	18
Результирующий вектор	90,25	-46,25	80,25	-38,25
сдвиг влево на две точки				
Обрабатываемый вектор	2	255	18	86
Результирующий вектор	90,25	38,25	-80,25	-46,25
сдвиг влево на три точки				
Обрабатываемый вектор	255	18	86	2
Результирующий вектор	90,25	46,25	80,25	38,25

Из табл. 1 видно, что 0-я точка сохраняет основную энергию сигнала, происходит изменения последовательности первой и третьей точки, а также изменение фаз с первой по третью точки.

Аналогично проведем исследование для СДПХ вектора $\{18; 86; 2; 255\}$ в соответствии с (2), а затем будем сдвигать его циклически влево, в результате получим следующие значения:

Таблица 2

Числовые значения точек векторов,
преобразованных с помощью выражений для СДПХ

	1-я точка	2-я точка	3-я точка	4-я точка
Обрабатываемый вектор	18	86	2	255
Результирующий вектор	46,25	80,25	38,25	90,25
сдвиг влево на одну точку				

Обрабатываемый вектор	86	2	255	18
Результирующий вектор	-38,25	-80,25	46,25	90,25
сдвиг влево на две точки				
Обрабатываемый вектор	2	255	18	86
Результирующий вектор	-46,25	80,25	-38,25	90,25
сдвиг влево на три точки				
Обрабатываемый вектор	255	18	86	2
Результирующий вектор	38,25	-80,25	-46,25	90,25

В случае с СДПХ (табл. 2), основная энергия сигнала сохраняется в последней (четвертой) точке, происходит изменения последовательности первой и третьей точки, а также изменение фаз с первой по третью точки.

Практическая значимость. Во-первых, рассмотрим порядок обработки векторов, которые имеют значения всех точек равные W . Для ДПХ результирующий вектор будет иметь вид $\{W; 0; 0; \dots; 0\}$, а для смещенного ДПХ $\{0; 0; \dots; 0; W\}$, в этом случае важным является порядок анализа результирующего вектора. Если порядок обработки результирующего вектора предусматривает анализ от последней точки к первой, преимущество СДПХ очевидно.

Во-вторых, при обработки пятиточечного вектора, который имеет в нулевой точке значимую характеристику (например, точка начального отсчета), возникает необходимость начать обработку с первой точки минуя нулевую, что не позволяет сделать классическое ДПХ.

Выводы. Использование смещенного ДПХ позволяет при обработке дискретных сигналов сместить его энергию с первой точки в последнюю, а также изменить фазы остальных точек.

Направлением дальнейшего исследования является анализ компрессионных возможностей трансформант смещенного ДПХ и подходов к построению алгоритмов обработки изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – 480 с.
2. Янин В.В. Анализ и обработка изображений (принципы и алгоритмы). – М.: Машиностроение, 1995. – 240 с.
3. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 273 с.
4. Королев А.В., Малахов С.В., Рубан И.В. Метод сжатия видеоданных посредством преобразований // Электрон. моделирование. – 1999. – № 4. – С. 47 – 55.

Поступила 27.10.2004

РУБАН Игорь Викторович, канд. техн. наук, доцент, нач. кафедры Харьковского университета Воздушных Сил. В 1990 году окончил ХВКИУ РВ. Область научных инте-

ресов – обработка информации в вычислительных сетях и АСУ.

***ДУДЕНКО Сергей Васильевич**, канд. техн. наук, нач. НИЛ Харьковского университета Воздушных Сил. В 1995 году окончил ХВУ. Область научных интересов – обработка информации в вычислительных сетях и АСУ.*

***КОЛМЫКОВ Максим Николаевич**, адъюнкт Харьковского университета Воздушных Сил. В 2000 году окончил ХВУ. Область научных интересов – обработка информации в вычислительных сетях и АСУ.*
