



# APPLIED RADIO ELECTRONICS

Scientific and Technical Journal 2018 Volume 17 № 1, 2

## CONTENTS

### REGULAR ARTICLES

Wang, Y. X., Zhang, Y. C., Wang, Y. C., Wang, Y. C. & Wang, Y. C. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	1
---	---

### RESEARCH PAPERS

Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10
Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10
Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10

### REVIEWS

Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10
Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10

## REFERENCES

### REGULAR ARTICLES

Wang, Y. X., Zhang, Y. C., Wang, Y. C., Wang, Y. C. & Wang, Y. C. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	1
Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10
Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10
Yildiz, S. (2018) Design and Simulation of a Novel Power Amplifier	10

## МОДЕЛЬ ГАУССОВЫХ ШУМОВЫХ ПОМЕХ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОМЕХОЗАЩИТЫ

В. П. РЯБУХА, В. В. ЦИСАРЖ, А. В. СЕМЕНЯКА, Е. А. КАТЮШИН

Статья посвящена разработке алгоритма моделирования выборки гауссовых шумовых помех с неравномерным, в частности, гребенчатым, частотным спектром на выходах пространственных каналов приема в дискретные моменты времени и оценке влияния неравномерности частотного спектра мешающих шумовых излучений внешних источников на эффективность адаптивной обработки сигналов на их фоне.

**Ключевые слова:** математическая модель, шумовые помехи, неравномерный частотный спектр, входная (обучающая) выборка, корреляционная матрица (последовательность), отношение сигнал/(помеха + шум)

### ВВЕДЕНИЕ

РЛС контроля воздушного пространства должны решать стоящие перед ними задачи в условиях воздействия различного рода помех, в частности, маскирующих шумовых помех (ШП), создаваемых точечными по пространству источниками гауссовых независимых непрерывных шумовых излучений (рис. 1). Они маскируют сигналы (рис. 2) и затрудняют тем самым извлечение полезной радиолокационной информации.

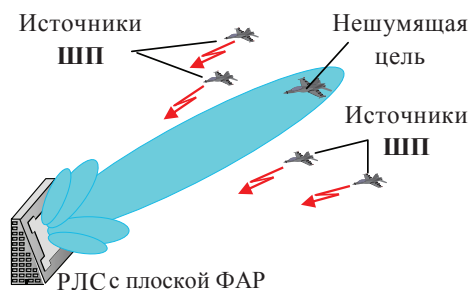


Рис. 1. Источники ШП

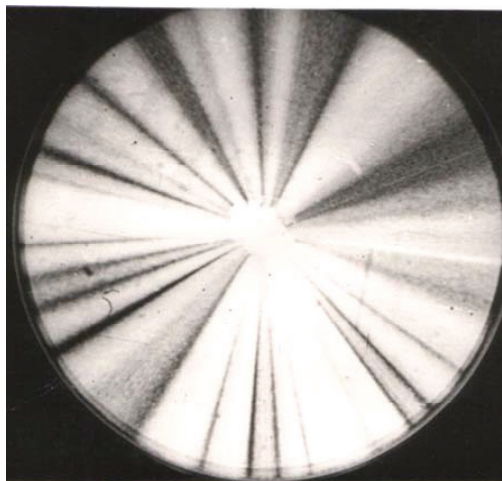


Рис. 2. Вид ИКО РЛС при воздействии ШП

На практике параметры шумовой помехи, в частности, ее пространственная корреляционная матрица  $\Phi$ , как правило, неизвестны и, кроме того, меняются во времени из-за движения источников ШП и (или) обзора пространства самой РЛС. В этих условиях обычно невозможно обеспечить защиту РЛС системами обработки с априори выбранными фиксированными параметрами.

Поэтому большое значение имеет способность системы защиты от помех приспосабливаться к изменяющейся помеховой обстановке, т.е. адаптироваться к ней. Адаптивные системы обработки должны оперативно извлекать и использовать недостающую информацию о параметрах помех непосредственно из входных воздействий.

В подавляющем большинстве теоретических исследований адаптивных систем пространственной обработки сигналов полагается, что создаваемая внешними источниками гауссова шумовая помеха имеет **равномерный** частотный спектр (РЧС), представляющий собой частотный спектр стационарного белого шума. Но современные средства цифрового формирования сигналов позволяют создавать шумовую помеху с **неравномерным** частотным спектром (НЧС), эффективность адаптивной обработки полезных сигналов на фоне которой может отличаться от достижимой в условиях РЧС шумовых излучений [1].

В данной статье поставлены две цели.

1. Разработать рациональный алгоритм моделирования  $N \times K$ -мерной выборки гауссовых шумовых помех с гребенчатым НЧС на выходах  $N$  пространственных каналов приема в  $K$  дискретных эквидистантных моментах времени.

2. На основе разработанной модели оценить влияние неравномерности частотного спектра шумовых помех от внешних источников на эффективность адаптивной пространственной обработки отраженных от целей сигналов на их фоне.

Статья организована следующим образом.

В п. 1 ставится задача моделирования выборки гауссовых шумовых помех с неравномерным частотным спектром и описывается ее решение в общем случае; в п. 2 описывается формирование корреляционной матрицы аддитивной смеси внутреннего шума и внешних шумовых помех, а в п.3 – векторов выборки этой смеси. П. 4 посвящен обоснованию модели этой смеси с уменьшенными вычислительными затратами. В п. 5 приводится корреляционная последовательность смеси внутреннего шума и шумовых помех с гребенчатым частотным спектром. П. 6 посвящен оценке влияния неравномерности частотного спектра шумовых помех от внешних источников на эффективность адаптивной обработки сигналов на их фоне.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Для достижения первой цели требуется сформировать выборку (рис. 3)

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_i]_{i=1}^K = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_N]$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t_i) = [y_1(t_i) \ y_2(t_i) \dots \ y_N(t_i)]^T = [y_\ell^{(i)}]_{\ell=1}^N, \quad (1)$$

$$i \in 1, K$$

объема  $K$ , образованную  $N$ -мерными комплексными векторами  $\mathbf{y}_i$ , компоненты которых  $y_\ell^{(i)} = y_\ell(t_i)$  должны соответствовать отсчетам аддитивной смеси гауссового внутреннего шума приемника и гауссовых шумовых помех от  $v \geq 1$  внешних источников, в общем случае – с заданными НЧС, интенсивностью и угловыми координатами в  $\ell$ -м ( $\ell \in 1, N$ ) пространственном канале приема в дискретные моменты времени  $t_i = i \cdot \Delta$ ,  $i \in 0, K-1$ , где  $\Delta$  – используемый интервал временной дискретизации. В (1) "T" – знак транспонирования.

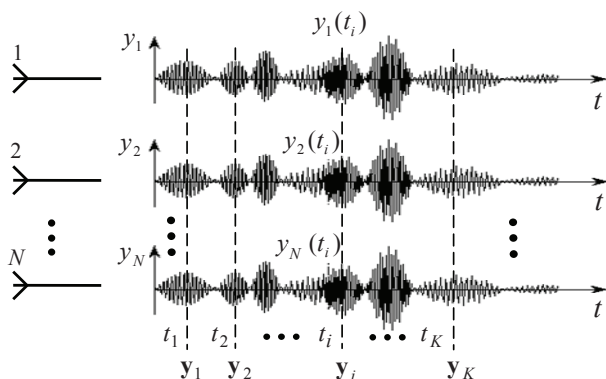


Рис. 3.  $N$ -мерные векторы  $\mathbf{y}_i$  выборки  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_i]_{i=1}^K$

На рис. 4 показана удобная для создания требуемой выборки (1) схема формирования  $N \times K$ -мерного гауссова вектор-столбца комплексных амплитуд моделируемого процесса

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_i]_{i=1}^K = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_K \end{bmatrix} \sim CN(0, \mathbf{R}_u), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_i = [u_\ell^{(i)}]_{\ell=1}^N, \quad i \in 1, K$$

с нулевым вектором средних значений (нвсз) и корреляционной матрицей (КМ)

$$\mathbf{R}_u = \overline{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^*} = [\mathbf{r}_{pq}]_{p,q=1}^K, \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_{pq} = \overline{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q^*} = [r_{\mu\nu}^{(p,q)}]_{\mu,\nu=1}^N$$

размера  $(N \cdot K) \times (N \cdot K)$ , образованной  $K \cdot K = K^2$  блоками  $\mathbf{r}_{pq}$  размера  $N \times N$ .

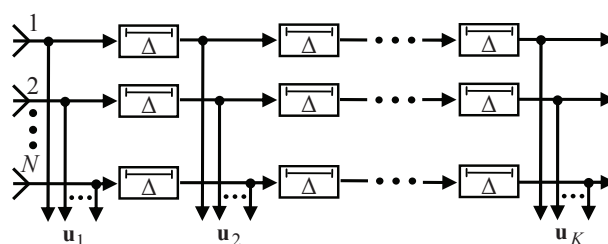


Рис. 4. Структура формирователя помех с НЧС

Здесь и далее  $K$  имеет смысл **объема выборки**  $N$ -мерных векторов сигналов  $N$  пространственных каналов приема, в каждый из которых включена  $K$ -отводная линия задержки с временными интервалами между отводами

$$\Delta = T_{comp} / n = 1 / (n \cdot F_{comp}), \quad (4)$$

где  $T_{comp}$  – длительность полезного сигнала после согласованной фильтрации в приемнике,  $F_{comp} = 1 / T_{comp}$  – ширина спектра зондирующего сигнала,  $n \geq 1$  – задаваемое число отсчетов процесса на интервале  $T_{comp}$ .

При  $n \leq 1$  векторы выборки практически некоррелированы. При  $n > 1$  они взаимно коррелированы, и тем сильнее, чем больше  $n$  (чем меньше временной интервал  $\Delta$  между ними). Их корреляционная функция зависит от формы спектральной плотности мощности (частотного спектра)  $c(f)$  смеси шума и внешней помехи.

Поставленная задача в целом может решаться традиционным способом, в соответствии с которым вектор (2) можно формировать по соотношению

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}_u \cdot \xi_u, \quad (5)$$

где

$$\xi_u = [\xi_\ell^{(u)}]_{\ell=1}^{N \cdot K} \sim CN(0, \mathbf{I}_{NK}) - \quad (6)$$

$N \cdot K$ -мерный комплексный гауссов вектор отсчетов шума с **нвсз** и единичной  $(N \cdot K) \times (N \cdot K)$  **КМ**  $\mathbf{I}_{NK}$ ,  $\mathbf{T}_u$  –  $(N \cdot K) \times (N \cdot K)$  "корень" **КМ** (3), удовлетворяющий равенству (рис. 5)

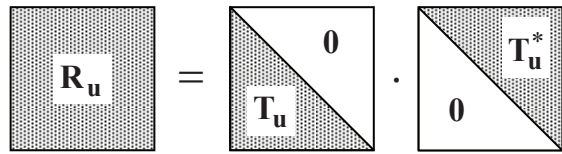
$$\mathbf{T}_u \cdot \mathbf{T}_u^* = \mathbf{R}_u \quad (7)$$


Рис. 5. Треугольное ниже-верхнее разложение Холецкого эрмитовой положительно определённой матрицы  $\mathbf{R}_u$

Тем самым решаемая далее задача сводится к отысканию **КМ**  $\mathbf{R}_u$  (3) вектора  $\mathbf{U}$  (3), "корня"  $\mathbf{T}_u$  (7) из нее и умножению этого корня на вектор шума  $\xi_u$  (6), формируемый датчиком компьютера.

## 2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА СМЕСИ ВНУТРЕННЕГО ШУМА И ВНЕШНИХ ШУМОВЫХ ПОМЕХ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ

Искомая **КМ** строится в предположении, что каждый из  $N$ -мерных подвекторов  $\mathbf{u}_i$  вектора (2) в  $i$ -м отводе линий задержки (рис. 4) равен сумме

$$\mathbf{u}_i = \left[ u_{\ell}^{(i)} \right]_{\ell=1}^N = \mathbf{u}_{ni} + \mathbf{u}_{ai}, \quad i \in 1, K, \quad (8)$$

взаимно некоррелированных (независимых)  $N$ -мерных гауссовых векторов комплексных амплитуд внутреннего шума (noise)  $\mathbf{u}_{ni}$  и внешних (активных) излучений  $\mathbf{u}_{ai}$  с **нвсз**, т.е.

$$\mathbf{u}_{ni} \sim CN(0, \mathbf{r}_{ni}), \quad \mathbf{u}_{ai} \sim CN(0, \mathbf{r}_{ai}). \quad (9)$$

В этих условиях  $N \times N$  блоки

$$\mathbf{r}_{pq} = \overline{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q^*} = \left[ r_{\mu\nu}^{(p,q)} \right]_{\mu,\nu=1}^N, \quad p, q \in 1, K \quad (10)$$

**КМ**  $\mathbf{R}_u$  (3) в силу независимости слагаемых в (8) равны сумме

$$\mathbf{r}_{pq} = \mathbf{r}_{npq} + \mathbf{r}_{apq} \quad (11)$$

соответствующих **КМ**

$$\mathbf{r}_{npq} = \overline{\mathbf{u}_{np} \cdot \mathbf{u}_{nq}^*}, \quad \mathbf{r}_{apq} = \overline{\mathbf{u}_{ap} \cdot \mathbf{u}_{aq}^*},$$

слагаемых в (8). Для этих **КМ** далее используются модели

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{npq} &= \mathbf{I}_N \cdot \delta(p, q), \\ \mathbf{r}_{apq} &= \rho_{pq} \cdot \mathbf{R}_a, \quad \mathbf{R}_a = \left[ r_{pq}^{(a)} \right]_{p,q=1}^N, \\ \delta(p, q) &= \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q, \end{cases} \quad p, q \in 1, K. \end{aligned} \quad (12)$$

Первая вытекает из естественного предположения о некоррелированности внутренних шумов с принятой за единицу мощностью в **различных** пространственных каналах приема как в совпадающих, так и в различных отводах линии задержки. Во втором равенстве  $N \times N$  матрица  $\mathbf{R}_a$  представляет собой **КМ** активных излучений в  $N$  пространственных каналах, одинаковую во всех **совпадающих** отводах линии задержки, а скалярный множитель  $\rho_{pq}$  учитывает в общем случае ненулевую временную корреляцию  $N$ -мерных векторов излучений  $N$  пространственных каналов в  $p$ -м и  $q$ -м отводах.

Из (10) – (12) следует, что искомая **КМ**  $\mathbf{R}_u$  (3) в целом равна

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \rho_{11} \cdot \mathbf{R}_a & \rho_{12} \cdot \mathbf{R}_a & \dots & \rho_{1K} \cdot \mathbf{R}_a \\ \rho_{21} \cdot \mathbf{R}_a & \rho_{22} \cdot \mathbf{R}_a & \dots & \rho_{2K} \cdot \mathbf{R}_a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{K1} \cdot \mathbf{R}_a & \rho_{K2} \cdot \mathbf{R}_a & \dots & \rho_{KK} \cdot \mathbf{R}_a \end{bmatrix} = \quad (13) \\ &= \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_t \otimes \mathbf{R}_a, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{R}_t = \left[ \rho_{pq} \right]_{p,q=1}^K, \quad \rho_{pp} = 1, \quad p \in 1, K - \quad (14)$$

положительно определенная  $K \times K$  матрица полного ранга ( $(\text{rank}(\mathbf{R}_t) = K)$ ) коэффициентов временной корреляции внешних шумовых излучений в  $N$  пространственных каналах в  $p$ -м и  $q$ -м отводах линии задержки (рис. 2),  $p, q \in 1, K$ ;  $\otimes$  – символ кронекеровского перемножения [2, 3].

## 3. ВЕКТОРЫ ВЫБОРКИ СМЕСИ ВНУТРЕННЕГО ШУМА И ШУМОВЫХ ПОМЕХ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ

Запишем матрицы  $\mathbf{R}_t$  (14) и  $\mathbf{R}_a$  (12) через их "корни"  $\mathbf{T}_t$  и  $\mathbf{T}_a$ :

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{T}_t^*, \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_a^*, \quad (15)$$

откуда в силу (13)

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{I}_{KN} + \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{T}_t^* \otimes \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_a^*. \quad (16)$$

Используя известное свойство кронекеровского произведения [2, 3]

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}, \quad (17)$$

перепишем (16) в виде

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{I}_{KN} + \mathbf{T}_t \otimes \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_t^* \otimes \mathbf{T}_a^*. \quad (18)$$

Рассмотрим  $N \cdot K$ -мерный гауссов вектор

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_i]_{i=1}^K = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_K \end{bmatrix} = \xi_1 + \mathbf{T}_t \otimes \mathbf{T}_a \cdot \xi_2, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= [\xi_{1i}]_{i=1}^K \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{NK}), \\ \xi_2 &= [\xi_{2i}]_{i=1}^K \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{NK}), \\ \xi_1 \cdot \xi_2^* &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

с КМ

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_g &= \overline{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^*} = \overline{(\xi_1 + \mathbf{T}_t \otimes \mathbf{T}_a \cdot \xi_2) \cdot (\xi_1^* + \xi_2^* \cdot \mathbf{T}_t^* \otimes \mathbf{T}_a^*)} = \\ &= \mathbf{I}_{N \cdot K} + \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{T}_t^* \otimes \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_a^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что введенный гауссов вектор (19) с **нвсз** имеет ту же **КМ** (16), которую должен иметь подлежащий формированию гауссов вектор  $\mathbf{U}$  (2) с **нвсз**. Такие гауссовы векторы статистически эквивалентны, что в принципе позволяет моделировать требуемый вектор по соотношению (19)

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_i]_{i=1}^K = \xi_1 + \mathbf{T}_t \otimes \mathbf{T}_a \cdot \xi_2. \quad (20)$$

Очевидно, однако, что способ моделирования, основанный на непосредственном использовании (20) и требующий явного формирования матрицы  $\mathbf{T}_t \otimes \mathbf{T}_a$  размера  $(N \cdot K) \times (N \cdot K)$  и затем умножения ее на  $N \cdot K$ -мерный вектор  $\xi_2$ , может оказаться неприемлемо сложным по вычислительным затратам уже при относительно небольших значениях  $N \geq 10$ ,  $K \geq 50$ .

#### 4. СОКРАЩЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СМЕСИ ВНУТРЕННЕГО ШУМА И ШУМОВЫХ ПОМЕХ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ

Вычислительные затраты (20) можно существенно уменьшить, используя специфику структуры матрицы  $\mathbf{T}_t \otimes \mathbf{T}_a$ . Покажем это для случая, когда в роли "корня"  $\mathbf{T}_t$  матрицы  $\mathbf{R}_t$  используется нижняя треугольная  $K \times K$  матрица

$$\mathbf{T}_t = [t_{pq}]_{p,q=1}^K, \quad t_{pq} = 0 \text{ при } q > p, \quad (21)$$

существующая для любой положительной определенной матрицы полного ранга, и, следовательно, для матрицы  $\mathbf{R}_t$  (14). В этом случае вектор (20) равен

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{u}_i]_{i=1}^K = \\ &= \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \dots \\ \xi_{1K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{11} \cdot \mathbf{T}_a & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} \cdot \mathbf{T}_a & t_{22} \cdot \mathbf{T}_a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{K1} \cdot \mathbf{T}_a & t_{K2} \cdot \mathbf{T}_a & \dots & t_{KK} \cdot \mathbf{T}_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \dots \\ \xi_{2K} \end{bmatrix}, \quad (22) \end{aligned}$$

откуда следует, что  $i$ -й вектор формируемой выборки может рассчитываться по существенно более простой по сравнению с (20) формуле

$$\mathbf{u}_i = \xi_{1i} + \mathbf{T}_a \cdot \left( \sum_{\ell=1}^i t_{i\ell} \cdot \xi_{2\ell} \right) \sim CN(0, \mathbf{R}_{sp}), \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_{sp} = \overline{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i^*} = \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_a, \quad i \in 1, K,$$

связывающей искомые векторы с "корнями"  $\mathbf{T}_a$  и  $\mathbf{T}_t$  пространственной и временной КМ  $\mathbf{R}_a$  (12) и  $\mathbf{R}_t$  (14).

Первая из них легко находится из известного равенства для **КМ**  $v \geq 1$  внешних источников активных излучений, имеющей вид

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{F} \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}^*, \quad (24)$$

где  $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_v]$  –  $N \times v$  матрица,  $N$ -мерные столбцы которой представляют собой амплитудно-фазовое распределение (**АФР**) на апертуре АР излучений соответствующего источника,  $\mathbf{h} – v \times v$  взаимная **КМ** этих излучений.

В частном случае независимых **ШП** от различных источников матрица

$$\mathbf{h} = \text{diag}[h_\ell]_{\ell=1}^v \quad (25)$$

представляет собой диагональную матрицу относительных (по отношению к шуму каналов приема) мощностей внешних активных источников.

Очевидно, что "корнем" матрицы  $\mathbf{R}_a$  (24) может служить матрица

$$\mathbf{T}_a = \mathbf{F} \cdot \mathbf{h}^{1/2}, \quad \mathbf{h}^{1/2} \cdot \mathbf{h}^{(1/2)*} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_a^* = \mathbf{R}_a. \quad (26)$$

Перейдем теперь к заданию корня  $\mathbf{T}_t$  матрицы  $\mathbf{R}_t$  (14) для шумовых помех с гребенчатым частотным спектром.

#### 5. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СМЕСИ ШУМА И АКТИВНЫХ ПОМЕХ С ГРЕБЕНЧАТЫМ ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ

Теплицева матрица

$$\mathbf{R}_t = [\rho_{pq}]_{p,q=1}^K, \quad \rho_{pp} = 1, \quad p \in 1, K$$

полностью определяется своим первым столбцом – нормированной корреляционной последовательностью (**КП**) анализируемого процесса, образованной

отсчетами его корреляционной функции (**КФ**)  $r(\tau_i)$  в равноотстоящих точках  $\tau_i = i \cdot \Delta$  временной оси. Эта КФ полностью определяется энергетическим спектром  $c(f)$  анализируемой смеси, с которым она связана преобразованием Фурье

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} c(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df. \quad (27)$$

В качестве примера рассмотрим внешние шумовые помехи с "гребенчатым" спектром  $c(f)$  вида

$$c(f) = \sum_{k=-3}^4 \alpha_{k+4} \cdot s(f - k \cdot \Delta_\varphi), \quad (28)$$

образованным совокупностью из восьми взаимно смещенных по частоте на расстояние  $\Delta_\varphi = 0.5$  МГц прямоугольных "подспектров"  $s(f)$  шириной  $\delta_\varphi = 0.1$  МГц и амплитудой  $\alpha_{k+4}$  ( $k \in -3, 4$ ), "установленных" на равномерном спектре собственного шума каналов приема (рис. 6). Такой спектр был задан авторам Заказчиком одной из НИР.

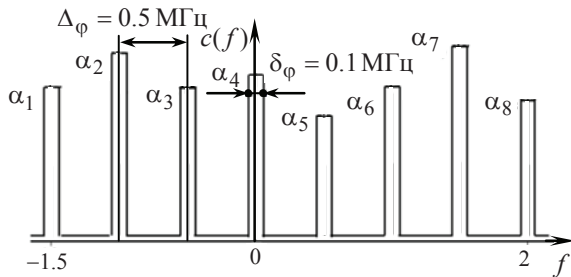


Рис. 6. Аппроксимация частотного спектра смеси шума и шумовых помех в каждом пространственном канале приема

В условиях (28) **КФ** (27) равна

$$r(\tau) = \sum_{k=-3}^4 \alpha_{k+4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(f - k\Delta_\varphi) \cdot e^{j2\pi f\tau} df = g(\tau) \cdot S(\tau), \quad (29)$$

где

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\varphi) \cdot e^{j2\pi\varphi\tau} d\varphi = 1 + \eta_1 \frac{\sin \pi\delta_\varphi\tau}{\pi\delta_\varphi\tau}, \quad (30a)$$

$$S(\tau) = \sum_{k=-3}^4 \alpha_{k+4} \cdot e^{j2\pi k\Delta_\varphi\tau}. \quad (30b)$$

В последней формуле  $\eta_1$  – отношение мощности каждого "подспектра" к единичной мощности шума в полосе  $F$ , равной полной ширине спектра активных излучений (в аппроксимации рис. 6  $F = 4$  МГц).

В условиях (30)

$$g(0) = 1 + \eta_1; \quad S(0) = s_0 = \sum_{k=1}^8 \alpha_k, \quad (31)$$

$$r(0) = g(0) \cdot S(0) = (1 + \eta_1) \cdot s_0 = 1 + \eta,$$

где  $\eta$  – отношение суммарной мощности всех "подспектров" активных излучений к той же единичной мощности шума.

Из последнего равенства следует, что заданное значение  $\eta$  обеспечивается выбором  $\eta_1$  из равенства

$$\eta_1 = \frac{1 + \eta}{s_0} - 1, \quad (32)$$

в силу которого из (29), (30) получим

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \left( 1 + \left( \frac{1 + \eta}{s_0} - 1 \right) \cdot \sin c(\pi\delta_\varphi\tau) \right) \cdot S(\tau), \\ \rho(\tau) &= \frac{r(\tau)}{r(0)} = \\ &= \frac{1}{1 + \eta} \cdot \left( 1 + \left( \frac{1 + \eta}{s_0} - 1 \right) \cdot \sin c(\pi\delta_\varphi\tau) \right) \cdot S(\tau), \\ \sin c(x) &= \sin(x)/x. \end{aligned} \quad (33)$$

Перейдем от нормированной **КФ** (29) к нормированной **КП** для набора значений общей ширины спектра

$$F_n = F/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

Такое преобразование фактически означает сжатие в  $n$  раз масштаба частотной оси на рис. 6, в результате которого ширина  $\delta_{\varphi n}$  каждого "подспектра" и расстояние  $\Delta_{\varphi n}$  между смежными "подспектрами" станут равными

$$\delta_{\varphi n} = \delta_\varphi/n, \quad \Delta_{\varphi n} = \Delta_\varphi/n, \quad (35)$$

но их относительные (по отношению к  $F_n$ ) значения останутся такими же, как и без сжатия масштаба ( $n = 1$ ). Для заданных параметров спектра (рис. 6)

$$\frac{\delta_{\varphi n}}{F_n} = \frac{\delta_\varphi}{F} = \frac{0.1}{4.0} = \frac{1}{40}, \quad \frac{\Delta_{\varphi n}}{F_n} = \frac{0.5}{4.0} = \frac{1}{8}. \quad (36)$$

Используя эти равенства, перепишем второе равенство в (2.33) в виде

$$\begin{aligned} \rho_n(\tau) &= \\ &= \frac{1}{1 + \eta} \cdot \left( 1 + \left( \frac{1 + \eta}{s_0} - 1 \right) \cdot \sin c \left( \pi \frac{\delta_{\varphi n}}{F_n} F_n \tau \right) \right) \cdot S_n(\tau) = \\ &= \frac{1}{1 + \eta} \cdot \left( 1 + \left( \frac{1 + \eta}{s_0} - 1 \right) \cdot \sin c \left( \frac{\pi}{40} \cdot \frac{F\tau}{n} \right) \right) \cdot S_n(\tau), \end{aligned} \quad (37)$$

$$S_n(\tau) = \sum_{k=-3}^4 \alpha_{k+4} \cdot \exp(j2\pi k \frac{\Delta_{\varphi n}}{F_n} F_n \tau) =$$

$$= \sum_{k=-3}^4 \alpha_{k+4} \cdot \exp\left(j \frac{2\pi k F \tau}{8 n}\right).$$

Отсчеты  $\rho_n(\tau)$ , определяющие нормированную **КП**, будем брать в моменты времени  $\tau = \tau_p$ , в которых произведение  $F \cdot \tau_p = p$  равно целым числам

$$p = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

В частности, коэффициенту корреляции смежных отсчетов ( $p=1$ ) соответствует момент времени  $\tau_1 = 1/F$ . При таком условии **КФ** (37) преобразуется в **КП**

$$\rho_n(p) = \frac{1}{1+\eta} \cdot \left(1 + \left(\frac{1+\eta}{s_0} - 1\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi p}{40 n}\right)\right) \cdot S_n(p), \quad (38)$$

$$S_n(p) = \sum_{k=-3}^4 \alpha_{k+4} \cdot \exp\left(j \frac{\pi k p}{4 n}\right), \quad s_0 = \sum_{k=1}^8 \alpha_k,$$

а элементы  $\rho_{pq}$  матрицы  $\mathbf{R}_t$  (14) равны

$$\rho_{pq}(n) = \rho_n(p - q), \quad p, q \in 1, K. \quad (39)$$

Чтобы завершить расчет матрицы  $\mathbf{R}_t$ , необходимо задать случайные значения множителей  $\alpha_k$ . Мы будем задавать их в виде

$$\alpha_k = 1 + \zeta_k, \quad \zeta_k \sim \operatorname{uniform}(-1/2, 1), \quad k \in 1, 8, \quad (40)$$

где  $\zeta_k$  – действительная случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $(-1/2, 1)$ . При таком задании максимально возможное значение  $\alpha_{k \max} = 2$  больше минимального значения  $\alpha_{k \min} = 1/2$  в 4 раза (на 6 дБ).

На рис. 7 показаны модули нормированных **КП** (38) смеси шума и внешних помех с **НЧС** (28) (рис. 6) при  $\eta = 10^5$  и интервале между смежными отсчетами  $\Delta = T_{\text{comp}} / n$  (4) при  $n=1$  и  $n=5$ .

Поведение этих **КП** легко объяснить, если учесть, что при имеющемся сравнительно малом разбросе значений  $\alpha_k$ , для которых можно допустить

приближения  $\alpha_k \approx 1, k \in 1, 8, s_0 = \sum_{k=1}^8 \alpha_k \approx 8$ , функция

$S_n(p)$  в (38) приближенно равна

$$S_n(p) \approx \frac{\sin\left(\frac{\pi p}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi p}{8 n}\right)} \cdot \exp\left(j \frac{\pi p}{8 n}\right), \quad (41a)$$

так что для модуля **КП** (38) в рассматриваемых условиях  $\eta = 10^5 \gg 1$  допустимо приближенное равенство

$$|\rho_n(p)| \approx \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi p}{40 n}\right) \cdot C_n(p) \right|, \quad (41b)$$

$$C_n(p) = \frac{1}{s_0} \cdot S_n(p) = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(\pi p / n)}{\sin(\pi p / (8n))}.$$

Функция  $C_n(p)$  периодична с периодом  $p = 8n$ . Точки  $p = 8 \cdot n \cdot k, k = \pm 0, 1, 2, \dots$  являются точками ее максимумов, равных единице.

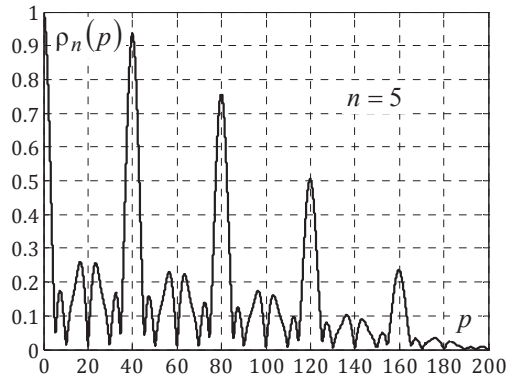
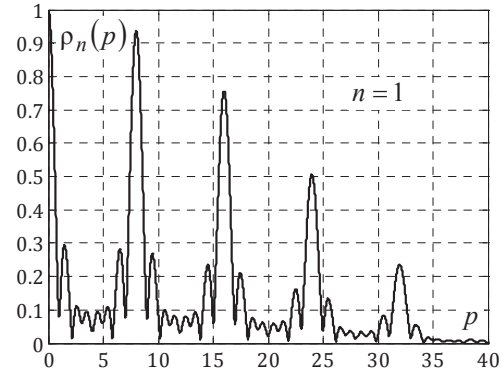


Рис. 7. Модуль **КП** (38) процессов с **НЧС** (28) при  $n=1$  и  $n=5$

По мере роста модуля  $k$  они уменьшаются в этих точках по закону  $\left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi p}{40 n}\right) \right| = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{5}\right) \right|$ . Уровни максимумов  $|\rho_n(p)|$  в диапазоне значений  $|k| \leq 5$  определяются значениями главного лепестка функции  $\operatorname{sinc}(x)$  в точках  $x = \frac{\pi}{5} k$ , при  $|k| > 5$  – значениями этой функции в зоне соответствующих боковых лепестков. Значения  $|\rho_n(p)|$  при целых значениях  $p$  в промежутках между точками максимумов лежат в пределах от нуля до 0.3.

На рис. 8 показано семейство модулей нормированной **КП**  $\rho_n(p)$  (38) при  $p \leq 10, \eta = 10^5$  и интервале между смежными отсчетами  $\Delta = T_{\text{comp}} / n$  (4) для набора значений  $n \in 1, 6$ . Цифрами указаны значения модуля коэффициента взаимной корреляции смежных ( $p=1$ ) отсчетов смеси шума и **ШПС** с **НЧС** (28).

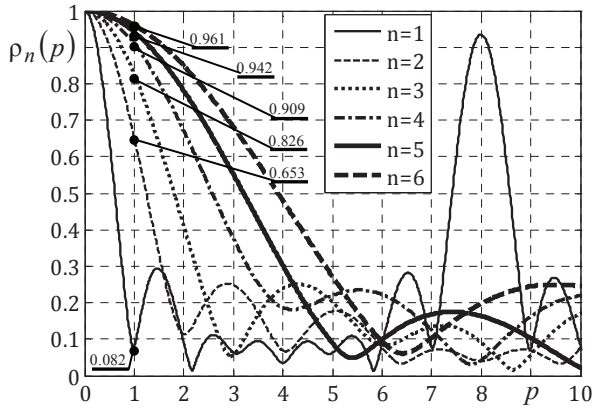


Рис. 8. Модули КП (38) процессов с НЧС (28) при  $n \in 1, 6$

Они количественно иллюстрируют естественный рост этого коэффициента при уменьшении временно-го интервала между смежными отсчетами стационарного процесса, в рассматриваемом случае – смеси шума и ШП с НЧС (28).

Эти свойства нормированной КП (38) используются ниже при анализе влияния неравномерности (гребенчатости) спектра мешающих излучений в каналах приема (временной корреляции мешающих излучений) на эффективность адаптивной пространственной обработки сигналов на их фоне.

### 6. ЭФФЕКТИВНОСТЬ АДАПТИВНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМОВЫХ ПОМЕХ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ

Оценим влияние неравномерности частотного спектра мешающих излучений внешних источников на эффективность адаптивной обработки полезных сигналов на их фоне. Это влияние оценим путем сравнения эффективности двух разновидностей адаптивной обработки

$$\begin{aligned} \varepsilon 1(K) &= \widehat{\mathbf{w}}1^*(K) \cdot \mathbf{y} = \sum_{\ell=1}^N \widehat{\mathbf{w}}1_{\ell}^*(K) \cdot y_{\ell}, \\ \varepsilon 2(K) &= \widehat{\mathbf{w}}2^*(K) \cdot \mathbf{y} = \sum_{\ell=1}^N \widehat{\mathbf{w}}2_{\ell}^*(K) \cdot y_{\ell} \end{aligned} \quad (42)$$

одного и того же проверяемого на наличие сигнала входного  $N$ -мерного вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y_{\ell}]_{\ell=1}^N = \mathbf{y}_{noise} + \mathbf{y}_{jam} + \beta \cdot \mathbf{x}(\alpha_s), \\ \mathbf{y}_{noise} &= [y_{\ell}^{(noise)}]_{\ell=1}^N \sim CN(0, \mathbf{I}_N), \\ \mathbf{y}_{jam} &= [y_{\ell}^{(jam)}]_{\ell=1}^N \sim CN(0, \mathbf{R}_a), \\ \beta &\sim CN(0, h_s) \end{aligned} \quad (43)$$

аддитивной смеси взаимно независимых  $N$ -мерных гауссовых комплексных векторов с нвсз собственного шума  $\mathbf{y}_{noise}$  каналов приема, мешающих излучений

внешних источников, а также пространственного когерентного сигнала  $\beta \cdot \mathbf{x}(\alpha_s)$  цели с направления  $\alpha_s$  со случайным гауссовым амплитудным множителем  $\beta$  с нулевым средним значением и относительной (по отношению к единичной дисперсии шума) дисперсией (мощностью)  $|\beta|^2 = h_s$ .

Алгоритмы (42) различаются весовыми векторами обработки  $\widehat{\mathbf{w}}1(K)$  и  $\widehat{\mathbf{w}}2(K)$ . **Первый** из них строится по формуле

$$\widehat{\mathbf{w}}1(K) = \widehat{\mathbf{R}}1^{-1}(K) \cdot \mathbf{x}(\alpha_s), \quad (44a)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}1(K) = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=1}^K \mathbf{u}1_i \cdot \mathbf{u}1_i^*, \quad \mathbf{u}1_i = \xi 1_i + \mathbf{T}_a \cdot \xi 2_i, \quad (44b)$$

$$\begin{aligned} \overline{\xi 1_i \cdot \xi 2_i^*} &= 0, \\ \overline{\mathbf{u}1_i \cdot \mathbf{u}1_j^*} &= \begin{cases} \mathbf{R}_{sp} = \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_a, & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in 1, K \end{aligned} \quad (44b)$$

**Второй** весовой вектор

$$\widehat{\mathbf{w}}2(K) = \widehat{\mathbf{R}}2^{-1}(K) \cdot \mathbf{x}(\alpha_s), \quad (45a)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}2(K) = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=1}^K \mathbf{u}2_i \cdot \mathbf{u}2_i^*, \quad (45b)$$

$$\mathbf{u}2_i = \xi 1_i + \mathbf{T}_a \cdot \left( \sum_{\ell=1}^i t_{i\ell} \cdot \xi 2_{\ell} \right),$$

$$\begin{aligned} \overline{\xi 1_i \cdot \xi 2_{\ell}^*} &= 0, \\ \overline{\mathbf{u}2_i \cdot \mathbf{u}2_j^*} &= \begin{cases} \mathbf{R}_{sp} = \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_a, & i = j, \\ \rho_{ij}(n) \cdot \mathbf{R}_a & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in 1, K. \end{aligned} \quad (45b)$$

В первом случае обучающую выборку образуют взаимно независимые векторы, тогда как во втором – взаимно коррелированные (зависимые).

В качестве критерия эффективности обработки будем использовать зависимость от объема выборки  $K$  отношений сигнал/помеха + шум (**ОСПШ**)

$$\widehat{\mu}1(K) = \frac{h_s \cdot |\widehat{\mathbf{w}}1^*(K) \cdot \mathbf{x}(\alpha_s)|^2}{\widehat{\mathbf{w}}1^*(K) \cdot \mathbf{R}_{sp} \cdot \widehat{\mathbf{w}}1(K) \cdot \mu_{max}}, \quad (46a)$$

$$\widehat{\mu}2(K) = \frac{h_s \cdot |\widehat{\mathbf{w}}2^*(K) \cdot \mathbf{x}(\alpha_s)|^2}{\widehat{\mathbf{w}}2^*(K) \cdot \mathbf{R}_{sp} \cdot \widehat{\mathbf{w}}2(K) \cdot \mu_{max}} \quad (46b)$$

на выходе адаптивных весовых сумматоров, реализующих обработку (42).

Зависимости (46) характеризуют важнейший параметр адаптивной системы обработки – ее быстродействие, мерой которого служит объем выборки  $K$ , при котором значения критериев (46) уступают не

больше допустимой величины (обычно – 3 дБ) их максимальному значению

$$\mu_{\max} = h_s \cdot \mathbf{x}^*(\alpha_s) \cdot \mathbf{R}_{sp}^{-1} \cdot \mathbf{x}(\alpha_s), \quad (47)$$

достижимому в гипотетических условиях известной пространственной **КМ**  $\mathbf{R}_{sp}$ , используемой в весовом векторе (44а) вместо оценочной **КМ**  $\hat{\mathbf{R}}_1(K)$  (44б).

На рис. 9 приведено семейство критериев (46) для  $N = 5$  – канальной линейной антенной решетки (**АР**), усредненных по 500 реализациям угловых положений четырех источников **ШП** с **НЧС** (28) (рис. 4) в каждом канале приема. Параметром семейства служит значение коэффициента сжатия  $n \geq 1$  исходного временного интервала

$$\Delta = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{2i+1} - \mathbf{u}_{2i} = T_{comp} = 1 / F_{comp}$$

между смежными обучающими выборками в интервал  $\Delta_n = T_{comp} / n$ .

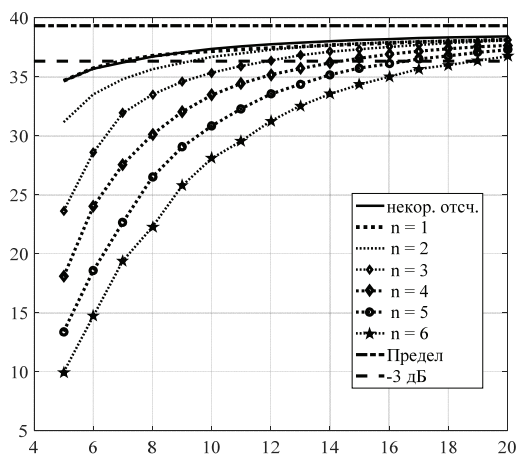


Рис. 9. Влияние корреляции обучающих векторов на быстродействие адаптивной обработки

Горизонтальная штрихпунктирная прямая характеризует максимальное **ОСПШ** (47) для сигнала единичной амплитуды, отраженного от точечной цели, расположенной в направлении нормали к апертуре **АР**. Штриховая горизонтальная прямая проходит ниже штрихпунктирной на 3 дБ. Сплошная кривая соответствует критерию  $\hat{\mu}1(K)$  (46), рассчитанному в условиях (44) отсутствия взаимной корреляции (44в) обучающих выборок. Различными пунктирными кривыми, проходящими ниже сплошной, показаны значения критерия  $\hat{\mu}2(K)$  (46) в условиях их взаимной корреляции  $\rho_{ij}(n) = \rho_n(i - j)$  (38), (39) при различных значениях  $n \in 1, 6$ .

Как показано еще в [4], при взаимно некоррелированных обучающих векторах вход в зону "3 дБ потеря" среднего значения критерия  $\hat{\mu}1(K)$  (46) обеспечивается выборкой объема  $K = 2 \cdot N - 3$ , который при  $N = 5$  равен  $K = 7$ , что полностью согласуется с ре-

зультатами математического эксперимента (см. сплошную кривую на рис. 9). При  $n = 1$  такой же выборки достаточно, чтобы в эту зону вошло значение  $\hat{\mu}2(K)$  (46). Этот результат вполне естественен, поскольку в этом случае большинство значений **КП**  $\rho_1(p)$  близко к нулю (см. рис. 7, 8, кривая  $n = 1$ ), так что в этом случае обучающие векторы могут считаться практически некоррелированными (независимыми).

По мере роста  $n$  (уменьшения временного интервала  $\Delta = T_{comp} / n$  между смежными обучающими векторами) быстродействие адаптивной обработки снижается (требующийся для вхождения в зону "3 дБ потеря" объем выборки  $K = K_n$  растет). Так, при  $n = 6$  он увеличивается до  $K = K_6 \approx 19$ , что почти втрое больше, чем при практически некоррелированных обучающих векторах.

Здесь проявляется хорошо известный из теории информации результат, в соответствии с которым количество информации о каком-либо явлении, полученное по  $K$  зависимым измерениям (наблюдениям), меньше полученного по  $K$  независимым. В последнем случае оно в  $K$  раз больше полученного по одному наблюдению, тогда как в случае полной зависимости (одинаковости результатов всех  $K$  наблюдений) оно не больше полученного по одному (любому) из них.

Заметим, что временной интервал  $T = T_n$ , в течение которого может быть набрана выборка объема  $K = K_n$ , необходимого для входа в зону "3 дБ потеря", равен  $T_n = (1/n) \cdot T_{comp} \cdot K_n$ . Он в  $\gamma_n = (T_1 / T_n) = n \cdot (K_1 / K_n)$  раз меньше временного интервала  $T_1 = T_{comp} \cdot K_1$  набора некоррелированных векторов, обеспечивающего тот же уровень потерь. В частности, при  $n = 6$  значение  $\gamma_6 \approx 2$ . Это означает, что режим " $n = 6$ " по сравнению с режимом " $n = 1$ " может обеспечить режим "3 дБ потеря" при примерно вдвое меньшем интервале временной стационарности **ШП** с **НЧС** (28) (рис. 6). Это важное достоинство режима " $n = 6$ " покупается, однако, ростом требований к производительности используемых вычислительных средств.

Значения параметра  $\gamma_n$  "экономии времени набора обучающей выборки" в общем случае зависит от **НЧС ШП** в каналах приема и выбранного значения  $n$ .

В качестве примера на рис. 10 и 11 приведены семейства **КП** процессов авторегрессии (**АР**-процессов) порядков  $p = 3$  и  $p = 5$  с унимодальными спектрами мощности и коэффициентами взаимной корреляции (обозначены как  $\rho(1)$ ) смежных векторов обучающей выборки, совпадающими с аналогичными

коэффициентами  $\rho_n(1)$  (38), (39) ШП с "гребенчатым" спектром (28) (рис. 6) при различных значениях  $n \in 1, 6$  (см. рис. 9). Отличия между ними сравнительно невелики и заметны только на низком уровне, в связи с чем небольшой должна быть и разница быстродействия адаптивной обработки (42), (45) на их фоне.

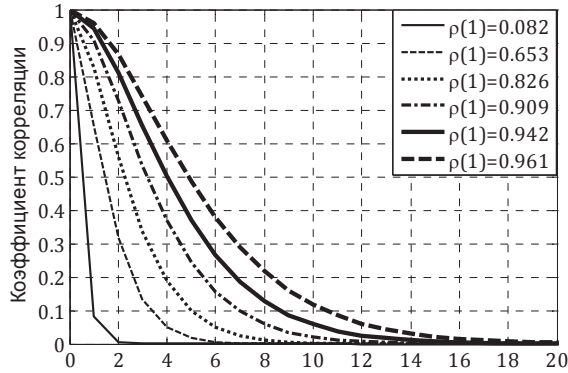


Рис. 10. Разность номеров обучающих векторов,  $p = 3$

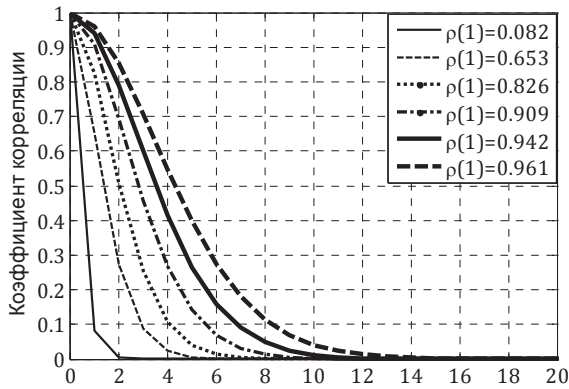


Рис. 11. Разность номеров обучающих векторов,  $p = 10$

Это подтверждают результаты непосредственно расчета критериев (46) для указанных выше процессов, приведенные на рис. 12. Видно, что быстродействие адаптивной обработки по этим критериям практически одинаково ( $K_1 = 7, K_6 \approx 19$ ) для всех упомянутых выше процессов, для которых в связи с этим достижима та же "экономия времени набора обучающей выборки"  $\gamma_6 \approx 2$ .

Эта "экономия" может увеличиваться при дальнейшем увеличении  $n$  (уменьшении временного интервала между смежными векторами обучающей выборки, увеличивающем коэффициент корреляции между ними).

Это наглядно видно из результатов расчета критерия  $\hat{\mu}_2(K)$  (46), приведенных на рис. 13. Здесь он рассчитан как для упомянутых выше процессов, так и для АР процесса порядка  $p = 1$  (с экспоненциальной КП) при значении  $n = 50$ , при котором коэффициент корреляции смежных векторов обучающей выборки  $\rho(1) = 0.9994$ .

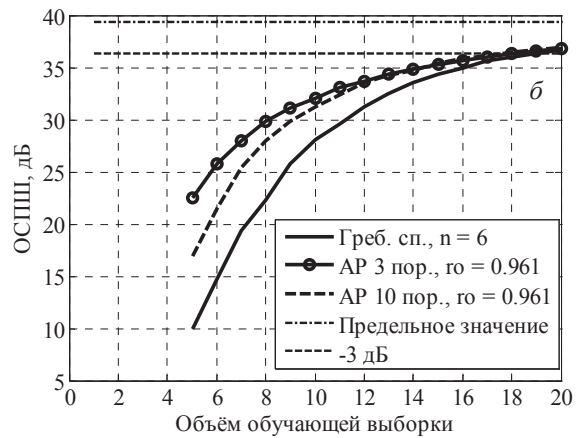
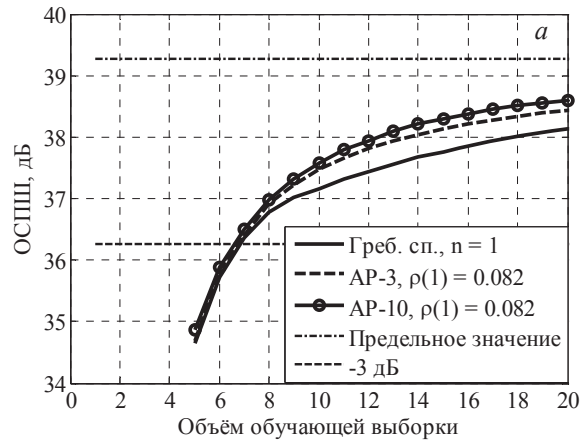


Рис. 12. Влияние корреляции обучающих векторов на быстродействие адаптивной обработки

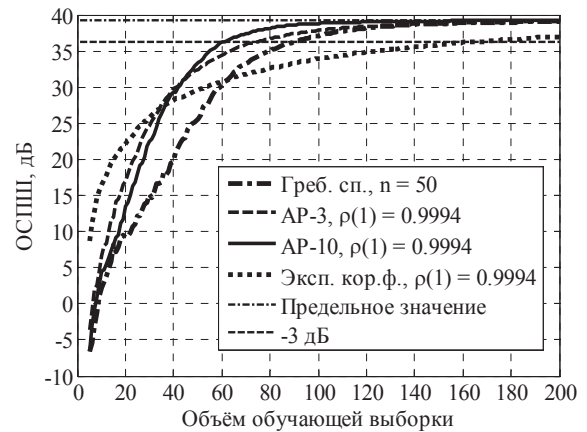


Рис. 13. Влияние корреляции обучающих векторов на быстродействие адаптивной обработки

Из анализа приведенных кривых следует, что параметр "экономии"  $\gamma_{50} = 5.8, 4.7, 4$  и  $2.3$  раза для процессов АР-10, АР-3, с "гребенчатым" спектром (28) (рис. 6) и АР-1 соответственно. Минимальное быстродействие в условиях АР-1 процесса связано с минимальной скоростью спадания его КП (рис. 14) с ростом разности номеров векторов обучающей выборки по сравнению со скоростью спадания КП остальных процессов, приведенных на рис. 8, 10, 11.

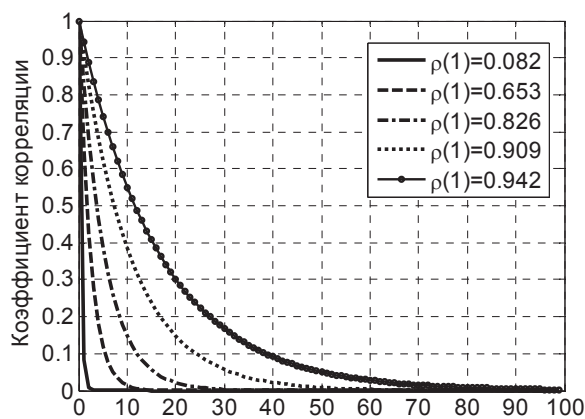


Рис. 14. Разность номеров обучающих векторов,  $p = 1$

Отметим еще раз, что указанная "экономия" порождает необходимость обрабатывать обучающие выборки, объем которых в  $n/\gamma_n$  раз больше, чем требуемый при  $n=1$  (при временном интервале  $\Delta = T_{comp} = 1/F_{comp}$  (4) между смежными векторами обучающей выборки).

Эта задача на сегодняшний день может быть неразрешимой, если весовые векторы (45) должны формироваться в каждом периоде зондирования, но вполне разрешимой, если они обновляются один раз за несколько интервалов зондирования ("замораживаются" на интервал межпериодной обработки), что часто используется в современных РЛС [5].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм моделирования  $N \times K$ -мерной выборки гауссовых шумовых помех с неравномерным частотным спектром (НЧС) на выходах  $N$  пространственных каналов приема в  $K$  дискретных эквидистантных моментах времени. В этом алгоритме  $i$ -й ( $i \in 1, K$ ) вектор выборки формируется путем

преобразования линейной комбинации  $\left( \sum_{\ell=1}^i t_{i\ell} \cdot \xi_{2\ell} \right)$

гауссовых взаимно независимых векторов белого шума  $\xi_{2\ell}$  ( $\ell \in 1, i$ ) в фильтре с матричной импульсной характеристикой, равной "корню"  $\mathbf{T}_a$  пространственной  $N \times N$  корреляционной матрицы (КМ)  $\mathbf{R}_a = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_a^*$  шумовых излучений внешних источников. Коэффициентами линейной комбинации выступают элементы  $t_{i\ell}$   $i$ -й ( $i \in 1, K$ ) строки нижней треугольной матрицы  $\mathbf{T}_t = [t_{i\ell}]_{i,\ell=1}^K$ , ( $t_{i\ell} = 0, \ell > i$ ) – корня теплицевой матрицы  $\mathbf{R}_t = \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{T}_t^*$  коэффициентов корреляции векторов формируемой выборки, зависящей от частотного спектра мощности шумовых излучений внешних источников в пространственных каналах приема.

Для введенной аппроксимации (28) (рис. 6) заданного "гребенчатого" спектра мощности найдена

корреляционная последовательность (КП) (38), полностью определяющая матрицу  $\mathbf{R}_t$  и, тем самым, корень  $\mathbf{T}_t$  из нее. Рассчитаны графики КП при различных значениях временного интервала  $\Delta_n = T_{comp} / n$  (4) между векторами формируемой выборки (рис. 7, рис. 8); продемонстрированы их особенности, порожденные спецификой использованной аппроксимации заданного "гребенчатого" спектра мощности.

Исследовано влияние неравномерности частотного спектра мешающих излучений в пространственных каналах приема на эффективность (быстродействие) адаптивной обработки (42) – (45) на их фоне сигналов нешумящих точечных целей.

Основной результат этого исследования заключается в том, что при выборе временного интервала между смежными векторами обучающей выборки  $\Delta > T_{comp} = 1/F_{comp}$ , где  $F_{comp}$  – ширина частотного спектра мешающих излучений в пространственных каналах приема, характер неравномерности (форма) этого спектра не имеет никакого значения – быстродействие адаптивной обработки остается таким же, как и при равномерном спектре мешающих излучений в пространственных каналах приема. Этот результат физически очевиден – при этом условии векторы обучающей выборки взаимно некоррелированы, т.е. удовлетворяют тому же условию (44в), которому они удовлетворяют при равномерном частотном спектре мешающих излучений в пространственных каналах приема.

Неравномерность частотного спектра влияет на быстродействие адаптивной обработки (42) – (45) при временном интервале между смежными векторами обучающей выборки  $\Delta_n = T_{comp} / n < \Delta_1 = 1/F_{comp}$ , при котором обучающие выборки становятся взаимно коррелированными. При любых значениях  $n > 1$  быстродействие адаптивной обработки снижается (требования к объему  $K$  обучающей выборки, обеспечивающему вход в зону "3 дБ потерь", растут), однако степень снижения быстродействия зависит от значения  $n > 1$  и формы частотного спектра.

Требования к объему  $K$  обучающей выборки тем выше, чем шире КП процесса с соответствующим спектром. Из рассмотренных их разновидностей эти требования наиболее велики при самой широкой из них экспоненциальной КП (рис. 13).

Показано, что при  $n > 1$  время набора обучающих выборок увеличенного объема  $K = K_n$  с временным интервалом  $\Delta_n = T_{comp} / n$  между смежными векторами, который требуется для входа в зону "3 дБ потерь", может быть в  $\gamma_n = n \cdot (K_1 / K_n)$  раз меньше, чем время набора выборок меньшего объема  $K = K_1$  при временном интервале  $\Delta_1 = T_{comp}$  между ее смежными векторами. В частности, для процессов с нерав-

номерными спектрами значение  $\gamma_n$  при  $n = 50$  лежит в пределах от 5.8 до 2.3 раз. Такая "экономия" времени набора обучающей выборки позволяет рассчитывать на более эффективную адаптивную обработку в условиях мешающих излучений с меньшим интервалом временной стационарности.

Однако для реализации этого резерва требуется обрабатывать обучающие выборки, объем которых в  $n/\gamma_n$  раз больше, чем требуемый при  $n=1$  (при временном интервале  $\Delta = T_{comp} = 1/F_{comp}$  (4) между смежными векторами обучающей выборки). Эта задача на сегодняшний день может быть неразрешимой, если весовые векторы (45) пространственной обработки должны формироваться в каждом интервале зондирования, но вполне разрешимой, если они обновляются один раз за несколько интервалов зондирования ("замораживаются" на интервал между периодической обработкой) для того, чтобы предотвратить междупериодную декорреляцию пассивных помех, обусловленную междупериодными флуктуациями случайного весового вектора пространственной обработки.

#### Литература

- [1] Леховицкий Д. И. Эффективность пространственной обработки сигналов при временной корреляции обучающих выборок / Д. И. Леховицкий, И. Д. Раков // Радиоэлектроника. — 1986. — №9. — С. 60–63.
- [2] Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М.: Наука, Главная ред. физико-математической литературы, 1984. — 320 с.
- [3] Беллман Р. Введение в теорию матриц / Пер. с англ. под ред. Лидского В. Б. — М.: Наука. — 1976. — 367 с.
- [4] Reed I. S. Rapid Convergence Rate in Adaptive Arrays / I. S. Reed, J. D. Mallett and L. E. Brennan // IEEE Transactions on Aerospace Electronic System. — November 1974. — Vol. AES-10. — P. 853–863.
- [5] Рябуха В. П. Оценка интервала фиксации пространственного весового вектора при последовательной пространственно-временной обработке сигналов на фоне комбинированных помех / В. П. Рябуха, Д. С. Рачков, А. В. Семеняка, Е. А. Катюшин // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2012. — Т. 55, № 10. — С. 25–34.

Поступила в редколлегию 28.05.2018



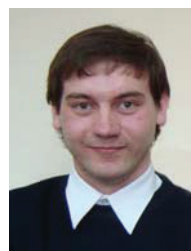
**Рябуха Вячеслав Петрович**, кандидат технических наук, доцент, заместитель начальника отделения Государственного предприятия «Научно-исследовательский институт радиолокационных систем «Квант-Радио-локация». Область научных интересов – радиолокационные системы, обнаружение и измерение параметров сигналов на фоне помех.



**Цисарж Вячеслав Викторович**, кандидат технических наук, заместитель директора по науке Государственного предприятия «Научно-исследовательский институт радиолокационных систем «Квант-Радио-локация». Область научных интересов – радиолокационная системотехника, интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации.



**Семеняка Андрей Викторович**, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Государственного предприятия «Научно-исследовательский институт радиолокационных систем «Квант-Радио-локация». Область научных интересов – унифицированные процессоры и системы адаптивной обработки сигналов на фоне помех.



**Катюшин Евгений Анатольевич**, научный сотрудник Государственного предприятия «Научно-исследовательский институт радиолокационных систем «Квант-Радио-локация». Область научных интересов – моделирование адаптивных систем пространственно-временной обработки сигналов на фоне помех.

УДК 621.396.965:621.391.26

Рябуха В. П. **Модель гауссовых шумовых завад з нерівномірним частотним спектром і оцінка ефективності завадозахисту** / В. П. Рябуха, В. В. Цисарж, А. В. Семеняка, Е. А. Катюшин // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 3–13.

Стаття присвячена розробці алгоритму моделювання вибірки гауссових шумових завад з нерівномірним, зокрема гребінчастим, частотним спектром на виходах просторових каналів приймання у дискретних моментах часу й оцінці впливу нерівномірності частотного спектра шумових випромінювань зовнішніх джерел на ефективність адаптивної обробки сигналів на їх фоні.

**Ключові слова:** математична модель, шумові завади, нерівномірний частотний спектр, вхідна (навчача) вибірка, кореляційна матриця (послідовність), відношення сигнал/(завада + шум).

Лл. 14. Бібліогр.: 5 найм.

UDC 621.396.965:621.391.26

Riabukha V. P. **Model of nonuniform gaussian noise jamming and assessment of jamming-protection effectiveness** / V. P. Riabukha, V. V. Tsarszh, A. V. Semenyaka, E. A. Katyushin // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17, № 1, 2. – P. 3–13.

The article deals both with the development of an algorithm for modelling samples of Gaussian noise jamming with a nonuniform, in particular, comblike, spectrum at the outputs of spatial receiving channels at discrete time instants and with assessment of the influence of the external source interfering noise radiation frequency spectrum nonuniformity on the effectiveness of adaptive processing of signals against the background of noise jamming.

**Keywords:** mathematical model, noise jamming, nonuniform frequency spectrum, input (training) sample, correlation matrix (sequence), signal-to-jamming-plus-noise ratio.

Fig. 14. Ref.: 5 items.

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРАХ ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ

К. А. ЛУКИН

---

Предложен и обоснован новый подход к решению задач возбуждения открытых резонаторов (ОР) внутренними источниками. На основе спектральной теории двухмерного ОР с идеально проводящими цилиндрическими зеркалами выписано выражение для полной функции Грина ОР, с помощью которой получены уравнения, описывающие комплексные амплитуды резонансных мод и, вместе с тем, позволяющие оценить нерезонансное излучение источника из ОР. Установлена общая структура и характер зависимости нерезонансной части функции Грина в окрестности отдельного резонанса от частоты возбуждения и добротности этого колебания. Аналогичный подход к решению задач возбуждения развит и для квазиоптических ОР, описываемых интегральными уравнениями Фредгольма. Показан формальный переход к формулам известной теории возбуждения ОР. Получены и изучены уравнения баланса мощностей для ОР с внутренним источником. Получены уравнения для медленно меняющихся амплитуд резонансных мод, пригодные для описания одномодовых и многомодовых автоколебаний в генераторах с ОР. Приведены примеры решения конкретных задач с помощью предложенного подхода.

*Ключевые слова:* открытый резонатор (ОР), резонансные моды ОР, нерезонансное излучение источника из ОР.

### ВВЕДЕНИЕ

Основная трудность построения теории возбуждения открытых резонаторов (ОР) произвольными источниками состоит в том, что в отличие от объемных резонаторов, для них не существует нормальных мод, образующих полную систему собственных функций дискретного спектра, и, следовательно, представлений возбуждаемого поля в виде суперпозиции этих мод с коэффициентами, вычисляемыми через токи источников. С физической точки зрения это обусловлено тем, что помимо дифракционных потерь энергии резонансных мод в ОР всегда существует нерезонансное излучение источника, не связанное с возбуждением этих мод. В данной работе на примере двухмерного ОР с идеально проводящими цилиндрическими зеркалами сформулирован новый подход к решению задачи возбуждения ОР, который позволяет преодолеть указанную трудность. По-сути, он представляет собой обобщение строгой теории возбуждения двухмерных ОР [1, 2] на случай распределенных источников. Используя результаты строгой спектральной теории ОР [2, 3], в полном решении, выражаемом через функцию Грина рассматриваемого ОР, выделены резонансные слагаемые, отвечающие его резонансным модам, и показан формальный переход к формулам известной теории возбуждения ОР [4], если пренебречь мощностью нерезонансного излучения. Кроме того, удалось выяснить общую структуру и характер зависимости нерезонансной части функции Грина в окрестности отдельного резонанса от частоты возбуждения и добротности этого колебания. Аналогичный подход к решению рассматриваемой задачи

развит и для квазиоптических ОР, описываемых интегральными уравнениями типа уравнений Фредгольма [5]. Кроме того, получены нестационарные уравнения для медленно меняющихся полей, а также получены и рассмотрены уравнения баланса мощностей для ОР с внутренним источником. Приведены примеры решения конкретных задач с помощью предложенного подхода.

Возбуждение электромагнитных колебаний внешними источниками с учетом обратного влияния поля описывается системой уравнений, состоящей из линейных уравнений Максвелла и нелинейных уравнений движения носителей зарядов, образующих токи источника. При возбуждении колебаний электронными потоками, уравнения движения представляют собой второй закон Ньютона, где в качестве силы выступает сумма сил Кулона и Лоренца. В настоящее время известны два общих подхода к решению задач такого класса. Первый из них заключается в том, что плотность тока и заряда выражают в явном виде (если это возможно) через характеристики поля или ограничиваются учетом первых нелинейных слагаемых в их зависимости от амплитуды поля. В результате получают нелинейные, или квазилинейные, дифференциальные уравнения в частных производных относительно компонент поля. Необходимость решения таких уравнений возникает в тех случаях, когда нелинейная среда заполняет все пространство, в котором анализируются излучаемые поля, например, в плазме или при распространении интенсивных пучков света в кристаллах и т.п. Если рассматриваемая задача сводится к определенному классу нелинейных уравнений (нелинейные уравнения Шредингера, уравнение Кор-

тевега де Фриза, *Sin*-Гордон и т.п., нелинейную задачу удается решить в рамках строгого метода обратной задачи рассеяния [6].

Если излучаемые поля покидают объем, занимаемый источником, то в решении нелинейных задач возбуждения оказывается предпочтительным второй подход, опирающийся на физическую природу явлений возбуждения полей заряженными частицами. Он состоит в поэтапном решении уравнений Максвелла и уравнений движения: вначале решаются линейные уравнения Максвелла при заданных токах, затем нелинейные уравнения движения носителей зарядов в заданных полях и т.д.

Поясним сказанное на простом примере. Рассмотрим излучение движущегося электрона с учетом обратного влияния поля (за счет его отражения от какого-либо объекта) на его движение. Здесь возможны две постановки задачи. В первой мы считаем, что электрон давно излучает, а поле давно существует и действует на него. Во втором случае полагаем, что вначале излучаемого поля нет, оно появляется лишь после того, как электрон начал двигаться. В первом случае мы, по сути, предполагаем, что существует установившийся процесс излучения и взаимодействия, а во втором – что имеет место начало и установление процесса излучения при взаимодействии электрона с полем. Во втором случае будем иметь дело с поэтапным решением поставленной задачи. Вначале на некотором конечном отрезке времени определяем движение электрона по заданным начальным характеристикам поля, затем вычисляем поля при найденном законе движения, вновь находим уточненный закон движения и т.д. Если условия задачи допускают наличие установившегося движения, то такая процедура будет сходиться. По-сути, это численное моделирование реального процесса. Если исходные уравнения верны и задача в целом корректна по Адамару, то, выбрав правильный шаг итерации, мы получим правильный результат.

В рамках поэтапного подхода малая плотность токов источника позволяет построение самосогласованной теории возбуждения колебаний в резонансных системах разделить на три относительно самостоятельных этапа:

- а) развитие спектральной теории рассматриваемых резонаторов;
- б) построение конструктивного решения задачи возбуждения в них электромагнитного поля заданными токами и установление его связи с решением спектральной задачи;
- в) определение зависимости (в общем случае нелинейной) тока источника от электродинамических характеристик возбуждаемых полей.

Для закрытых резонансных систем – объемных резонаторов – теория возбуждения имеет наглядную физическую и элегантную математическую форму благодаря замечательным свойствам самосогла-

женных операторов, порождаемых данной краевой задачей (например, [7, 8, 9]). Отметим, что работа [9] выполнена в рамках теории нестационарных операторных уравнений с использованием ортогонального разбиения Вейля для Гильбертовых функциональных пространств, что позволило закрыть все вопросы математического обоснования, обобщить полученные ранее результаты на случай изменения параметров среды, заполняющей резонатор, во времени и пространстве.

При построении теории возбуждения открытых резонансных систем, возникают существенные математические трудности, обусловленные, во-первых, отсутствием последовательной спектральной теории открытых резонаторов (ОР) и, во-вторых, недостаточной изученностью свойств несамосопряженных операторов, порождаемых краевыми задачами для ОР, в частности, отсутствием теории о спектральном разложении таких операторов.

В монографии [4] теория возбуждения ОР внешними источниками строится по аналогии со случаем объемных резонаторов с учетом специфики внешних задач электродинамики, заключающейся в предположении наличия наряду с дискретным еще и непрерывного спектра собственных частот. Искомое поле представляется в виде разложения по собственным функциям непрерывного спектра, вводимым как решения соответствующей спектральной задачи. Благодаря ортогональности этих функций удастся получить уравнения, связывающие коэффициенты разложения с функцией источника. Если эти коэффициенты имеют полюса в нижней полуплоскости спектрального параметра  $k$ , то из выражения для полного поля выделяется дискретный набор слагаемых, которые описывают режимы резонансного возбуждения колебаний в ОР. Даже если оставить в стороне вопросы математического обоснования, то, тем не менее, теория [4] обладает присущим ей недостатком, который не позволяет решать задачи возбуждения колебаний в ОР с учетом нерезонансного излучения источника. Это связано с тем, что нерезонансное излучение вычисляется через функции непрерывного спектра, которые, однако, введены чисто формально (это отмечено и в [4] на с. 358) и для реальных ОР их построить не удастся, а, следовательно, не удастся рассчитать в нерезонансное излучение из ОР<sup>1</sup>. Поэтому, при анализе вынужденных колебаний и конкретных ОР обычно ограничиваются анализом лишь резонансной части возбуждаемого поля. Для этого используют собственные функции, найденные в результате решения спектральной задачи, по постановке принципиально отличающейся от той, которая использовалась для построения собственных функций непрерывного

<sup>1</sup> Строго говоря, эти функции можно построить численно. Однако, теория [4] при этом теряет свою наглядность и становится неэффективной, т.к. в этом случае проще искать полное решение без разложения по собственным функциям непрерывного спектра.

спектра. (Отличие заключается в формулировке условия поведения собственных полей на бесконечности). Используемые на практике собственные функции описывают поле лишь внутри резонансного объема, который ограничен зеркалами и каустическими поверхностями. Все это приводит к тому, что, при решении конкретных задач, возбуждение полей в ОР анализируется точно так же, как и в закрытых резонаторах. Отличие состоит лишь в учете дополнительных дифракционных потерь и пространственной структуры поля резонатора. (Этим приближением мы тоже будем пользоваться).

Другой подход в построении теории возбуждения ОР заданными токами, позволяющий учитывать потери источника на нерезонансное излучение, основывается на применении хорошо развитых строгих [10, 11] и приближенных [5, 14] методов теории дифракции.

Вначале рассмотрены двумерные ОР, образованные дугами тонких круговых цилиндров, которые могут располагаться на любом расстоянии друг от друга и иметь произвольные волновые размеры. В этом случае удастся поставить и решить спектральную задачу математически корректно [1, 2] и с помощью функции Грина [10, 11] построить решение задачи возбуждения ОР, а также установить их взаимосвязь.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

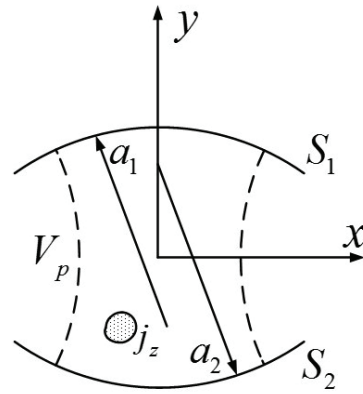
Сформулируем математическую постановку задачи возбуждения двумерного ОР заданным источником, ориентируясь на последующее решение самосогласованного варианта задачи в рамках поэтапного подхода [15, 16].

В случае периодических колебаний тока источника с постоянной амплитудой и частотой, его плотность можно представить в виде соответствующего ряда Фурье. Из-за резонансного характера возбуждения колебаний в ОР достаточно ограничиться учетом только одного (резонансного) члена этого ряда и перейти к Фурье-гармоникам тока и поля. Для краткости изложения будем параллельно рассматривать возбуждение колебаний электрическими и магнитными источниками. При этом описание электромагнитного поля удобно проводить с помощью электрического  $\vec{\Pi}^e$  и магнитного  $\vec{\Pi}^m$  векторов Герца, которые подчиняются уравнениям:

$$\Delta \vec{\Pi}_\omega^{e(m)} + k^2 \vec{\Pi}_\omega^{e(m)} = -i \frac{4\pi}{\omega} \vec{j}_\omega^{e(m)}, \quad (1)$$

вытекающим из уравнений Максвелла. Здесь  $\vec{j}_\omega^{e(m)}$  – Фурье-образ плотности электрического или магнитного тока источника;  $k = \omega/c$ ,  $c$  – скорость света.

Следуя работе [2] двумерный ОР, образованный двумя бесконечно тонкими цилиндрическими экранами  $S_1$  и  $S_2$  (рис.1), возбуждается электрическим или



$a_1$  и  $a_2$  – радиусы кривизны зеркал  $S_1$  и  $S_2$

Рис. 1. Открытый резонатор, образованный двумя цилиндрическими зеркалами

магнитным током с единственной ненулевой  $Z$  – компонентой  $j_z^{e(m)}$ . В этом случае в ОР будет возбуждаться Е- или Н-колебание с отличными от нуля продольными компонентами электрического или магнитного поля, соответственно.

При этом  $H_z = k^2 \Pi_z^m$  и  $E_z = k^2 \Pi_z^e$ . Это позволяет ограничиться рассмотрением скалярного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U(x, y) + k^2 U(x, y) = -j_\omega(x, y). \quad (2)$$

Здесь введены обозначения:

$$U = \Pi_z^e; j_\omega = i \frac{4\pi}{\omega} j_z^e \text{ – для Е-колебаний,} \quad (3)$$

$$U = \Pi_z^m; j_\omega = i \frac{4\pi}{\omega} j_z^m \text{ – для Н-колебаний.} \quad (4)$$

Искомая функция  $U(x, y)$  должна удовлетворять краевым условиям на зеркалах  $S_1$  и  $S_2$ :

$$U|_{S_1 \cup S_2} = 0 \text{ – для Е-колебаний,} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}|_{S_1 \cup S_2} = 0 \text{ – для Н-колебаний.} \quad (6)$$

( $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности зеркал); условию конечности энергии поля в ограниченном объеме  $\Omega$ , (условию типа Мейкснера):

$$\int_\Omega (k^2 |U|^2 + |\nabla U|^2) d\Omega < \infty, \quad (7)$$

условию уходящего излучения [17,1,2]:

$$U(x, y) = \sum_n a_n H_n^{(1)}(kr) \exp(in\varphi), \quad (8)$$

для достаточно больших  $|kr|$ :

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}; \cos \varphi = \frac{x}{r}; \sin \varphi = \frac{y}{r};$$

$H_n^{(1)}(\dots)$  – функция Ханкеля первого рода  $n$ -го порядка.

Условие (8) получило название условия уходящего излучения (или условие Рейнхарта), поскольку оно означает, что при решении спектральной задачи поле собственных колебаний на бесконечности должно иметь вид суперпозиции расходящихся цилиндрических волн, уносящих энергию поля. Нетрудно видеть, что при  $|kr| \rightarrow \infty$ ,  $E \sim e^{ikr} / r^{1/2}$  и, следовательно, при действительных значениях  $k$  условие (8) эквивалентно условию излучения Зоммерфельда.

При произвольной функции источника искомое решение удобно представить с помощью функции Грина поставленной задачи:

$$E(x, y) = \iint G(x, y, x_0, y_0) j_\omega(x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (9)$$

Целью дальнейшего рассмотрения является построение функции Грина  $G(x, y, x_0, y_0)$ , которая давала бы решения задачи (5)–(8), а также описание постановки и решения спектральной задачи для рассматриваемых ОР [1, 2].

## 2. ФУНКЦИЯ ГРИНА, РЕЗОНАНСНЫЕ ПОЛЯ И НЕРЕЗОНАНСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Поместим исследуемый ОР в среду с поглощением ( $\text{Im} \varepsilon > 0$ ,  $\text{Im} \mu > 0$ ) и введем обозначение  $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$ , где  $\varepsilon$  и  $\mu$  диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, соответственно. Тогда функция Грина является решением уравнения

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (10)$$

которая удовлетворяет условиям типа (6)–(8) и условию на бесконечности  $G(x, y, x_0, y_0) \rightarrow 0$ . Функция

Грина ищется в виде  $G = G_0 + G_1$ , где  $G_0 = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \times (k | r - r_0 |)$ , а  $G_1$  – удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и неоднородному краевому условию на зеркалах  $G_1 = -G_0$ . Определение  $G_1$  с помощью метода задачи Римана-Гильберта [10] сводится к решению системы линейных операторных уравнений второго рода, имеющих вид [11, 12]:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{11}(k) & A^{12}(k) \\ A^{21}(k) & A^{22}(k) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$z^j = (z_n^j)_{n=-\infty}^{+\infty}$  – неизвестные коэффициенты разложения функции  $G_1$  в ряд Фурье по угловой координате  $\varphi_j$  локальной системы координат, связанной с

зеркалом  $S_j$ ;  $b^j = (b_n^j(x_0, y_0))_{n=-\infty}^{+\infty}$  – аналогичные коэффициенты разложения функции точечного источника, зависящие от его координат  $x_0, y_0$ . Через

$A^{ij}(k)$  обозначены матричные оператор-функции, аналитически зависящие от частоты источника и действующие в гильбертовом пространстве бесконечных числовых последовательностей:

$$l_2 = \left\{ (z_n)_{n=-\infty}^{+\infty} : \sum_n |z_n|^2 < \infty \right\};$$

$A^{ij}(k): l_2 \rightarrow l_2$ . Явный вид  $A^{ij}(k)$  приведен в [160].

При  $\text{Im} k > 0$  для любых  $b^j \in l_2$  решение системы уравнений (11) существует и единственно [11]. Необходимое нам решение для действительных частот ( $\text{Im} k = 0$ ) понимается как предел:  $G_1(k)$  при  $\text{Im} k \rightarrow 0 + 0$ .

Для наглядного представления функции Грина воспользуемся тем, что матричный оператор в (11) является ядерным:  $\sum_n A_n^{ij}(k) < \infty$  [18]. Ядерные мат-

ричные операторы обладают многими свойствами конечномерных операторов. В частности, они допускают введение бесконечных определителей аналогичных определителям конечномерных матричных операторов и, следовательно, решение уравнений вида (11) по правилу Крамера:

$$z_n^i(x_0, y_0) = D_n(k, b^1, b^2) / D(k),$$

где  $D_n(k, b^1, b^2)$  – определитель, получаемый из определителя  $D(k)$  оператора (11) при замене элементов  $n$ -го столбца соответствующим столбцом свободных членов  $b^1, b^2$ . Тогда:

$$G(k, x, y, x_0, y_0) = G_0(\dots) + \sum_{j=1}^2 \sum_n \frac{D_n(k, b^1, b^2)}{D(k)} G_n^j(k, x, y) \quad (12)$$

где

$$G_n^j(k, x, y) = e^{i n \varphi_j} \begin{cases} J_n(ka_j) H_n^{(1)}(kr_j), r_j > a_j; \\ H_n^{(1)}(ka_j) J_n(kr_j), r_j \leq a_j. \end{cases}$$

Из (9) и (12) видно, что построенная функция Грина дает требуемое поведение поля на бесконечности, удовлетворяющее условию (8). При аналитическом продолжении функции Грина на нижнюю полуплоскость ее полюсы будут определяться нулями определителя (детерминанта)  $D(k)$ .

Задача о спектре собственных колебаний, рассматриваемого ОР, состоит в определении значений спектрального параметра  $k$  ( $k = \omega_0 / c$ ;  $\omega_0$  – собст-

венная частота ОР), при которых существует нетривиальное решение однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям (6)–(8). Условие (8) является естественным обобщением условия Зоммерфельда на случай комплексных частот, т.к. в ОР собственные частоты являются комплексными. Оно не требует интегрируемости собственных функций во всем пространстве, а лишь определяет их асимптотику на достаточно больших расстояниях. При этом решение поставленной задачи ищется не в классе квадратично интегрируемых функций, а в классе функций, локально принадлежащих пространству Соболева (см. (7)). Зависимость решения  $E_0(k, x, y)$  от комплексного спектрального параметра  $k$  рассматривается на основном листе поверхности Римана логарифмической функции  $Ln(k)$ .

Используя метод задачи Римана-Гильберта, можно показать [1,2], что сформулированная спектральная задача эквивалентна задаче о характеристических числах канонической Фредгольмовой оператор-функции, которая аналитически зависит от  $k$  и имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} I - A^{11}(k) & -A^{12}(k) \\ -A^{21}(k) & I - A^{22}(k) \end{matrix} \right\|: l_2 \times l_2 \rightarrow l_2 \times l_2, \quad (13)$$

где  $I$  – тождественный оператор.

Оператор-функции  $A^{ij}(k): l_2 \rightarrow l_2$  совпадают с соответствующими оператор-функциями в (11).

Из спектральной теории ядерных оператор-функций в гильбертовых пространствах [18] следует, что множество характеристических чисел оператор-функции (13), а значит и спектр резонансных частот ОР,  $\sigma(\Delta)$ , является дискретным, конечно-кратным и лежит в области с  $\text{Im}k < 0$ . Единственной точкой сгущения для множества  $\sigma(\Delta)$  является бесконечно удаленная точка  $|k| \rightarrow \infty$ . Кроме того, спектр собственных частот совпадает с нулями определителя  $D(k)$  матричной оператор-функции (13). Каждому собственному значению  $k_s \in \sigma(\Delta)$  соответствует собственная функция  $g_s \in \sigma(\Delta)$ , описывающая поле не только внутри резонансного объема, но и во всем пространстве. Собственные функции в данном случае строятся численно, причем их нормировка может осуществляться так же, как и в [4].

Отметим, что эти результаты получены впервые в [1, 2, 3] для случая строгого решения краевой задачи. Если же оператор краевой задачи заменяется приближенным, то в общем случае задачу следует решать заново. Вместе с тем, полученные результаты хорошо согласуются с известными приближенными решениями спектральной задачи: известная работа Фокса и Ли [14] и квазисобственные моды в [4]. Более того, спектр двумерного ОР, рассчитанный по алгоритмам

строгой спектральной теории ОР, неплохо аппроксимируется приближенными решениями [4], хотя последние и не описывают всех особенностей спектра ОР, например, междутиповую связь мод ОР [1, 3].

Построенная функция Грина позволяет рассчитывать полное поле, возбуждаемое источником. Наличие в системе даже относительно слабых резонансов позволяет в полном поле выделить резонансные поля, интенсивность которых тем выше, чем ближе частота источника к реальной части собственной частоты и чем больше добротность резонанса. Математически такое разбиение становится возможным благодаря мероморфности построенной функции Грина на Римановой поверхности функции  $Ln(k)$ . Покажем, что представление функции Грина в виде суммы резонансных слагаемых, каждое из которых отвечает собственной частоте ОР, и интегрального члена, который вместе с функцией Грина свободного пространства описывает нерезонансное излучение, можно получить с помощью теоремы Коши о вычетах. Из выражения (12) видно, что при аналитическом продолжении функции Грина в нижнюю полуплоскость эта функция имеет особенности типа полюса в точках  $k_s$ , совпадающих с нулями детерминанта  $D(k, k_s)$ , т.е. со спектром резонансных частот ОР.

Используя теорему Коши о вычетах и мероморфность построенной функции Грина, её можно представить в виде суммы резонансной и нерезонансной частей, причём первая из них полностью определяется решением спектральной задачи и выражается через собственные функции  $g_s(k_s, x, y)$ , отвечающие полюсам  $k_s$ . Действительно, проведём на основном листе поверхности Римана контур  $c$ , который охватывает интересующую часть спектра резонансных частот и точку  $k$ , соответствующую частоте источника, а также контуры  $C_s$ , охватывающие каждую точку  $k_s$  и  $k$  отдельно (см. рис. 2). Тогда из (12) и теоремы Коши следует, что:

$$G_1(k, x, y, x_0, y_0) = \sum_{s=1}^N [2\pi i(k - k_s)]^{-1} \times \\ \times \oint_{C_s} G_1(\xi, \dots) d\xi + (2\pi i)^{-1} \oint \frac{G_1(\xi, \dots)}{\xi - k} d\xi.$$

Введём обозначение

$$F_s(k_s, x, y, x_0, y_0) = (2\pi i)^{-1} \oint G_1(\xi, x, y, x_0, y_0) d\xi$$

и покажем, что  $F_s$  выражается через произведение собственных функций  $g_s(k_s, x, y)$  и  $g_s(k_s, x_0, y_0)$  ОР, соответствующих полюсу  $k_s$  и являющихся решением исходной спектральной задачи, сведенной к (13).

Функция  $F_s$ , удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta F_s + k_s^2 F_s = 0, \quad (14)$$

как по координатам наблюдения  $(x, y)$ , так и по координатам источника  $(x_0, y_0)$ .

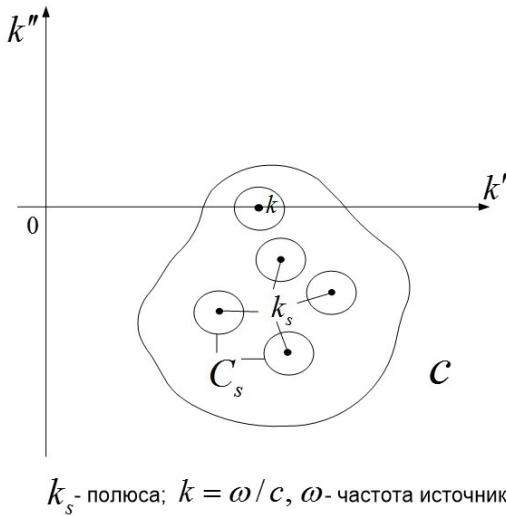


Рис. 2. Комплексная плоскость спектрального параметра  $k$

Далее, поскольку функция  $G_0$  не имеет особенностей в нижней полуплоскости, то из (12) и теоремы Коши следует, что  $F_s$  удовлетворяет однородному краевому условию на зеркалах, а на бесконечности имеет вид (8) при замене  $k \rightarrow k_s$ . Условие типа (7) для  $F_s$  также выполняется. Отсюда следует, что функция  $F_s$  представляет собой комбинацию собственных функций  $g_s$ . Так как  $k_s$  – простой полюс, то, как видно из (14)

$$F_s(k_s, x, y, x_0, y_0) \sim g_s(k_s, x, y)g_s(k_s, x_0, y_0).$$

Таким образом, функция Грина для двухмерных ОР может быть представлена в виде:

$$G(k, k_s, x_0, y_0) = G_0(k, x, y, x_0, y_0) + \sum_{s=1}^N \frac{g_s(k_s, x, y)g_s(k_s, x_0, y_0)}{k - k_s} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_s} \frac{G_1(\xi, k_s, x, y, x_0, y_0)}{\xi - k} d\xi, \quad (14)$$

где  $N$  – число полюсов, охватываемых контуром  $C_s$ .

Из (9) и (14) видно, что поле, возбуждаемое произвольным источником, можно представить в виде:

$$E(k, x, y) = \sum_{s=1}^N \frac{A_s g_s(k_s, x, y)}{k - k_s} + \widehat{E}(k, x, y), \quad (15)$$

где

$$A_s = \iint j\omega(x_0, y_0)g_s(k_s, x_0, y_0)dx_0dy_0;$$

$$\widehat{E} = \frac{1}{2\pi i} \iint \oint_{C_s} j \frac{(x_0, y_0)G_1(\xi, x, y, x_0, y_0)d\xi dx_0 dy_0}{\xi - k} + \iint j(x_0, y_0)G_0(k, x, y, x_0, y_0)dx_0dy_0. \quad (16)$$

Для собственных частот с малой мнимой частью  $|\text{Im} k_s| \ll |\text{Re} k_s|$  при  $k \approx \text{Re} k_s$  одно из первых слагаемых увеличивается, в то время как остальные остаются ограниченными. В силу дискретности спектра собственных частот контур  $C_s$  можно всегда провести так, чтобы  $N = 1$ . Если при этом нерезонансным излучением можно пренебречь, то пространственная структура возбуждаемого поля не зависит от частоты источника и описывается собственной функцией ОР. Нерезонансные поля возникают за счет излучения источника в свободное пространство и однократного (нерезонансного) рассеяния излучения на зеркалах. Возникающие при этом нерезонансные потери энергии источника не охватываются понятием дифракционных потерь, характеризуемых величиной  $\text{Im} k_s$ , и в энергетическом балансе их нужно учитывать отдельно (что отмечалось еще в [4] и [15, 16, 19]).

Интеграл в выражении (14) для функции Грина или в (16) для возбуждаемого поля можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности изолированного резонанса. Преобразуем этот интеграл к виду:

$$\widehat{G}_1(k) = \oint \frac{G_1(\xi)d\xi}{(\xi - R_s)(1 - \frac{k - k_s}{\xi - k_s})}.$$

Тогда воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии со знаменателем  $\left| \frac{k - k_s}{\xi - k_s} \right| < 1$ , получим:

$$\widehat{G}_1(k) = \sum_n (k - k_s)^n \oint_{C_s} \frac{G_1(\xi)d\xi}{(\xi - k_s)^{n+1}}, \quad (17)$$

Пусть функция  $G_1(\xi)$  имеет простой полюс при  $\xi = k_s$ . Тогда в этой точке подынтегральная функция в (17) имеет полюс порядка  $n + 2$ . В этом случае:

$$\oint_{C_s} \frac{G_1(\xi)d\xi}{(\xi - k_s)^{n+1}} = \frac{2\pi}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} \widetilde{G}_1(\xi)}{d\xi^{n+1}} \Big|_{\xi=k_s}, \quad (18)$$

где  $\widetilde{G}_1(\xi) \doteq i(\xi - k_s)G_1(\xi)$  – регуляризованная в окрестности  $\xi = k_s$  функция Грина.

Таким образом, нерезонансная часть  $\widehat{G}(k)$  функции Грина (14) представлена в виде:

$$\widehat{G}(k) = G_0(k) + G_1(k) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|r - r'|) +$$

$$+2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} \tilde{G}_1(\xi)}{d\xi^{n+1}} \Big|_{\xi=k_s} (k-k_s)^n. \quad (19)$$

При точном резонансе  $k = k'_s$  имеем:

$$\begin{aligned} \widehat{G}(k) = & \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|r-r'|) + \\ & + 2\pi \frac{d\tilde{G}_1(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=k_s} + O(Q_s^{-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) и (20) видно, что высокая добротность резонанса еще не гарантирует малую величину мощности нерезонансного излучения. Для ее уменьшения необходимо минимизировать первые слагаемые в (20). Из всего ряда (18) наибольший вклад в нерезонансную часть функции Грина вносит слагаемое с  $n = 0$ , т.е. первая производная функции  $\tilde{G}_1$  по спектральному параметру в точке, соответствующей полюсу  $\xi = k_s$ . Эта функция не зависит от частоты возбуждения и является такой же "собственной" характеристикой ОР, как и его резонансная функция.

В заключение отметим, что выражение (13) для возбуждаемого в ОР поля формально и по физической сути совпадает с представлением поля в [4]. Однако оно имеет то преимущество, что поддается оценкам и численному расчету с помощью функции Грина, построенной в виде (12). Соответствующие алгоритмы весьма эффективны и с успехом используются для анализа полей в ОР [11, 19].

### 3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПОЛЕЙ

Представление функции Грина и возбуждаемых полей в виде суммы резонансных и нерезонансных слагаемых (14) и (16) позволяет получить уравнение для поля, возбуждаемого ВЧ током с медленно меняющейся амплитудой, в окрестности изолированного резонанса. Введем величину рассеянного поля по формуле:

$$E^{sc}(x, y) = E(x, y) - \iint G_0(k, x, y, x', y') j(k, x', y') dx' dy'.$$

Тогда, используя (14) с учетом (20), поле  $E^{sc}$  в окрестности  $s$ -го резонанса можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E^{sc}(k, x, y) \approx & \frac{C_s(k) g_s(k_s, x, y)}{k - k_s} + \\ & + 2\pi \iint \frac{d\tilde{G}_1(\xi, x, y, x', y')}{d\xi} \Big|_{\xi=k_s} j(k, x', y') dx' dy', \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$C_s(k) \doteq \iint g_s(k_s, x', y') j(k, x', y') dx' dy'.$$

Это выражение описывает резонансную и нерезонансную части рассеянного поля стационарных колебаний, возбуждаемых источником во всем про-

странстве (внутри и вне резонансного объема) при любом соотношении длины волны и размеров ОР. Причем в (21) нерезонансная часть поля записана с точностью до членов порядка  $Q_s^{-1}$ . Она выражается через производную от аналитического продолжения регуляризованной функции Грина  $\tilde{G}_1$  по частотному параметру, взятую в точке точного резонанса. Эта величина не зависит от частоты колебаний и определяется только геометрией резонатора и типом возбуждаемой моды.

Если амплитуда ВЧ тока медленно изменяется во времени, то источник излучает спектр частот, локализованный вблизи несущей частоты  $\omega$ . При условии, что ширина размытия спектра  $\Delta\omega_{\max}$  заметно меньше расстояния между соседними резонансами, из (21) с помощью известной методики, использующей обратное преобразование Фурье по частотной добавке [52], нетрудно получить уравнение для медленно меняющихся рассеянных полей:

$$\begin{aligned} \frac{dE^{sc}(t, x, y)}{dt} + i(k - k_s) E^{sc}(t, x, y) = \\ \widehat{C}_s(t) g_s(k_s, x, y) + \\ + i2\pi(k - k_s) \iint \frac{d\tilde{G}_1(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=k_s} \hat{j}(t, x', y') dx' dy' + \\ + 2\pi \iint \frac{dG(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=k_s} \frac{d\hat{j}(t, x', y')}{dt} dx' dy', \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\widehat{C}_s(t)$  – медленно меняющаяся амплитуда резонансной части поля;  $\hat{j}(t, x', y')$  – медленно меняющаяся первая гармоника плотности тока источника, которая приближенно выражается через полную плотность тока по формуле:

$$\hat{j}(t, x', y') \approx \frac{2}{T} \int j_z(t', x', y') e^{i\omega t'} dt'.$$

Если колебания в ОР возбуждаются источником, характеристики которого подвергаются обратному воздействию электромагнитного поля, то его плотность тока будет зависеть от амплитуды и частоты рассеянного поля. По этой причине анализ возбуждения колебаний в ОР требует совместного решения уравнений (22) и уравнения движения носителей заряда источника. В общем случае зависимость плотности тока источника от поля нелинейна, что, в частности, означает наличие в спектре излучения помимо основной частоты ее высших гармоник. Однако, как уже отмечалось, резонансный характер возбуждения позволяет ограничиться учетом только одной первой гармоники тока, причем ее амплитуда нелинейным образом зависит от рассеянного поля и может медленно меняться во времени.

Если используются движущиеся источники (например, электронные потоки), то зависимость плотности тока от поля будет нелокальной, и в этом случае уравнение (22), строго говоря, непригодно для описания переходных процессов. Однако в рамках поэтапного подхода (описанного выше) это уравнение все же позволяет приближенно рассчитывать медленную эволюцию поля ОР, характерную для процессов возбуждения колебаний вблизи высокочастотного резонанса. В этом случае отыскание самосогласованного решения задачи возбуждения (с учетом обратного влияния поля на источник) сводится к численному моделированию процесса установления колебаний в ОР с активным элементом. При этом задача разбивается на два качественно различающихся этапа: на одном из них по заданному (или найденному) распределению поля рассчитывается плотность тока источника (см. п.3.3), а на другом – по найденной плотности тока рассчитывается возбуждаемое поле и его приращение во времени.

Для набора сосредоточенных источников функцию Грина и возбуждаемое поле можно усреднить по сечению этих источников. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно усредненных амплитуд поля:

$$\begin{aligned} \frac{dE_p^{sc}}{dt} - i(\omega - \omega_s)E_p^{sc} \approx \\ \approx - \sum_{m=1}^M G_{mp} j_{\omega p}(E_m), p = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $G_{mp}$  – усредненная по источнику функция Грина.

#### 4. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА МОЩНОСТЕЙ ДЛЯ ОР С ИСТОЧНИКОМ

Точные уравнения баланса для ОР – прямое следствие теоремы о комплексной мощности. Для того чтобы записать ее в виде, удобном для анализа резонансных систем, введем в рассмотрение сумму

$W = W_E + W_H$  и разность  $\Delta W = W_E - W_H$  энергий электрического  $W_E = (8\pi)^{-1} \int_V |\vec{E}|^2 dv$  и магнитного

$W_H = (8\pi)^{-1} \int_V |\vec{H}|^2 dv$  полей в резонансном объеме  $V$ .

Под резонансным объемом будем понимать объем, ограниченный некоторой поверхностью, охватывающей ОР и источник. В качестве резонансного объема следует выбирать объем, ограниченный зеркалами и каустическими поверхностями.

Ограничимся анализом монохроматических полей с временной зависимостью  $e^{-i\omega t}$ . Собственные колебания в ОР характеризуются комплексными собственными частотами  $\omega_s = \omega_s' - i\omega_s''$  ( $\omega_s', \omega_s'' > 0$ ). Учитывая это обстоятельство при выводе теоремы о комплексной мощности из уравнений Максвелла, получа-

ем уравнения баланса для свободных колебаний в следующем виде:

$$\omega_s' = \frac{1}{2} \frac{\sum''(\omega_s)}{\Delta W(\omega_s)}; \quad \omega_s'' = \frac{1}{2} \frac{\sum'(\omega_s)}{W(\omega_s)}, \quad (24)$$

где  $\sum = \sum' + i\sum'' = \frac{c}{4\pi} \int_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}$  – комплексный поток энергии (мощность излучения) через поверхность  $S$ , ограничивающую резонансный объем  $V$ ;  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – электрическое и магнитное поля;  $c$  – скорость света.

Поскольку при фиксированной геометрии открытого резонатора  $\omega_s = const$ , то из (24) следует, что отношение реальной (мнимой) части мощности излучения из объема  $V$  к сумме (разности) энергий электрического и магнитного полей собственных колебаний не зависит от выбора поверхности  $S$ . Напомним, что  $\omega_s'$  определяет частоту колебаний поля, а  $\omega_s''$  – декремент затухания собственных колебаний во времени за счет излучения поля на бесконечность. Из (24) видно, что скорость изменения мгновенной фазы собственных колебаний (частота  $\omega_s''$ ) определяется отношением их реактивных характеристик ( $\sum''$  и  $\Delta W$ ), а скорость затухания амплитуды этих колебаний – отношением их активных характеристик ( $\sum'$  и  $W$ ).

Вводя в рассмотрение добротность собственного колебания по известной формуле  $Q(\omega_s) = \omega_s' / 2\omega_s''$ , из второй формулы (24) получаем:

$$Q(\omega_s) = \frac{\omega_s' W(\omega_s)}{\sum'(\omega_s)}. \quad (25)$$

Выражение (25) хорошо согласуется с классическим определением добротности колебательного контура или объемного резонатора, т. к. (25) представляет собой отношение усредненной за период колебаний электромагнитной энергии объема  $V$  к энергии потерь, которая в данном случае определяется усредненной мощностью излучения из этого объема.

Рассмотрим теперь уравнения баланса для случая вынужденных колебаний, возбуждаемых в ОР источником, который расположен внутри резонансного объема. Из теоремы о комплексной мощности следуют уравнения баланса активных<sup>2</sup> \*):

$$\sum'(\omega) = P_a(\omega) \quad (26)$$

и реактивных:

$$2\omega\Delta W(\omega) + \sum''(\omega) = P_r(\omega) \quad (27)$$

<sup>2</sup> В дальнейшем величины, рассчитываемые для вынужденных колебаний, будем снабжать аргументом  $\omega$ .

мощностей. Здесь введены следующие обозначения: комплексная мощность взаимодействия источника с полем ОР;  $V_e$  – объем, занимаемый источником с плотностью тока  $\vec{j}$ . Величина,  $\Delta W$ , умноженная на частоту, характеризует реактивную мощность возбуждаемого колебания.

Введем по аналогии с (25) добротность вынужденных колебаний:

$$Q(\omega) = \frac{\omega W(\omega)}{\sum'(\omega)}. \quad (29)$$

Используя выражения (25) и (29), путем тождественных преобразований из (26) и (27) получим:

$$2\omega_s'' W(\omega) = \sigma(\omega, \omega_s) P_a(\omega), \quad (30)$$

$$2(\omega - \omega_s' \delta(\omega, \omega_s)) \Delta W(\omega) = P_r(\omega), \quad (31)$$

где

$$\sigma(\omega, \omega_s) = \frac{\omega_s' Q(\omega)}{\omega Q(\omega_s)}, \quad \delta(\omega, \omega_s) = -\frac{1}{2} \frac{\sum''(\omega)}{\omega_s' \Delta W(\omega)}. \quad (32)$$

При идеальной проводимости металлических поверхностей левую часть равенства (30) можно трактовать как дифракционные потери энергии поля, заключенного в резонансном объеме на частоте возбуждения. Тогда величину, стоящую в правой части выражения (30) естественно рассматривать как ту часть мощности источника, которая необходима для компенсации дифракционных потерь резонансного колебания. Остальная мощность излучается непосредственно в свободное пространство или нерезонансным образом рассеивается на зеркалах. Таким образом, суммарную мощность излучения источника из ОР можно условно разделить на две качественно различающиеся части. Одна из них связана с многократными переотражениями поля от зеркал ОР, ассоциируется с дифракционными потерями и имеет резонансный характер. Вторая часть обусловлена однократным рассеянием на зеркалах и прямым излучением источника в свободное пространство и образует нерезонансное излучение. При свипировании частоты источника в приемном устройстве, расположенном вне резонансного объема, регистрируемый сигнал будет иметь вид узкого пика (ширина которого характеризует добротность вынужденных колебаний) на пологом пьедестале, который обусловлен нерезонансным излучением [4].

Введенная выше добротность вынужденных колебаний, а значит, и величина  $\sigma(\omega, \omega_s)$  зависят не только от геометрии ОР и частоты источника, но и от его пространственной структуры, места расположения и взаимодействия с полем ОР. Поэтому величина  $\sigma(\omega, \omega_s)$  или  $Q(\omega)$  могут использоваться в качестве критерия эффективности преобразования энергии

источника в энергию резонансных колебаний. Другой вывод, вытекающий из этих результатов, состоит в том, что при энергетическом анализе колебаний, возбуждаемых в ОР с источником, который расположен внутри резонансного объема, ОР и источник следует рассматривать как единую систему.

В случае высокочастотных колебаний, характеризующихся условиями  $\omega \approx \omega_s'$  и  $Q(\omega_s) \gg 1$ , источник слабо влияет на структуру поля в ОР. Если при этом мощность излучения из резонансного объема обусловлена только дифракционными потерями, то  $Q(\omega) \approx Q(\omega_s)$  (т.е.  $\sigma \approx 1$ ) и  $\sum''(\omega) \approx 0$ . Кроме того, в этом случае  $\omega^2 W_H \approx \omega_s^2 W_E$ . С учетом этих соотношений уравнения (30) и (31) сводятся к известным уравнениям баланса активных и реактивных мощностей для закрытых резонаторов, которые имеют вид:

$$2\omega_s'' W(\omega) = P_a(\omega) \text{ и } 2(\omega - \omega_s') W(\omega) = P_r(\omega). \quad (33)$$

Уравнения (33) применяются и при описании высокочастотных колебаний в ОР.

Необходимо отметить, что поскольку для вынужденных колебаний поток энергии  $\sum'$  не зависит от выбора поверхности, ограничивающей объем  $V$  (см. (26)), то, увеличивая этот объем, величину (29) можно сделать сколь угодно большой. Однако следует иметь в виду, что выражение в левой части формулы (30) имеет смысл мощности дифракционных потерь только в том случае, если в качестве объема  $V_p$  выбран именно резонансный объем. Поэтому сравнение добротностей вынужденных и свободных колебаний следует проводить только для резонансного объема. Были проведены расчеты<sup>3</sup> энергетических характеристик поля, возбуждаемого в простейшем открытом резонаторе – цилиндре с продольной щелью сосредоточенным источником с эквивалентным магнитным током, имеющим заданную z-тую компоненту плотности.

На рис. 3 приведены зависимости добротности вынужденных колебаний в точном резонансе –  $Q_{\text{вын.рез.}}$  ( $ka = 8,56$ ) и при отстройке от него –  $Q_{\text{вын.нер.}}$ , а также зависимость добротности, характеризующей нерезонансное излучение –  $Q_{\text{нер.изл.}} = \frac{Q_0 Q_{\text{вын.рез.}}}{Q_0 - Q_{\text{вын.рез.}}}$  как

функция положения источника на оси симметрии системы.

Для сравнения показаны уровни «добротности» нити в свободном пространстве (для резонансного объема) и собственной добротности  $Q_0$ . Видно, что добротность вынужденных колебаний уменьшается при приближении к щели и не превышает величину

<sup>3</sup> Расчеты проведены совместно с В.Н.Вавиловым по программам А. Е. Поединчука и В. В. Веремея.

$Q_0$ . Это означает, что коэффициент  $\sigma$  остается меньше единицы и в данном случае не превышает величину 0,13.

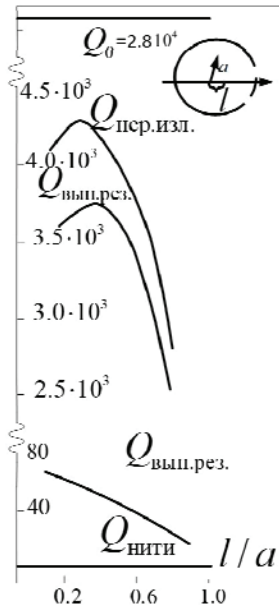


Рис. 3. Изменение добротности вынужденных колебаний в ОР в виде цилиндра с продольной щелью с перемещением источника вдоль его оси симметрии

Таким образом, в рассматриваемой системе только 13% энергии источника расходуется на компенсацию дифракционных потерь энергии поля резонансной моды, а 87% ее высвечивается в виде нерезонансного излучения. Энергия, запасаемая в резонансном объеме при нарушении условий резонанса, намного меньше, чем в случае резонансного возбуждения колебаний.

### 5. РЕЗОНАНСНЫЕ И НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ПОЛЯ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В КВАЗИОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

Сформулированный в предыдущих разделах подход к построению теории возбуждения ОР произвольными источниками опирается на строгие методы теории дифракции. Аналогичный подход может быть развит и в рамках приближенных методов теории дифракции, которые позволяют рассчитывать поля в ОР с зеркалами сложного профиля, в частности в ОР ГДИ, содержащем дифракционную решетку. На самом деле все необходимые общие соотношения задач возбуждения квазиоптических ОР в приближении Кирхгофа с соответствующим математическим обоснованием получены сравнительно давно [5] и хорошо известны. В данном разделе мы покажем, что и для квазиоптических резонаторов справедливы представления типа (15) и применима вся схема расчета полей в ОР, возбуждаемых нелинейными токами, в рамках поэтапного подхода решения задач возбуждения. Получены уравнения самосогласованной теории устройств дифракционной электроники с нефиксиро-

ванной структурой поля и приведен пример расчета поля в ОР с дифракционной решеткой.

Рассмотрим квазиоптический резонатор с идеально проводящими зеркалами и размерами, обеспечивающими выполнение условий  $kR \gg 1$  и  $\lambda \ll a$ , где  $R$  – наименьшее расстояние между зеркалами;  $a$  – апертура зеркал. В этом приближении интегральное уравнение относительно  $H_z$  – компоненты поля на одном из зеркал имеет вид [5]:

$$H_z(M_1) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^2 \int \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} \int \frac{e^{ikR_{21}}}{R_{21}} H_z(M_1^*) dS_1 dS_2 - \frac{ik}{2\pi} \int \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} F_2(M_2) dS_2 + F_1(M_1), \quad (34)$$

где  $R_{12} = |M_1 M_2|$  и  $R_{21} = |M_2 M_1|$  – расстояние между точками интегрирования по поверхности первого (второго) и второго (первого) зеркал:

$$F_i(M_i) = \int_{V_0} \frac{e^{ikR_i}}{R_i} f(N) dv, \quad (35)$$

$f(N) = i\left(\frac{4\pi}{kc}\right)j(N)$  – функция источника;  $R_i = |M_i N|$  – расстояние от поверхности  $i$ -го зеркала до источника.

Интегрирование в (34) ведется по поверхности зеркал, а в (35) – по объему  $V_0$ , занимаемому источником.

Интегральное уравнение (34) получено в приближении Кирхгофа, которое не учитывает затекание токов на теневую сторону зеркал. Однако при решении задачи полное поле не разделяется на резонансную и не резонансную части, поэтому расчет поля, возбуждаемого в ОР источником с помощью этого уравнения, выполняется с учетом нерезонансного излучения. Уравнение (34) можно решать итерационным методом также, как это делали Фокс и Ли [14]. Если плотность тока источника нелинейным образом зависит от возбуждаемого поля, то уравнение (34) становится нелинейным уравнением типа уравнения Гаммерштейна. В этом случае также удобно использовать итерационную процедуру решения, что соответствует описанному выше поэтапному подходу в решении задачи возбуждения резонаторов произвольными источниками. Вначале задается распределение поля (или эквивалентных поверхностных токов) на одном из зеркал и начальное значение тока источника (например, найденное в приближении заданного поля или в линейном приближении). Затем согласно (34) находим распределение поля, которое возникает на поверхности этого же зеркала после одного отражения от второго зеркала, определяем распределение тока источника, вновь находим поле и т.д.

Таким образом, уравнение (34) в принципе позволяет решать задачи нерелятивистской дифракци-

онной электроники в приборах с нефиксированной структурой поля с учетом нерезонансного излучения.

Далее будут описаны способ выделения резонансных слагаемых и методика расчета мощности нерезонансного излучения источника из квазиоптических ОР.

Из теории Фредгольма известно, что решение уравнения (34) представимо через резольвентное ядро  $\Gamma(M_1, M_1^*, \lambda(k))$

$$H_z(M_1) = F(M_1) + \lambda(k) \int \Gamma(M_1 M_1^*, \lambda(k)) F(M_1^*) dS_1, \quad (36)$$

где

$$F(M_1) = -\frac{ik}{2\pi} \int F_2(M_2) \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} dS_2 + F_1(M_1);$$

$$\Gamma(M_1, M_1^*, \lambda(k)) = \lambda(k) \frac{D(M_1, M_1^*, \lambda(k))}{D(\lambda)}, \quad (37)$$

$D(\lambda)$  и  $\tilde{D}(M_1, M_1^*, \lambda)$  – определитель Фредгольма, и минор определителя Фредгольма [20].

Нули определителя Фредгольма лежат в нижней полуплоскости комплексного параметра  $\lambda(k)$  (или  $k$ ) и совпадают с собственными значениями однородного уравнения Фредгольма. Таким образом, как и в случае строгих методов теории дифракции, решение задачи возбуждения представляется в виде мероморфной функции (36) спектрального параметра, полюса которой совпадают со спектром собственных частот ОР. Это означает, что, применив теорему Коши о вычетах к функции  $H_z(\xi)/(k - \xi)$ , мы получим выражения для возбуждаемого поля в виде суммы резонансных слагаемых и нерезонансного члена аналогичное выражению (15):

$$H_z^{sc}(M_1) \doteq H_z(M_1) - F(M_1) = \sum_{s=1}^M \frac{C_s(k) H_s(k_s)}{k - k_s} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_s} \frac{\varphi(\xi, M_1)}{\xi - k} d\xi, \quad (38)$$

где

$$\varphi(\xi) \doteq \lambda(\xi) \int_{S_1} \Gamma_1(\xi, M_1, M_1^*) F_1(M_1) dS;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(\xi) d\xi \doteq C_s(k) H_s(k_s) - \text{вычет функции}$$

$\varphi(\xi)$  в  $s$ -м полюсе резольвенты.

Представление решения уравнения (34) в виде (38) указывает на структуру возбуждаемого поля и позволяет сформулировать алгоритм расчета мощности нерезонансного излучения. С помощью итерационной процедуры решаем уравнение (34) и находим полное поле, возбуждаемое в ОР, что позволяет вы-

числить полные потери на излучение в системе: „ОР + источник”. Затем для того же резонатора определяется мощность дифракционных потерь при решении задачи по формулам теории [4], что соответствует сохранению в (38) только одного резонансного слагаемого. В результате сравнения находим мощность нерезонансного излучения. Отметим, что в данном случае можно использовать выражения для собственных функций, полученное методом параболического уравнения, т.к. в интегральном уравнении (34), по сути, используется функция Грина параболического уравнения [4].

### 6. АВТОКОЛЕБАНИЯ В ГЕНЕРАТОРЕ С ОТКРЫТЫМ РЕЗОНАТОРОМ В ВИДЕ ЦИЛИНДРА С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

Рассмотрим автогенератор с ОР в виде цилиндра с продольной щелью, в котором колебания возбуждаются сосредоточенным ( $d \ll \lambda$ ) активным элементом с вектором плотности тока, лежащим в плоскости рисунка. В этом случае в ОР будут возбуждаться колебания с единственной отличной от нуля  $H_z$  компонентой магнитного поля, причем  $E_r$  и  $E_\varphi$  – компоненты выражаются через  $H_z$  линейно. Такие колебания возбуждаются источником магнитного тока с  $j_z^m$  компонентой плотности, что позволяет ввести в рассмотрение эквивалентный магнитный ток с нелинейной зависимостью его плотности от магнитного поля  $H_z$ . При этом  $H_z$  подчиняется уравнению (23), где нужно сделать формальную замену  $E_z \rightarrow H_z$  и  $j_z \rightarrow j_z^m$ . Поскольку  $d \ll \lambda$ , то в (23) можно оставить лишь одно уравнение ( $M=1$ ), которое в нормированных переменных принимает вид:

$$\frac{d\hat{H}}{d\tau} - i(\delta\omega_s + i\gamma_s)\hat{H} = \hat{G}(\bar{x}, \bar{y})(\delta\omega_s + i\gamma_s)I_0 \hat{j}(\hat{H}), \quad (42)$$

где  $\hat{H} = \frac{d}{e\omega_s'^2} \bar{H}c^2$  – нормированная усредненная по сечению источника амплитуда магнитного поля;

$$\delta\omega_s = (\omega - \omega_s')/\omega_s'; \quad \gamma_s = \omega_s''/\omega_s';$$

$$I_0 = \frac{3}{8} \frac{S_0 j_0}{c^2} \left(\frac{e\omega_s'^2}{c^2}\right)^2 - \text{нормированный постоянный}$$

ток активного элемента;  $\hat{j}(\hat{H})$  – нормированная гармоника плотности тока;  $\hat{G}(\bar{x}, \bar{y})$  – усредненная по площади источника функция Грина.

Как видно, в данном случае задача об автоколебаниях в системе с ОР свелась к анализу уравнения, типичного для автогенераторов с одной степенью свободы. Найденные решения уравнения (42) позволяют рассчитывать пространственную структуру поля

по формуле (9), если известна (или найдена) функциональная зависимость  $\hat{j}(\hat{H})$ .

Ограничиваясь анализом генерации вблизи порога самовозбуждения, аппроксимируем зависимость амплитуды первой гармоники плотности тока от амплитуды рассеянного поля полиномом третьей степени:

$$\hat{j}(|\hat{H}|) = \alpha |\hat{H}| - |\hat{H}|^3, \quad (43)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр задачи.

Подставляя (43) в (42) и линеаризуя полученное уравнение относительно  $|\hat{H}|$ , получим выражение для инкремента нарастания амплитуды поля в ОР:

$$\delta = -\gamma_s (1 + \alpha I_0 J_m \hat{G}(\bar{x}, \bar{y})). \quad (44)$$

Приравняв инкремент нулю, находим стартовые значения параметра неравновесности, пропорционального току источника, как функцию его координат:

$$(\alpha I_0)_{st} = -\frac{1}{J_m \hat{G}(\bar{x}, \bar{y})}. \quad (45)$$

Отметим, что дифракционные потери учитываются в функции:

$$J_m \hat{G}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Зависимость стартового значения параметра неравновесности от положения источника на оси  $x$  при  $ka = 8,56$  показана на рис. 4.

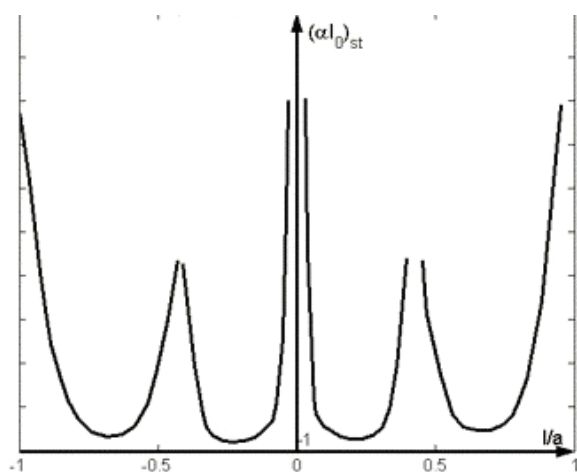


Рис.4. Зоны неустойчивости автогенератора с колебательной системой в виде цилиндра с продольной щелью при перемещении активного элемента вдоль ее оси симметрии

Видно, что автоколебания могут возбуждаться на четырех интервалах изменения координаты источника. Отсюда видна и пространственная структура поля резонансной моды, отвечающей собственной частоте  $ka = 8,56$ .

Стационарные решения уравнения (42) ( $\frac{d\hat{H}}{d\tau} = 0$ )

находятся в явном виде. Они определяют амплитуду поля стационарных автоколебаний в области, занимаемой источником. Амплитуда стационарных автоколебаний в зависимости от положения активного элемента при  $I_{раб} / I_{st} = 4$  показана на рис.5. Провалы поля в точках минимумов стартового тока означают, что выбранное значение рабочего тока обеспечивает проявление эффектов нелинейного насыщения. В данном случае пространственная структура поля внутри и вне резонатора совпадает со структурой поля, возбуждаемого магнитной нитью тока (см., напр., [11]). При наличии двух и более активных элементов или распределенного источника структура поля рассчитывается с помощью функции Грина по формуле (9).

Таким образом, предложенное в работе обобщение строгой и приближенной теории возбуждения двумерных ОР на случай произвольных источников позволяет решать задачи об автоколебаниях в ОР с учетом нерезонансного излучения и влияния источника на пространственную структуру поля.

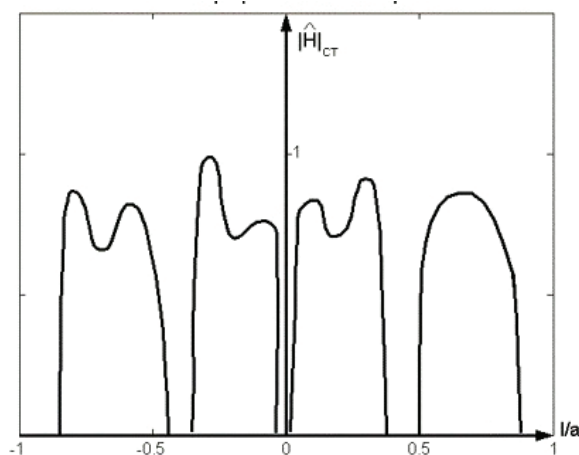


Рис.5. Зоны генерации автогенератора с колебательной системой в виде цилиндра с продольной щелью при перемещении активного элемента вдоль ее оси симметрии

Однако алгоритмы, полученные как на основе строгих, так и приближенных методов теории дифракции достаточно трудоемки и их следует применять лишь в тех случаях, когда влиянием источников на пространственную структуру возбуждаемого поля или нерезонансным излучением пренебречь нельзя. Анализ функции Грина показал, что даже при высокой добротности колебаний мощность нерезонансного излучения может быть достаточно большой (см. (20)). На самом деле малость этой величины обеспечивается минимизацией нерезонансных слагаемых функции Грина для данного ОР. В первом приближении это делается следующим образом. Определяется диаграмма направленности активного зеркала, и принимаются меры для уменьшения уровня его боковых

лепестков и сужения ширины основного лепестка. Затем апертура верхнего зеркала ОР выбирается такой, чтобы она обеспечивала максимальный перехват излучаемой энергии. Как показывает опыт разработки ГДИ [19] такой прием позволяет резко снизить мощность нерезонансного излучения  $P_{\text{нер.изл.}}$ .

Имея ввиду эту возможность уменьшения мощности нерезонансного излучения в ГДИ, а также тот факт, что мощность резонансной моды ОР существенно превышает величину  $P_{\text{нер.изл.}}$ , дальнейший теоретический анализ автоколебательных процессов в ГДИ с оптимизированной по минимуму  $P_{\text{нер.изл.}}$  электродинамикой проведен без учета нерезонансного излучения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе результатов спектральной теории двумерных ОР с цилиндрическими зеркалами показано, что резонансная (сингулярная) часть функции Грина рассматриваемых ОР выражается через их собственные функции и собственные частоты, а ее нерезонансная часть представляет собой сумму функции Грина свободного пространства и разложения регулярной части функции Грина в ряд по степеням расстройки частоты источника от резонанса. При точном резонансе  $n$ -тое слагаемое этого ряда обратно пропорционально добротности собственного колебания в степени  $n$ , причем нулевой член представляет собой производную по частоте от аналитического продолжения регуляризованной функции Грина в точке резонанса, не зависит от частоты источника и является такой же "внутренней" характеристикой ОР, как и его собственная функция. Показано, что аналогичное представление справедливо и для полей, возбуждаемых в квазиоптических резонаторах, которые описываются интегральными уравнениями Фредгольмового типа. С помощью аппарата функции Грина, краевых задач и спектральной теории двумерных ОР, получены уравнения, описывающие стационарные и медленно меняющиеся поля, возбуждаемые в ОР внутренними распределенными источниками в окрестности изолированного резонанса с учетом нерезонансного излучения. Предложена форма записи уравнений баланса активных и реактивных мощностей в системе "ОР + Источник", удобная при анализе нерезонансного излучения. Предложен способ вычисления коэффициента преобразования энергии излучения заданного источника в энергию резонансной моды ОР, заключающийся в вычислении отношения добротности вынужденных колебаний к собственной добротности ОР. Сформулированы уравнения и апробированы соответствующие алгоритмы для расчета полей в ОР с дифракционной решеткой при наличии сторонних источников, пригодные для описания автоколебательных режимов в устройствах дифракционной электроники с нефиксированной структурой поля

и учетом нерезонансного излучения. На примере модельных задач продемонстрировано применение полученных уравнений для расчета поля в ОР с дифракционной решеткой и анализа автоколебаний в генераторе с колебательной системой в виде простейшего двумерного ОР – цилиндра с продольной щелью.

### Литература

- [1] Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. – Киев: Наукова думка. – 1987. – 288 с.
- [2] Поединчук А.Е. К спектральной теории открытых двумерных резонаторов с диэлектрическими включениями//Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – №1. С. 66–70.
- [3] Кошпаренко В.Н., Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П. Спектральная теория открытых двумерных резонаторов с диэлектрическими включениями//Журн. вычислитель. математики и мат. физики. – 1985. – Т.25, №4. – С. 562–577.
- [4] Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966. – 475 с.
- [5] Булдырев В.С., Фрадкин Э.Е. Интегральные уравнения открытых резонаторов//Оптика и спектроскопия. – 1964. – Т.24, № 4. С. 583–596.
- [6] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. – М.: Наука, 1980. – 324 с.
- [7] Лопухин В.М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. – М.: Гостехиздат, 1953. – 324 с.
- [8] Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: Сов. радио, 1973. – 400 с.
- [9] Третьяков О.А. Метод модового базиса//Радиотехника и электрон. – 1986. – Т.31, № 6. – С. 1071–1082.
- [10] Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во ХГУ. 1971. – 400 с.
- [11] Шестопалов В.П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. – Киев: Наук. думка, 1983. – 252 с.
- [12] Кошпаренко В.Н., Мележик П.Н., Шестопалов В.П. Свободные колебания в цилиндре с продольными щелями. – Харьков, 1979. – 45 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники; № 120.
- [13] Лукин К.А., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П. Теория возбуждения открытых резонаторов нелинейными токами//Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 3. – С. 625–629
- [14] Fox A.G., Li T. Resonant modes in a maser interferometer//Bell. Syst. Journal. – 1961. – 10, №2. – Р. 453–488.
- [15] Лукин К.А., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П. К теории возбуждения открытых резонаторов нелинейными токами. – Харьков, 1984. – 29 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники; №262).
- [16] Лукин К.А., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П. Теория возбуждения открытых резонаторов нелинейными токами//Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 3. – С.625–629.
- [17] Вайнберг Б.Р. О собственных функциях оператора, отвечающих полюсам аналитического продолжения резольвенты//Мат. сб. – 1972, – Т. 87, № 2. – С. 293–308.
- [18] Гохберг И.Ц., Сигал Е.И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руже //

Математический сборник.–1971. – Т. 84, № 4. – С. 607–629.

[19] Шестопалов В.П. Дифракционная электроника. – Харьков: "Вища школа", 1976. – 231 с.

[20] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М., Наука. – 1975. – 304 с.

Поступила в редколлегию 12.03.2018



**Лукин Константин Александрович:** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом нелинейной динамики электронных систем Института Радиофизика и электроники имени О. Я. Усикова НАН Украины. Почетный профессор кафедры Микроволновых технологий Харбинского политехнического института (КНР). Председатель Проблемной группы RTO/NATO по "Шумовым Радарам". Область научных интересов: динамический хаос в электронных и радиофизических системах; аналоговая и цифровая генерация и обработка случайных и хаотических сигналов; токовая неустойчивость в полупроводниковых структурах и генерация терагерцовых колебаний; шумовая радиолокация; наземные шумовые радары с синтезированием апертуры; методы микроволнового мониторинга и обнаружения предкатастрофических состояний природных и инженерных объектов (оползни, мосты, телевизионные башни, плотины, большие здания, ангары и др.); шумовая радарная томография; методы и системы передачи информации между автомобилями.

ВР. Наведено приклади розв'язання деяких задач збудження коливаль у ВР за допомогою запропонованого підходу.

*Ключові слова:* відкритий резонатор (ВР), резонансні моди ВР, нерезонансне випромінювання джерела з ВР.

Лл. 05. Бібліогр.: 20 найм.

UDK 537.862; 537.86;621.373

Lukin K. A. **Excitation of electromagnetic oscillations in open resonators by internal sources** / K. A. Lukin // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17. № 1, 2. – P. 14–27.

A new approach to solving the problems of excitation of open resonators (OR) by internal sources is formulated and justified. On the basis of the spectral theory of a two-dimensional OR with ideally conducting cylindrical mirrors, an expression is derived for the total Green's function of the OR, with the help of which equations are obtained describing the complex amplitudes of the resonant modes and enabling estimation of the non-resonant radiation of a source from the OR. The general structure and character of the dependence of the non-resonant part of the Green's function in the vicinity of a single resonant mode on the excitation frequency and Q-factor of this mode are established. A similar approach to the solution of excitation problems is also developed for quasioptical ORs described by integral Fredholm equations. A formal transition to the equations of the well-known theory of OR excitation is shown. Power balance equations for an OR with an internal source are obtained and studied. Equations are obtained for slowly varying amplitudes of the resonant modes suitable for describing single-mode and multimode self-oscillations in OR-based generators. Examples of the OR excitation problems solving with the help of the proposed approach are presented.

*Keywords:* open resonator (OR), resonance modes of OR, nonresonant radiation of a source from the OR.

Fig. 05. Ref.: 20 items.

УДК 537.862; 537.86;621.373

Лукин К. О. **Збудження електромагнітних коливаль у відкритих резонаторах внутрішніми джерелами** / К. О. Лукин // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 14–27.

Сформульовано та обґрунтовано новий підхід до вирішення проблем збудження відкритих резонаторів (ВР) внутрішніми джерелами. На основі спектральної теорії двовимірного ВР з ідеально провідними циліндричними дзеркалами виведено вираз для повної функції Гріна ВР, за допомогою якого отримані рівняння, що описують комплексні амплітуди резонансних мод і дозволяють отримати оцінки нерезонансного випромінювання джерела з ВР. Встановлено загальну структуру та характер залежності нерезонансної частини функції Гріна біля однієї резонансної моди від частоти збудження та Q-фактора цієї моди. Подібний підхід до вирішення задач збудження також зроблений для квазіоптичного ВР, який описується інтегральними рівняннями Фредгольма. Показано формальний перехід до рівнянь відомої теорії збудження ВР. Отримані та вивчені рівняння балансу потужностей для ВР з внутрішнім джерелом. Отримані рівняння для повільно варіюючих амплітуд резонансних мод, придатних для опису одномодових і багатомодових автоколиваль у генераторах на основі

## ПОТОК ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

С. Д. ПРИЙМЕНКО, К. А. ЛУКИН

Для электрических и магнитных зарядов и токов рассмотрены потоки электромагнитной энергии, которые формируются потенциальными электрическими и магнитными полями. Эти потоки, обусловлены электрическими и магнитными скалярными потенциалами, а также потенциальными и динамическими составляющими напряженностей электрического и магнитного полей. Энергетические соотношения апробированы на примере плоских листов электрического и магнитного токов.

*Ключевые слова:* электрические и магнитные заряды и токи, потоки электромагнитной энергии, потенциальные электрические и магнитные поля.

### ВВЕДЕНИЕ

В ускорительной технике важную роль играют потенциальные электрические и магнитные поля. Последние возникают, в частности, при возбуждении электромагнитного поля через отверстия в волноводах и резонаторах. В этом случае потенциальная и вихревая составляющие напряженности электрического и магнитного полей, электрические заряды и токи носят реальный, а магнитные заряды и токи фиктивный характер. Однако при ненулевой нормальной компоненте вектора магнитной индукции на идеально проводящей поверхности необходимо вводить в рассмотрение поверхностные магнитные заряды. Известно, что введение в рассмотрение эквивалентного поверхностного магнитного тока в области отверстия существенно упрощает процедуру расчета.

В магнитодиэлектриках магнитный поляризационный ток возникает благодаря изменению во времени и пространстве элементарных магнитных диполей среды, т. е. он существует реально [1] (с.32). Такой подход был использован авторами книги [2], где рассмотрено распространение электромагнитных сигналов в межзвездной среде с атомарным водородом с очень малой плотностью.

Для электрических зарядов и токов при гармонической зависимости от времени наличие потенциальной составляющей напряженности электрического поля  $\vec{E}_e^p$ , сравнимой с вихревой составляющей электрического поля  $\vec{E}_e^r$ , пожалуй, впервые установлено в [3] (с.236). Для произвольной зависимости от времени аналогичный результат отмечается в обобщенном законе Кулона [4] (с.246). Однако слабо исследованным остается вопрос о потоке электромагнитной энергии при наличии как потенциального, так и вихревого электрического полей. При нулевой напряженности электрического поля в области источника частичный ответ на этот вопрос дан в [5] (с.123), где уравнение баланса энергии определяется через электрические скалярный  $\psi_e$  и векторный  $\vec{A}_e$  потенциалы.

Для магнитных зарядов и токов в уравнении баланса энергии электромагнитного поля плотность потока энергии в единицу времени определяется через напряженности электрического  $\vec{E}_m$  и магнитного  $\vec{H}_m$  полей [1] (с.88).

Целью выполненных исследований является определение потока электромагнитной энергии при наличии потенциальных электрических и магнитных полей.

В данной публикации показано, что при наличии электрических зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности электрического поля совпадает с потоком, который обусловлен электрическим скалярным потенциалом и плотностью обобщенного электрического тока ( $\vec{j}_e + \partial \vec{D}_e / \partial t$ ,  $\vec{j}_e$  и  $\vec{D}_e$  есть плотность электрического тока и вектор электрического смещения соответственно). Перенос электромагнитной энергии в местах локализации электрического свободного заряда и в других точках пространства осуществляют электрический обобщенный ток и электрический ток смещения соответственно.

При наличии магнитных зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности магнитного поля совпадает с потоком, который обусловлен магнитным скалярным потенциалом  $\psi_m$  и плотностью обобщенного магнитного тока ( $\vec{j}_m + \partial \vec{D}_m / \partial t$ ,  $\vec{j}_m$  и  $\vec{D}_m$  есть плотность магнитного тока и вектор магнитного смещения соответственно). Перенос электромагнитной энергии в местах локализации магнитного тока и в других точках пространства осуществляют магнитный обобщенный ток и магнитный ток смещения соответственно.

Энергетические соотношения апробированы на примере плоских листов электрического и магнитного токов в неограниченном однородном изотропном пространстве.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

### 2.1. Теорема Пойнтинга

2.1.1. *Электрические заряды и токи.* При наличии электрических зарядов  $\rho_e$  и токов  $\vec{j}_e$  уравнение баланса энергии для электромагнитного поля получаем, подставляя (П.1.12) в (П.1.10)

$$\begin{aligned} -\partial\vec{A}_e/\partial t \cdot \vec{j}_e &= \text{div}[\partial\vec{A}_e/\partial t \times \vec{H}_e] - \\ -\vec{H}_e \cdot \partial\vec{B}_e/\partial t + \partial\vec{A}_e/\partial t \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом (П.1.3),  $\vec{E}_e^p = -\text{grad}\psi$  и (П.1.6) получаем уравнение баланса энергии для электрического поля

$$\begin{aligned} -\text{grad}\psi_e \cdot \vec{j}_e &= \text{div}(\psi_e \cdot \vec{j}_e) - \\ -\text{div}(\psi_e \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t) + \text{grad}\psi_e \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t. \end{aligned} \quad (2)$$

Объединяя (1), (2), принимая во внимание  $\vec{E}_e = -\text{grad}\psi_e - \partial\vec{A}_e/\partial t$ , находим при наличии потенциальной составляющей напряженности электрического поля, обусловленной электрическим скалярным потенциалом, уравнения баланса энергии электрического и электромагнитного полей в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_e \cdot \vec{j}_e &= -\text{div}(\psi_e \cdot (\vec{j}_e + \partial\vec{D}_e/\partial t)) - \\ -\text{div}[\vec{H}_e \times \partial\vec{A}_e/\partial t] - \vec{H}_e \cdot \partial\vec{B}_e/\partial t - \vec{E}_e \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t. \end{aligned} \quad (3)$$

Сопоставляя (П.1.1) и (3), получаем

$$\vec{S}_e^{\psi j} + \vec{S}_e^{\psi} + \vec{S}_e^{\psi A} = \psi_e \cdot (\vec{j}_e + \partial\vec{D}_e/\partial t), \quad (4)$$

$$\vec{S}_e^A = [\vec{H}_e \times \partial\vec{A}_e/\partial t], \quad (5)$$

$$\vec{S}_e^{\psi j} = \psi_e \cdot \vec{j}_e, \quad (6)$$

$$\vec{S}_e^{\psi} = \psi_e \partial\vec{D}_e^{\psi}/\partial t = \psi_e \partial(-\varepsilon_0 \text{grad}\psi_e)/\partial t, \quad (7)$$

$$\vec{S}_e^{\psi A} = \psi_e \partial\vec{D}_e^A/\partial t = \psi_e (-\varepsilon_0 (\partial\vec{A}_e/\partial t))/\partial t, \quad (8)$$

где  $\vec{S}_e^{\psi j}$ ;  $\vec{S}_e^{\psi}$ ;  $\vec{S}_e^{\psi A}$  являются плотностями потока энергии в единицу времени, обусказанные электрическим скалярным потенциалом и плотностью тока свободных зарядов; электрическим скалярным потенциалом и потенциальной составляющей плотности электрического тока смещения; электрическим скалярным потенциалом и динамической составляющей плотности электрического тока смещения соответственно, а  $\vec{S}_e^A$  есть плотность потока энергии, обусловленная электрическим векторным потенциалом.

Из (П.1.9) и (4), (5)–(8) следует, что плотность потока энергии, которая формируется потенциальной составляющей напряженности электрического поля и обусловлена электрическим скалярным потенциалом, в местах локализации свободного заряда направлена

вдоль плотности электрического обобщенного тока, а в других точках пространства вдоль плотности электрического тока смещения.

Согласно (П.1.9) поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности электрического поля совпадает с потоком, обусловленным электрическим скалярным потенциалом и плотностью обобщенного электрического тока.

Отметим, что при наличии только электрических зарядов и токов, напряженности электрического и магнитного полей с точностью до постоянных определяются соотношениями (1.90), (1.88) [1] (с.35)

$$\vec{E}_e = -\text{grad}\psi_e - \partial\vec{A}_e/\partial t, \quad (9)$$

$$\vec{H}_e = (1/\mu_0) \text{rot}\vec{A}_e. \quad (10)$$

При этом напряженность электрического  $\vec{E}_e$  поля включает как потенциальную, так и вихревую части, а напряженность магнитного поля  $\vec{H}_e$  есть строго вихревым вектором.

Соотношения (4) и (5) с энергетической точки зрения описывают поток электрической и электромагнитной энергии соответственно, а с кинематической точки зрения описывают продольную электрическую и поперечную электромагнитные волны.

Отметим, что если  $\vec{A}_e$  есть строго потенциальным вектором, согласно (10) и (5)  $\vec{H}_e = 0$  и  $\vec{S}_e^A = 0$ , а поток энергии определяется (4), (6) – (7), т. е. за пределами свободного заряда имеет место поток электрической энергии, который обусловлен электрическим скалярным потенциалом и потенциальной составляющей тока смещения.

2.1.2. *Магнитные заряды и токи.* При наличии магнитных зарядов  $\rho_m$  и токов  $\vec{j}_m$  уравнение баланса энергии для электромагнитного поля получаем, подставляя (П.2.18) в (П.2.15)

$$\begin{aligned} -(\partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot \vec{j}_m &= -\text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m/\partial t] - \\ -\vec{E}_m \cdot (\partial\vec{D}_m/\partial t) + (\partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot (\partial\vec{B}_m/\partial t). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (П.2.7), (П.2.8) и (П.2.9), (П.2.12) получаем уравнение баланса энергии для магнитного поля

$$\begin{aligned} -\text{grad}\psi_m \cdot \vec{j}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{j}_m + \partial\vec{B}_m/\partial t)) + \\ + \text{grad}\psi_m \cdot \partial\vec{B}_m/\partial t. \end{aligned} \quad (12)$$

Объединяя (11), (12), находим уравнение баланса энергии как для магнитного так и электромагнитного полей при наличии магнитных зарядов и токов

$$\begin{aligned} (-\text{grad}\psi_m - \partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot \vec{j}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{j}_m + \\ + \partial\vec{B}_m/\partial t)) - \text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m/\partial t] - \end{aligned}$$

$$-\vec{E}_m \cdot (\partial \vec{D}_m / \partial t) + (\text{grad} \psi_m + \partial \vec{A}_m / \partial t) \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t. \quad (13)$$

С учетом (П.2.14) перепишем уравнение баланса энергии для магнитных зарядов и токов (13) в виде

$$\begin{aligned} H_m \cdot \vec{J}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{J}_m + \partial \vec{B}_m / \partial t)) - \\ &- \text{div}[\vec{E}_m \times (-1) \partial \vec{A}_m / \partial t] - \vec{E}_m \cdot (\partial \vec{D}_m / \partial t) - \\ &- H_m \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t. \end{aligned} \quad (14)$$

Сопоставляя (П.2.5) и (14), получаем поток магнитной и электромагнитной энергий при наличии только сторонних магнитных зарядов и токов

$$\vec{S}_m^{\psi j} + \vec{S}_m^{\psi} + \vec{S}_m^{\psi A} = \psi_m \cdot (\vec{J}_m + \partial \vec{B}_m / \partial t), \quad (15)$$

$$\vec{S}_m^A = [\vec{E}_m \times \partial \vec{A}_m / \partial t] = [\vec{E}_m \times (-1) \vec{H}_m^d], \quad (16)$$

$$\vec{S}_m^{\psi j} = \psi_m \cdot \vec{J}_m, \quad (17)$$

$$\vec{S}_m^{\psi} = \psi_m \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t = \psi_m \cdot \partial(-\mu_0 \text{grad} \psi_m) / \partial t, \quad (18)$$

$$\vec{S}_m^{\psi A} = \psi_m \cdot \partial \vec{B}_m^A / \partial t = -\psi_m \cdot \mu_0 (\partial^2 \vec{A}_m / \partial t^2), \quad (19)$$

где  $\vec{S}_m^{\psi j}$ ;  $\vec{S}_m^{\psi}$ ;  $\vec{S}_m^{\psi A}$  – плотности потока энергии в единицу времени, обусловленные магнитным скалярным потенциалом и плотностью тока магнитных зарядов; магнитным скалярным потенциалом и потенциальной составляющей плотности магнитного тока смещения; магнитным скалярным потенциалом и динамической составляющей плотности магнитного тока смещения соответственно, а  $\vec{S}_m^A$  – плотность потока энергии, обусловленная магнитным векторным потенциалом.

Из (П.2.12) и (15), (16)–(19) следует, что плотность потока энергии, формируемая потенциальной составляющей напряженности магнитного поля и обусловленная магнитным скалярным потенциалом, в местах локализации магнитного тока направлена вдоль плотности магнитного обобщенного тока, а в других точках пространства вдоль плотности магнитного тока смещения.

Согласно (П.2.12) поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности магнитного поля совпадает с потоком, обусловленным магнитным скалярным потенциалом и плотностью обобщенного магнитного тока.

Отметим, что при наличии только магнитных зарядов и токов, напряженности электрического и магнитных полей согласно (П.2.17), (П.2.14) есть

$$\vec{E}_m = -(1/\epsilon_0) \text{rot} \vec{A}_m, \quad (20)$$

$$\vec{H}_m = -\text{grad} \psi_m - \partial \vec{A}_m / \partial t. \quad (21)$$

При этом напряженность электрического поля  $\vec{E}_m$  есть строго вихревым вектором, а напряженность магнитного поля  $\vec{H}_m$  включает как потенциальную, так и вихревую части.

Соотношения (15) и (16) с энергетической точки зрения описывают поток магнитной и электромагнитной энергии соответственно, а с кинематической точки зрения описывают продольную магнитную и поперечную электромагнитные волны.

Отметим, что если  $\vec{A}_m$  есть строго потенциальным вектором, то согласно (20) и (16)  $\vec{E}_e = 0$  и  $\vec{S}_m^A = 0$ , а поток энергии определяется (15), (17)–(18), т. е. за пределами магнитного заряда имеет место поток магнитной энергии, который обусловлен магнитным скалярным потенциалом и потенциальной составляющей тока смещения.

2.1.3. *Плоский лист электрического тока.* Для плоского листа электрического тока в однородном изотропном пространстве с поверхностной плотностью тока  $J_0^e$ , направленной вдоль оси Oх, и частотой  $\omega$ , используя результаты [1] (с.78), находим сначала электрические векторный  $\vec{A}_e$  и скалярный  $\psi_e$  потенциалы, а потом получаем для медленной волны тока  $v_e < c$  ( $v_e$  есть скорость свободных зарядов)

$$\begin{aligned} S_{ex}^{\psi} &= (1/2) \psi_e \cdot (\partial D_{ex}^{\psi} / \partial t) = \\ &= |J_0^e|^2 / 8 \cdot \beta_e / \epsilon_0 \omega \cdot \beta_e^2 / (\beta_e^2 - k^2) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_e^2 - k^2} y}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_{ex}^{\psi A} &= (1/2) \psi_e \cdot (\partial D_{ex}^A / \partial t) = |J_0^e|^2 / 8 \times \\ &\times (-\beta_e / \epsilon_0 \omega) \cdot (k^2 / (\beta_e^2 - k^2)) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_e^2 - k^2} y}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S_{ex} &= S_{ex}^{\psi} + S_{ex}^{\psi A} = \\ &= |J_0^e|^2 / 8 \cdot \beta_e / \epsilon_0 \omega \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_e^2 - k^2} y}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\beta_e = \omega / v_e$ ,  $k = \omega / c$ , знаки плюс и минус в показателе экспоненты выбираются для  $y < 0$  и  $y > 0$  соответственно. Соотношение (24) совпадает с выражением для  $S_{ex}$  [1] (с.81), которое получено классическим образом.

2.1.4. *Плоский лист магнитного тока.* Для плоского листа стороннего магнитного тока в однородном изотропном пространстве с поверхностной плотностью  $J_0^m$ , направленной вдоль оси Oх, и частотой  $\omega$ , используя результаты [1] (с.80, с.87), находим сначала магнитный векторный  $\vec{A}_m$  и скалярный  $\psi_m$  потенциалы, а затем получаем для медленной волны тока

$v_m < c$  ( $v_m$  есть фазовая скорость волны магнитного тока)

$$S_{mx}^{\Psi} = (1/2)\psi_m \cdot (\partial B_{mx}^{\Psi} / \partial t) = -|J_0^m|^2 / 8 \times \beta_m / \mu_0 \omega \cdot \beta_m^2 / (\beta_m^2 - k^2) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_m^2 - k^2} y}, \quad (25)$$

$$S_{mx}^{\Psi A} = (1/2)\psi_m \cdot (\partial B_{mx}^A / \partial t) = |J_0^m|^2 / 8 \times \beta_m / \mu_0 \omega \cdot k^2 / (\beta_m^2 - k^2) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_m^2 - k^2} y}, \quad (26)$$

$$S_{mx} = S_{mx}^{\Psi} + S_{mx}^{\Psi A} = -|J_0^m|^2 / 8 \cdot \beta_m / \mu_0 \omega \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_m^2 - k^2} y}, \quad (27)$$

где  $\beta_m = \omega / v_m$ ,  $k = \omega / c$ , знаки плюс и минус в показателе экспоненты выбираются для  $y < 0$  и  $y > 0$  соответственно. Соотношение (27) совпадает с выражением для  $S_{mx}$  [1] (с.88), которое получено классическим образом.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

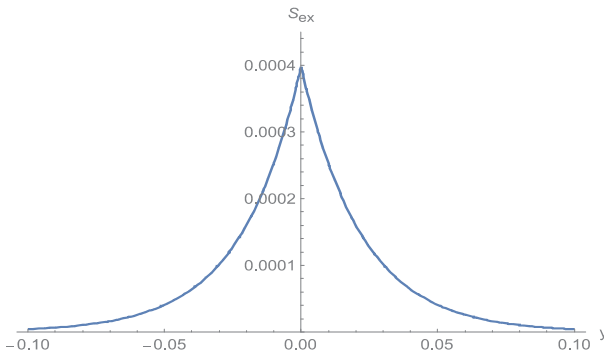


Рис. 1. Зависимость  $S_{ex}(y)$

$$(|J_0^e| = 2.82 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}, v_e = 2.82 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \omega = 1.49 \cdot 10^{10} \text{ Hz})$$

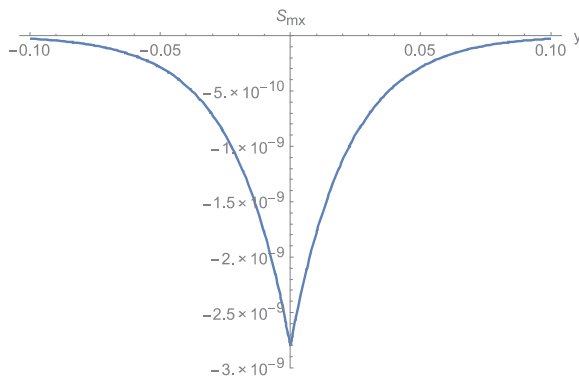


Рис. 2. Зависимость  $S_{mx}(y)$

$$(|J_0^m| = 2.82 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}, v_e = 2.82 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \omega = 1.49 \cdot 10^{10} \text{ Hz})$$

Зависимости результирующих плотностей потока энергии в единицу времени  $S_{ex}$  и  $S_{mx}$  от поперечной координаты  $y$ , рассчитанные согласно (24) и (27), построены на рис. 1 и рис. 2 соответственно, отражая свойства поверхностных волн, которые распространяются вдоль электрического и магнитного листов тока.

### 4. ВЫВОДЫ

При наличии электрических зарядов и токов потоки энергии в единицу времени, обусловленные электрическими скалярным и векторным потенциалами представляют собой потоки электрической и электромагнитной энергии соответственно.

При наличии электрических зарядов и токов, когда динамическая составляющая напряженности электрического поля есть строго потенциальным вектором, вектор Пойнтинга, который определяет поток электромагнитной энергии, равен нулю. Имеет место поток только электрической энергии, которая за пределами свободного заряда обусловлена электрическим скалярным потенциалом и потенциальной составляющей электрического тока смещения.

При наличии электрических зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности электрического поля совпадает с потоком, который обусловлен электрическим скалярным потенциалом и плотностью обобщенного электрического тока.

Перенос электрической энергии в местах локализации электрического свободного заряда и в других точках пространства осуществляют электрический обобщенный ток и электрический ток смещения соответственно.

При наличии магнитных зарядов и токов потоки энергии, обусловленные магнитными скалярным и векторным потенциалами представляют собой потоки магнитной и электромагнитной энергии соответственно.

При наличии магнитных зарядов и токов, когда динамическая составляющая напряженности магнитного поля является строго потенциальным вектором, вектор Пойнтинга, который определяет поток электромагнитной энергии, равен нулю. Имеет место поток только магнитной энергии, которая за пределами магнитного заряда обусловлена магнитным скалярным потенциалом и потенциальной составляющей магнитного тока смещения.

При наличии магнитных зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности магнитного поля совпадает с потоком, который обусловлен магнитным скалярным потенциалом и плотностью обобщенного магнитного тока

Перенос магнитной энергии в местах локализации магнитного тока и в других точках пространства осуществляет магнитный обобщенный ток и магнитный ток смещения соответственно.

При наличии только электрических зарядов и токов, напряженность электрического поля включает как потенциальную, так и вихревую части, а напряженность магнитного поля есть строго вихревым вектором.

При наличии только магнитных зарядов и токов напряженность электрического поля есть строго вихревым вектором, а напряженность магнитного поля включает как потенциальную, так и вихревую части. Энергетические соотношения апробированы на примере плоских листов электрического и магнитного токов в неограниченном однородном изотропном пространстве.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Используем уравнение баланса энергии электромагнитного поля [6] (с.286) для электрических зарядов  $\rho_e$  и токов  $\vec{j}_e$

$$\vec{E}_e \cdot \vec{j}_e = -\partial u_e / \partial t - \text{div} \vec{S}_e, \quad (\text{П.1.1})$$

без конкретизации плотностей электромагнитной энергии  $u_e$  и ее потока  $\vec{S}_e$ . Для получения явного вида  $u_e$  и  $\vec{S}_e$  привлекаем первое уравнение Максвелла

$$\vec{j}_e = \text{rot} \vec{H}_e - \partial \vec{D}_e / \partial t, \quad (\text{П.1.2})$$

$$\vec{E}_e \cdot \vec{j}_e = \vec{E}_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e - \vec{E}_e \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t. \quad (\text{П.1.3})$$

Потенциальная составляющая напряженности электрического поля  $\vec{E}_e^p = -\text{grad} \psi_e$ . Воспользуемся тождеством

$$\text{div}(\psi_e \cdot \vec{M}) = \psi_e \cdot \text{div} \vec{M} + \vec{M} \cdot \text{grad} \psi_e, \quad (\text{П.1.4})$$

где  $\vec{M}$  – произвольный вектор.

Полагая  $\vec{M} = \text{rot} \vec{H}_e$ , получаем

$$\text{div}(\psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e) = \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \quad (\text{П.1.5})$$

С учетом (П.1.2), (П.1.5)

$$\begin{aligned} \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e &= \text{div}(\psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e) = \\ &= \text{div}(\psi_e \cdot \vec{j}_e) + \text{div}(\psi_e \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.1.6})$$

Привлекаем тождество

$$\text{div}[\vec{C} \times \vec{P}] = \vec{P} \cdot \text{rot} \vec{C} - \vec{C} \cdot \text{rot} \vec{P}, \quad (\text{П.1.7})$$

где  $\vec{C}$  и  $\vec{P}$  – произвольные векторы.

Полагая  $\vec{C} = -\text{grad} \psi_e$ ,  $\vec{P} = \vec{H}_e$  получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad} \psi_e \times \vec{H}_e] &= \vec{H}_e \cdot \text{rot}(-\text{grad} \psi_e) + \\ &+ \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e = \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \end{aligned} \quad (\text{П.1.8})$$

С учетом (П.1.8) и (П.1.6)

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad} \psi_e \times \vec{H}_e] &= \text{div}(\psi_e \cdot \vec{j}_e) + \\ &+ \text{div}(\psi_e \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t) = \text{div}(\psi_e \cdot (\vec{j} + \partial \vec{D}_e / \partial t)). \end{aligned} \quad (\text{П.1.9})$$

Динамическую составляющую напряженности электрического поля, связанную с векторным потенциалом  $\vec{E}_e^d = -\partial \vec{A}_e / \partial t$  [7] (с.218), подставим в (П.1.3)

$$\begin{aligned} -\partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \vec{j}_e &= -\partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \text{rot} \vec{H}_e + \\ &+ \partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t. \end{aligned} \quad (\text{П.1.10})$$

Полагая в (П.1.7),  $\vec{C} = -\partial \vec{A}_e / \partial t$ ,  $\vec{P} = \vec{H}_e$  имеем

$$\begin{aligned} \text{div}[-\partial \vec{A}_e / \partial t \times \vec{H}_e] &= \vec{H}_e \cdot \text{rot}(-\partial \vec{A}_e / \partial t) \\ &+ \partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \end{aligned} \quad (\text{П.1.11})$$

Подставляя  $\vec{H}_e = (1/\mu_0) \cdot \text{rot} \vec{A}_e$  с учетом  $\vec{B}_e = \mu_0 \vec{H}_e = \text{rot} \vec{A}_e$  в (П.1.11), получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[\partial \vec{A}_e / \partial t \times \vec{H}_e] &= \vec{H}_e \cdot \partial \vec{B}_e / \partial t - \\ &- \partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \end{aligned} \quad (\text{П.1.12})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 2

При наличии только сторонних магнитных зарядов  $\rho_m$  и токов  $\vec{j}_m$ , уравнения Максвелла запишутся в виде [1] (с.34)

$$\text{rot} \vec{H}_m = -\partial \vec{D}_m / \partial t, \quad (\text{П.2.1})$$

$$\text{rot} \vec{E}_m = -\vec{j}_m - \partial \vec{B}_m / \partial t, \quad (\text{П.2.2})$$

$$\text{div} \vec{D}_m = 0, \quad (\text{П.2.3})$$

$$\text{div} \vec{B}_m = \rho_m. \quad (\text{П.2.4})$$

Используя принцип перестановочной двойственности [1] (с.34), уравнение баланса энергии электромагнитного поля [6] для сторонних магнитных зарядов и токов запишется в виде

$$\vec{H}_m \cdot \vec{j}_m = -\partial u_m / \partial t - \text{div} \vec{S}_m, \quad (\text{П.2.5})$$

где  $u_m$  – объемная плотность электромагнитной энергии, а  $\vec{S}_m$  – поток электромагнитной энергии.

Для получения явного вида  $u_m$  и  $\vec{S}_m$  привлекаем второе уравнение Максвелла (П.2.2)

$$\vec{j}_m = -\text{rot} \vec{E}_m - \partial \vec{B}_m / \partial t, \quad (\text{П.2.6})$$

$$-\vec{H}_m \cdot \vec{j}_m = \vec{H}_m \cdot \text{rot} \vec{E}_m + \vec{H}_m \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t. \quad (\text{П.2.7})$$

Согласно (1.98) [1] (с.35) потенциальная часть напряженности магнитного поля, обусловленная магнитными зарядами и токами  $H_m^p$

$$\vec{H}_m^p = -\text{grad}\psi_m, \quad (\text{П.2.8})$$

где  $\psi_m$  – магнитный скалярный потенциал.

Используя тождество (П.1.4), заменяя  $\psi_e$  на  $\psi_m$ , считая,  $\vec{M} = \text{rot}\vec{E}_m$ , получаем

$$\begin{aligned} \text{div}(\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m) &= \psi_m \cdot \text{div}\text{rot}\vec{E}_m + \\ + \text{rot}\vec{E}_m \cdot \text{grad}\psi_m &= \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m. \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

С учетом (П.2.2), (П.2.9) находим

$$\begin{aligned} \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m) = \\ &= -\text{div}(\psi_m \cdot \vec{j}_m) - \text{div}(\psi_m \cdot \partial\vec{B}_m/\partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.10})$$

Привлекая тождество (П.1.7), полагая  $\vec{C} = -\text{grad}\psi_m$ ,  $\vec{P} = \vec{E}_m$ , получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad}\psi_m \times \vec{E}_m] &= \vec{E}_m \cdot \text{rot}(-\text{grad}\psi_m) + \\ + \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m &= \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m. \end{aligned} \quad (\text{П.2.11})$$

Согласно (П.2.10), (П.2.11)

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad}\psi_m \times \vec{E}_m] &= \\ &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{j}_m + \partial\vec{B}_m/\partial t)). \end{aligned} \quad (\text{П.2.12})$$

Составляющую напряженности магнитного поля, связанную с магнитным векторным потенциалом  $\vec{A}_m$

$$\vec{H}_m^d = (-1)(\partial\vec{A}_m/\partial t), \quad (\text{П.2.13})$$

по аналогии с динамической составляющей напряженности электрического поля назовем динамической составляющей напряженности магнитного поля.

Для среды без потерь (1.98) [1] (с.35) с учетом (П.2.8), (П.2.13) имеем

$$\vec{H}_m = \vec{H}_m^p + \vec{H}_m^d = -\text{grad}\psi_m - \partial\vec{A}_m/\partial t, \quad (\text{П.2.14})$$

Подставим  $\vec{H}_m^d$  в (П.2.7)

$$\begin{aligned} (\partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot \vec{j}_m &= -(\partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot \text{rot}\vec{E}_m - \\ - (\partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot (\partial\vec{B}_m/\partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.15})$$

Полагая в (П.1.7)  $\vec{C} = \vec{E}_m$ ,  $\vec{P} = -\partial\vec{A}_m/\partial t$ , получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m/\partial t] &= -\partial\vec{A}_m/\partial t \cdot \text{rot}\vec{E}_m + \\ + \vec{E}_m \cdot \text{rot}(\partial\vec{A}_m/\partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.16})$$

Принимая во внимание (1.97) [1] (с.35), имеем

$$\vec{D}_m = \varepsilon_0\vec{E}_m = (-1)\text{rot}\vec{A}_m. \quad (\text{П.2.17})$$

Откуда записываем соотношение (П.2.16) в виде

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m/\partial t] &= -\vec{A}_m/\partial t \cdot \text{rot}\vec{E}_m - \\ - \vec{E}_m \cdot (\partial\vec{D}_m/\partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.18})$$

#### Литература

- [1] Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П.. Электродинамика и распространение радиоволн. М: «Сов. радио», 1979.
- [2] Harmuth H. F., Lukin K. A. Interstellar Propagation of Electromagnetic Signals. N. Y.: «Kluwer Academic/Plenum Publ.», 2000.
- [3] В. Пановский, М. Филипп. Классическая электродинамика. М: «Физматгиз», 1963.
- [4] J. D. Jackson. Classical electrodynamics. Third Edition. «John Wiley», 1998.
- [5] Дж. А. Страттон. Теория электромагнетизма. М: «Гос. изд. техн.- теор. лит», 1948.
- [6] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т.6. М: «Мир», 1966.
- [7] С. Щелкунов, Г. Фриис. Антенны. М «Сов. радио», 1955.

Поступила в редколлегию 12.01.2018



**Прийменко Сергей Дмитриевич**, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник, Институт плазменной электроники и новых методов ускорения ННЦ ХФТИ НАНУ. Область научных интересов: переходное излучение; вибраторные антенны, возбуждаемые релятивистским электронным пучком; интегральные уравнения макроскопической электродинамики.

**Лукин Константин Александрович**, фото и сведения об авторе см. на стр. 28

УДК 537.87

Прийменко С. Д. Потік електромагнітної енергії за наявності потенційних електричних і магнітних полів / С. Д. Прийменко, К. О. Лукін // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 28–34.

Для електричних і магнітних зарядів та струмів розглянуто потоки електромагнітної енергії, які формуються потенційними електричними і магнітними полями. Ці потоки обумовлені електричними і магнітними скалярними потенціалами, а також потенційними і динамічними складовими напруженостей електричного і магнітного полів. Енергетичні співвідношення апробовані на прикладі плоских листів електричного і магнітного струмів.

*Ключові слова:* електричні та магнітні заряди і струми, потоки електромагнітної енергії, потенційні електричні і магнітні поля.

Лл. 02. Бібліогр.: 07 найм.

UDC 537.87

Prijmenko S. D. **Electromagnetic Energy Flows at the Presence of Potential Electric and Magnetic Fields** / S. D. Prijmenko, K. A. Lukin // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17. № 1, 2. – P. 28–34.

Electromagnetic energy flows for electric and magnetic charges and currents are considered which are formed by potential electric and magnetic fields. These flows are caused by electric and magnetic scalar potentials, as well as by potential and dynamic components of the electric and magnetic field strengths. The energy relationships are approved using flat sheets of electric and magnetic currents as an example.

*Keywords:* electric and magnetic charges and currents, fluxes of electromagnetic energy, potential electric and magnetic fields.

Fig. 02. Ref.: 07 items.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ТОКА ВДОЛЬ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ ЭЛЕКТРОННЫМ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЗАРЯДОМ

С. Д. ПРИЙМЕНКО, Ю. Ф. ЛОНИН, К. А. ЛУКИН, И. Н. ОНИЩЕНКО

Получено интегральное уравнение для спектральных компонент тока линейной антенны с ненулевым значением тока на одном из ее концов. Сформулированы граничные условия на торце линейной антенны, к которому с постоянной скоростью вдоль оси антенны движется релятивистский точечный заряд. Граничные условия описывают как спектральную компоненту тока, так и ток на торце антенны до соприкосновения заряда с антенной, а также в момент пересечения зарядом торца антенны. В асимптотическом приближении решено интегральное уравнение для временной спектральной компоненты тока вдоль линейной антенны при приближении точечного заряда к антенне. Рассчитана зависимость спектральной компоненты тока от продольной координаты, частоты и радиуса антенны

*Ключевые слова:* антенна монополюльно-дипольного типа, линейная антенна, интегральное уравнение, граничные условия, релятивистский точечный заряд, спектральная компонента тока.

### ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, впервые термин монополь, под которым понимается линейный излучатель, в применении к антенным системам использован в [1] (р. 147). В настоящей публикации вводится понятие монополюльно-дипольной антенны, где последняя представляет собой антенну с ненулевыми электрическими монополюльным [2] (с. 280) и дипольным моментами. Перспективным типом такой антенны является линейная антенна, возбуждаемая релятивистским электронным банчем [3]. Последний движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$  в вакууме вдоль оси антенны по направлению к одному из ее концов. В приближении точечного заряда электронный банч до соприкосновения с антенной, возбуждает ее ближним полем, окружающим точечный заряд  $Q$  (рис. 1). Линейная антенна представляет собой идеально проводящий цилиндр радиуса  $a$  и длины  $L$ . В момент пересечения торца антенны, она возбуждается плотностью тока точечного заряда

$$\vec{j}_q = Q \cdot v_q \cdot \vec{z}_0 \frac{1}{\rho} \delta(\rho) \cdot \delta(z - v_q t) \quad (\vec{z}_0 \text{ есть единичный вектор вдоль оси Oz}).$$


Рис.1

Система электрических зарядов характеризуется электрическими монополюльным и дипольным моментами. Монополюльный момент является скаляром и равен полному заряду системы [2] (с. 280), дипольный момент является вектором и имеет размерность заряда, умноженному на смещение. Если полный заряд системы не равен нулю, то скалярный потенциал сис-

темы на больших расстояниях или в волновой зоне приближается к скалярному потенциалу точечного заряда или электрического монополя. Скалярные потенциалы монополя и диполя обратно пропорциональны первой и второй степени расстояния между точкой источника и точкой наблюдения соответственно [4] (с. 27). Скалярный потенциал системы зарядов одного знака с плотностью заряда в ретардированный момент времени является кулоновским потенциалом или скалярным потенциалом в нулевом [5] (с. 51), т. е. монополюльном приближении. Скалярный потенциал системы зарядов с ненулевой расходимостью тока или с ненулевой производной по времени от плотности заряда является скалярным потенциалом в дипольном или первом приближении [5] (с. 51).

При полете заряда к антенне монополь и диполь представлены точечным зарядом и антенной соответственно. Антенна является в целом электрически нейтральной. При пересечении релятивистским зарядом поверхности антенны заряд на торце антенны дискретно во времени обращается в нуль, ток изменяется во времени дельтаобразно, на торце формируется генератор тока. Заряд антенны дискретно во времени изменяется на  $Q$ , плотность электрического заряда в линейном приближении уменьшается до  $\frac{Q}{L}$  ( $L$  есть длина антенны), а ее скалярный потенциал в монополюльном или нулевом приближении меняется от нуля до конечной величины.

В приведенном материале:

- Сформулированы граничные условия на торце линейной антенны, которые связывают ток антенны с плотностью тока релятивистского точечного заряда.
- Отмечено, что возбуждение линейной антенны обусловлено двумя причинами: полем вокруг точечного заряда и током на торце антенны.

Спектральная компонента поля вокруг точечного заряда описывается неоднородной плоской волной [6]

(с. 41) с действительной компонентой волнового вектора вдоль оси Oz  $k_z = \omega/v_q$ , ( $\omega = 2\pi \cdot f$ ,  $f$  — частота) и мнимой компонентой волнового вектора в радиальном направлении  $k_\rho = i \frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}}$ . Волна распространяется в продольном направлении и затухает в радиальном направлении. Поверхностью постоянной фазы есть плоскость  $z = const$ , а поверхностью постоянной амплитуды является цилиндрическая поверхность  $\rho = const$ .

Торец антенны, ближайший к заряду, образован пересечением плоскости  $z = 0$  и цилиндрической поверхности  $\rho = a$ , т. е. представляет собой круг поперечной ориентации радиуса  $a$ . Ток на конце антенны  $I_z(t, \rho = a, z = 0)$  есть ток продольной ориентации, пересекающий криволинейное ребро цилиндра при  $r \in \{\rho = a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = 0\}$ . Этот ток включает две составляющие. Первая составляющая образована зарядами, стекающими с торца через криволинейное ребро на боковую поверхность антенны. Данная составляющая определяется продольной компонентой обобщенного тока. Вторая составляющая образована азимутальной компонентой магнитного поля на криволинейном ребре антенны. Продольная компонента обобщенного тока до столкновения заряда с антенной представлена аксиальной составляющей тока смещения, а при столкновении представлена током релятивистского заряда.

Продольная компонента электрического поля точечного заряда нормальна к торцевой поверхности антенны и касательна к боковой поверхности антенны. Она формирует заряд на торцевой поверхности и стороннюю электродвижущую силу на боковой поверхности антенны. Продольная компонента электрического поля изменяет заряд на торцевой и ток на боковой поверхности антенны. Заряды, перемещаясь с торцевой на боковую поверхность антенны через криволинейное ребро, формируют на конце антенны ненулевой ток.

Аксиальная компонента магнитного поля изменяет ток как на торцевой, так и боковой поверхностях антенны.

Для релятивистского заряда током смещения по сравнению с током заряда можно пренебречь. При подлете точечного релятивистского заряда к антенне спектральная компонента тока на конце антенны, формируемая аксиальной компонентой магнитного поля преобладает над спектральной компонентой тока на конце антенны, формируемой продольной компонентой тока смещения.

До соприкосновения заряда с антенной поле заряда перераспределяет заряды вдоль антенны, однако антенна в целом остается электрически нейтральной.

Это приводит к излучению в дипольном приближении.

Получено интегральное уравнение для временной спектральной компоненты тока вдоль линейной антенны, возбуждаемой релятивистским зарядом. Это уравнение решено в асимптотическом приближении при движении точечного заряда к антенне. Рассчитана зависимость спектральной компоненты тока от продольной координаты, частоты и радиуса антенны.

## 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

### 1.1 Граничные условия

1.1.1 *Электрическое поле.* Воспользуемся граничными условиями на поверхности идеально проводящего тела для нестационарных полей (5.52), (5.53) [7, с. 192]

$$\left( -\frac{\partial \vec{D}(t'(t), \rho_e'(t'), \varphi_e'(t'), z_e'(t'); t, \rho_s, \varphi_s, z_s)}{\partial t} \cdot \vec{z}_0 \right) = Q \cdot v_q \frac{1}{\rho_s} \delta(\rho_s) \cdot \delta(z_s - v_q t) + \text{div}_s \vec{j}_s(t, \rho_s, \varphi_s, z_s), \quad (1)$$

где  $\vec{D}(t'(t), \rho_e'(t'), \varphi_e'(t'), z_e'(t'); t, \rho_s, \varphi_s, z_s)$  (размерность  $[\frac{Q}{m^2}]$ ) — вектор электрического смещения,

$\vec{j}_q = Q \cdot v_q \cdot \vec{z}_0 \frac{1}{\rho_s} \delta(\rho_s) \cdot \delta(z_s - v_q t)$  и  $\vec{j}_s(t, \rho_s, \varphi_s, z_s)$  — плотности тока релятивистского точечного заряда и поверхностного тока на торце антенны.

Перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_z(t'(t), \rho_e'(t'), \varphi_e'(t'), z_e'(t'); t, \rho_s, \varphi_s, z_s)}{\partial t} = \\ = Q \cdot v_q \cdot \frac{1}{\rho_s} \delta(\rho_s) \cdot \delta(z_s - v_q t) + \\ + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial \rho_s} (\rho_s \cdot j_{\rho s}(t, \rho_s, \varphi_s, z_s)). \end{aligned} \quad (2)$$

Выполним интегрирование по поверхности торца антенны

$$\begin{aligned} - \int_0^a \rho_s d\rho_s \int_0^{2\pi} d\varphi_s \frac{\partial D_z(t'(t), \rho_e'(t'), \varphi_e'(t'), z_e'(t'); t, \rho_s, \varphi_s, z_s)}{\partial t} = \\ = Q \cdot v_q \cdot 2\pi \cdot \delta(z_s - v_q t) + I_z(t, \rho_s = a, z_s), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a$  — радиус линейной антенны,  $Q \cdot v_q \cdot 2\pi \cdot \delta(z_s - v_q t)$  — ток релятивистского точечного заряда на торце антенны, а

$$I_z(t, \rho_s = a, z_s) = 2\pi a \cdot j_{\rho s}(t, \rho_s = a, z_s). \quad (4)$$

Величина  $I_z(t, \rho_s = a, z_s)$  есть ток линейной антенны на ее торце. Принимаем во внимание, что плот-

ность тока смещения для релятивистского заряда является малой величиной

$$\frac{\partial D_z(t'(t), \rho'_e(t'), \varphi'_e(t'), z'_e(t'); t, \rho_s, \varphi_s, z_s)}{\partial t} \approx 0. \quad (5)$$

Учитывая (5) и полагая в (3)  $z_s = 0$ , получаем граничное условие для тока на торце линейной антенны при возбуждения ее релятивистским точечным зарядом

$$I_z(t, \rho_s = a, z_s = 0) \approx Q \cdot 2\pi \cdot \delta(t). \quad (6)$$

В пренебрежении током смещения, ток на конце линейной антенны  $I_z(t, \rho_s = a, z_s = 0)$  равен току точечного заряда  $Q \cdot 2\pi \cdot \delta(t)$ .

Для спектральной компоненты тока граничное условие (6) принимает вид

$$I_z(\omega, \rho_s = a, z_s = 0) \approx Q. \quad (7)$$

1.1.2 *Магнитное поле.* Азимутальная спектральная компонента магнитного поля, создаваемая точечным зарядом, движущимся с постоянной скоростью  $\vec{v}_{qz} = v_q \cdot \vec{z}_0$  в продольном направлении [8] в системе координат, связанной с зарядом в момент наблюдения

$$H_\varphi(\omega, r) = \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \frac{Q\omega}{2\pi v} \left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right) \times \\ \times K_1\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \rho\right) e^{\frac{i\omega}{v} z}. \quad (8)$$

Откуда спектральная компонента тока на торце антенны ( $l = 0$ ), ближайшем к релятивистскому заряду, при подлете последнего к антенне

$$I_q(\omega, \rho = a, z = d) = \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \frac{Q\omega a}{v_q} \left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right) \times \\ \times K_1\left(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a\right) e^{\frac{i\omega}{v} d}, \quad (9)$$

где  $d$  – расстояние от заряда до торца антенны.

Результирующая напряженность магнитного поля точечного заряда, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда до точки наблюдения (73.5) [5, с. 46]. Поэтому спектральную компоненту тока на торце антенны ( $l = L$ ), удаленным от релятивистского заряда при подлете последнего к антенне, полагаем равной нулю

$$I(\omega, \rho = a, z = l = L) = 0. \quad (10)$$

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

### 2.1 Пространственно-частотное измерение

Согласно (4.19) [9, с. 192] интегральное уравнение для частотной спектральной компоненты тока  $I(\omega, l)$  вдоль линейной антенны

$$\vec{E}^i(\omega, l) \cdot \vec{l} = \frac{(-1)i}{\omega \epsilon_0} \int_0^L [I(\omega, l') \varphi(\omega; l', l) \frac{\omega^2}{c^2} + \\ + \frac{\partial I(\omega, l')}{\partial l'} \frac{\partial \varphi(\omega; l', l)}{\partial l}] dl', \quad (11)$$

где  $\vec{E}^i(\omega, l)$  – напряженность стороннего электрического поля,  $\vec{l}$  – единичный вектор вдоль антенны,  $L$  – длина антенны,  $\varphi(\omega, l', l)$  – функция Грина для тонкого проводника

$$\varphi(\omega; l', l) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\frac{i\omega}{c} \sqrt{(l-l')^2 + a^2}}}{\sqrt{(l-l')^2 + a^2}}. \quad (12)$$

Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\int_0^L \frac{\partial I(\omega, l')}{\partial l'} \frac{\partial \varphi(\omega; l', l)}{\partial l} dl' = I(\omega, l') \frac{\partial \varphi(\omega; l', l)}{\partial l} \Big|_0^L - \\ - \int_0^L I(\omega, l') \frac{\partial}{\partial l'} \frac{\partial \varphi(\omega; l', l)}{\partial l} dl' = \\ = -I(\omega, l' = 0) \frac{\partial \varphi(\omega; l' = 0, l)}{\partial l} - \\ - \int_0^L I(\omega, l') \frac{\partial}{\partial l'} \frac{\partial \varphi(\omega; l', l)}{\partial l} dl'. \quad (13)$$

Подставим (12), (13) в (11), и учтем граничные условия (9), (10).

$$E_j^i(\omega, l) = \frac{(-1)j\omega}{4\pi c^2 \epsilon_0} \int_0^L I(\omega, l') \varphi(\omega; l', l) dl' + \\ + \frac{i}{4\pi \omega \epsilon_0} \int_0^L I(\omega, l') \frac{\partial}{\partial l'} \frac{\partial \varphi(\omega; l', l)}{\partial l} dl' + \\ + \frac{(-1)}{4\pi c \epsilon_0} I_{qz}(\omega, l' = 0) \frac{e^{\frac{i\omega}{c} \sqrt{l^2 + a^2}}}{\sqrt{l^2 + a^2}} \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}} + \\ + \frac{(-1)i}{4\pi \omega \epsilon_0} I_{qz}(\omega, l' = 0) \frac{e^{\frac{i\omega}{c} \sqrt{l^2 + a^2}}}{(l^2 + a^2)} \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}. \quad (14)$$

Соотношение (14) является интегральным уравнением для спектральной компоненты  $I(\omega, l)$  тока линейной антенны, которая возбуждается релятивистским зарядом на ее торце.

Третье слагаемое в правой части (14) есть спектральной компонентой потенциального электрического поля излучения вдоль оси антенны  $E_l^{PS}(\omega, l, \rho = 0) = E_z^{PS}(\omega, z, \rho = 0)$ , которая перемещается в волновую зону и обусловлена спектральной компонентой тока возбуждаемого релятивистским зарядом на торце антенны  $I_{qz}(\omega, l' = 0)$

$$E_l^{PS}(\omega, l, \rho = 0) = E_z^{PS}(\omega, z, \rho = 0) = \frac{(-1)}{4\pi c \epsilon_0} I_{qz}(\omega, l' = 0) \frac{e^{\frac{i\omega}{c}\sqrt{l^2+a^2}}}{\sqrt{l^2+a^2}} \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}}. \quad (15)$$

Соотношение (15) определяет спектральную компоненту потенциальной составляющей напряженности электрического поля дифракционного излучения. Оно формируется на торце антенны полем релятивистского заряда при подлете его к антенне.

Четвертое слагаемое в правой части (14) определяет спектральную компонента продольной составляющей квазистационарного рассеянного поля вдоль оси антенны  $E_l^{CS}(\omega, l, \rho = 0) = E_z^{CS}(\omega, z, \rho = 0)$ , которое остается в ближней зоне и обусловлено спектральной компонентой заряда, наводимой на торце антенны  $Q_q(\omega, l' = 0)$ .

$$E_l^{CS}(\omega, l, \rho = 0) = E_z^{CS}(\omega, z, \rho = 0) = \frac{(-1)i}{4\pi\omega\epsilon_0} I_{qz}(\omega, l' = 0) \cdot \frac{e^{\frac{i\omega}{c}\sqrt{l^2+a^2}}}{(l^2+a^2)^2} \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}} = \frac{(-1)i}{4\pi\epsilon_0} Q_q(\omega, l' = 0) \frac{e^{\frac{i\omega}{c}\sqrt{l^2+a^2}}}{(l^2+a^2)^2} \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}}. \quad (16)$$

Интегральное уравнение (14) определяет процесс трансформации спектральной компоненты тока релятивистского заряда в спектральную компоненту тока антенны как при движении заряда к антенне, так и пересечении торца антенны.

Принимая во внимание выражение для спектральной компоненты напряженности электрического поля вдоль антенны  $E_z(\omega, r)$ , создаваемой релятивистским точечным зарядом [8]

$$E_z(\omega, r) = E_l(\omega, \rho = a, l) = -iQ\omega/2\pi\epsilon_0 v_q^2 (1 - \frac{v_q^2}{c^2}) \times \times K_0(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a) e^{\frac{i\omega}{v_q} l} \quad (17)$$

и фильтрующее свойство функции Грина неограниченного пространства [10] (с. 55), получаем в асимптотическом приближении решение уравнения (14)

$$I(\omega, l) = \text{Re } I(\omega, l) + \text{Im } I(\omega, l). \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \text{Re } I(\omega, l) = \text{Re } I_l(\omega, l) = & \frac{(-1)Q\omega ca}{2.3 \cdot v_q^2} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \times \\ & \times K_0(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a) \sin \frac{\omega}{v_q} l + \frac{(-1)Q\omega a^2}{4 \cdot 2.3 \cdot v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \times \\ & \times K_1(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a) \frac{l}{(l^2 + a^2)} \cos \frac{\omega}{v_q} \sqrt{l^2 + a^2} + \\ & + \frac{(-1)Qca^2}{4 \cdot 2.3 \cdot v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \times \\ & \times K_1(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a) \frac{l}{(l^2 + a^2)^{3/2}} \sin \frac{\omega}{v_q} \sqrt{l^2 + a^2}; \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im } I(\omega, l) = \text{Im } I_l(\omega, l) = & Q\omega ca / 2.3 \cdot v_q^2 \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \times \\ & \times K_0(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a) \cos \frac{\omega}{v_q} l + \frac{(-1)Q\omega a^2}{4 \cdot 2.3 \cdot v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \times \\ & \times K_1(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a) \frac{l}{(l^2 + a^2)} \sin \frac{\omega}{v_q} \sqrt{l^2 + a^2} + \\ & + Qca^2 / 4 \cdot 2.3 \cdot v_q \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \times \\ & \times K_1(\frac{\omega}{v_q} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} a) \frac{l}{(l^2 + a^2)^{3/2}} \cos \frac{\omega}{v_q} \sqrt{l^2 + a^2}. \quad (20) \end{aligned}$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

При решении интегрального уравнения (14) релятивистский точечный заряд равен  $Q = -1.0 \cdot 10^{-11} Q$ , скорость  $\beta = v/c = 0.94$ , расстояние от заряда до ближайшего к нему торца антенны  $d = 3 \cdot 10^{-3} m$ . Зависимость действительной части тока  $\text{Re } J_l$  от радиуса изображено на рис. 2. Уменьшение радиуса от  $a = 1.5 \cdot 10^{-2} m$  до  $a = 1.5 \cdot 10^{-3} m$  приводит к увеличению тока в десять раз.

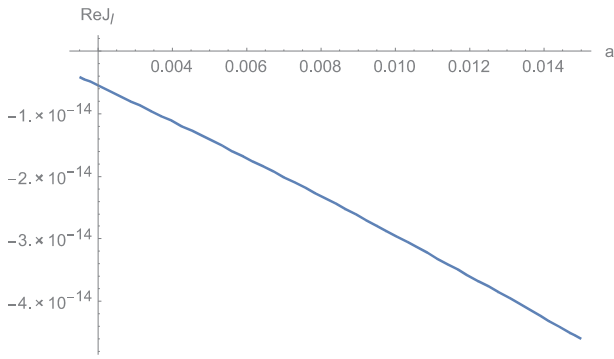


Рис. 2. Зависимость  $ReJ_l(a)$  ( $l=1.5\text{ m}$ ,  $f=1\cdot 10^8\text{ Hz}$ ,  $d=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$ )

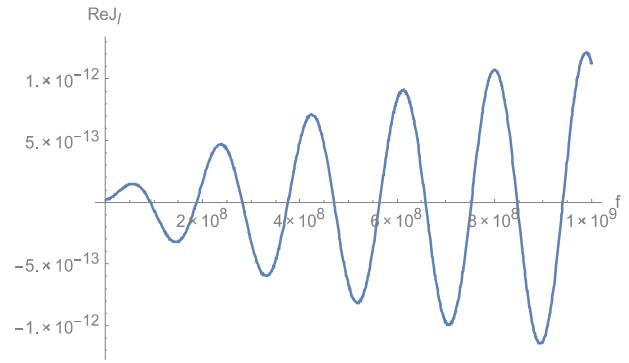


Рис. 5. Зависимость  $ReJ_l(f)$  ( $l=1.5\text{ m}$ ,  $a=1.5\cdot 10^{-2}\text{ m}$ ,  $0 < f < 1.0\cdot 10^9\text{ Hz}$ ,  $d=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$ )

Зависимость  $ReJ_z$  от частоты в интервале  $0 < f < 1.0\cdot 10^7\text{ Hz}$ ,  $0 < f < 1.0\cdot 10^8\text{ Hz}$ ,  $0 < f < 1.0\cdot 10^9\text{ Hz}$  отображают рис. 3, рис. 4, рис. 5 соответственно.

Зависимость  $ReJ_z$  от продольной координаты для частот  $f=1.0\cdot 10^7\text{ Hz}$ ,  $f=1.0\cdot 10^8\text{ Hz}$ ,  $f=1.0\cdot 10^9\text{ Hz}$  отображают рис. 6, рис. 7, рис. 8 соответственно.

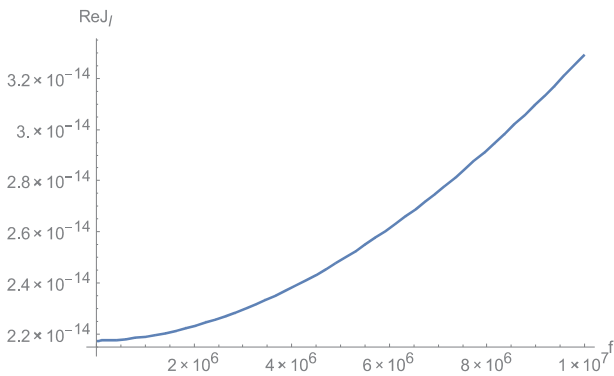


Рис. 3. Зависимость  $ReJ_l(f)$  ( $l=1.5\text{ m}$ ,  $a=1.5\cdot 10^{-2}\text{ m}$ ,  $0 < f < 1.0\cdot 10^7\text{ Hz}$ ,  $d=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$ )

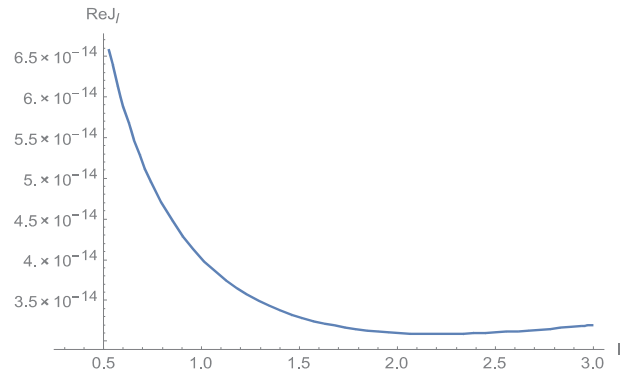


Рис. 6. Зависимость  $ReJ_l(l)$  ( $a=1.5\cdot 10^{-2}\text{ m}$ ,  $f=1.0\cdot 10^7\text{ Hz}$ ,  $d=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$ )

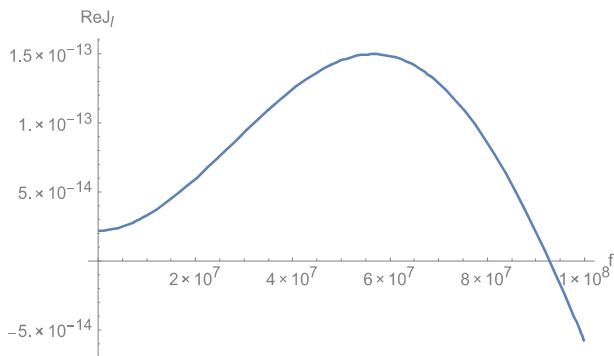


Рис. 4. Зависимость  $ReJ_l(f)$  ( $l=1.5\text{ m}$ ,  $a=1.5\cdot 10^{-2}\text{ m}$ ,  $0 < f < 1.0\cdot 10^8\text{ Hz}$ ,  $d=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$ )

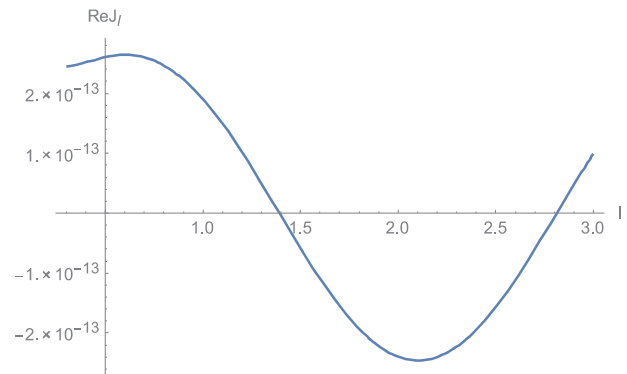


Рис. 7. Зависимость  $ReJ_l(l)$  ( $a=1.5\cdot 10^{-2}\text{ m}$ ,  $f=1.0\cdot 10^8\text{ Hz}$ ,  $d=3\cdot 10^{-3}\text{ m}$ )

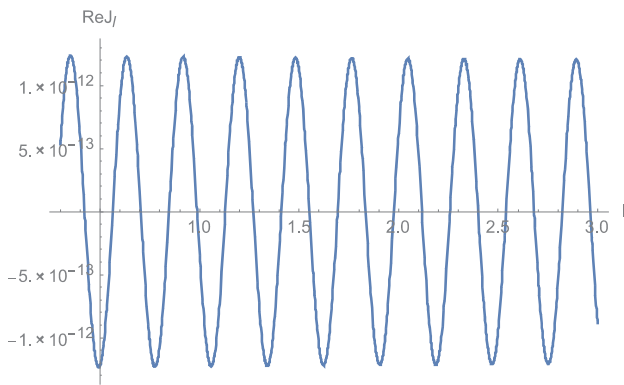


Рис. 8. Зависимость  $\text{Re} J_l(l)$   
 ( $a = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $f = 1.0 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ ,  $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ )

### ВЫВОДЫ

На торце линейной антенны, пересекаемым электрическим зарядом, сформулированы граничные условия, которые связывают ток антенны с током и полем релятивистского точечного заряда. Граничные условия сформулированы в приближении стороннего поля и пренебрежении током смещения. При движении заряда в вакууме вклад нормальной компоненты электрического поля в ток на торце антенны считается малым по сравнению с вкладом азимутальной компоненты магнитного поля. Полный ток заменяется током точечного заряда при пересечении торца антенны релятивистским зарядом. Граничные условия при пересечении торца антенны получены как в пространственно-временном, так и пространственно-частотном представлениях.

Возбуждение линейной антенны вызвано двумя причинами: полем вокруг точечного заряда и током точечного заряда. Поле вокруг точечного заряда описывается неоднородной плоской волной, а ток точечного заряда на торцевой поверхности дельтаобразно изменяется со временем.

В асимптотическом приближении решено интегральное уравнение для временной спектральной компоненты тока вдоль линейной антенны при приближении точечного заряда к антенне. Рассчитана зависимость тока вдоль линейной антенны от продольной координаты, частоты и радиуса антенны.

До пересечения антенны точечным зарядом ее суммарный электрический заряд равен нулю, антенна в целом является электрически нейтральной, ее кулоновский потенциал или скалярный потенциал в нулевом или монополярном приближении равен нулю. При пересечении антенны точечным зарядом ее суммарный электрический заряд дискретно во времени меняется от нуля до конечной величины, антенна в целом становится электрически заряженной, ее кулоновский потенциал или скалярный потенциал в нулевом или монополярном приближении дискретно во времени меняется от нуля до конечной величины.

### Литература

- [1] *B. Levin*. The theory of thin antennas and its use in antenna engineering. «Bentham Science Publishers», 2013.
- [2] *Э. Парселл*. Электричество и магнетизм. Классическая электродинамика. М: «Наука», 1983.
- [3] *Гапоненко Н.И., Горбань А.М., Горожанин Д.В., Курилко В.И., Латинский С.М., Лонин Ю.Ф., Харченко И.Ф.* Формирование интенсивных электромагнитных импульсов, излучаемых при прямом возбуждении изолированной штыревой антенны короткоимпульсным сильноточечным РЭП. Физика Плазмы. Т.26, N 4, 2000, С.387–389.
- [4] *В. Пановский, М. Филитс*. Классическая электродинамика. М: «Физматгиз», 1963.
- [5] *Мешков И.Н., Чириков Б.В.* Релятивистская электродинамика. Новосибирск. «НГУ», 1982.
- [6] *Д. В. Сивухин*. Общий курс физики. Оптика. М: «Наука», 1980.
- [7] *В.Т. Ерофеевко, И.С. Козловская*. Аналитическое моделирование в электродинамике. – М.: «Либроком», 2014.
- [8] *S.D. Prijmenko, L.A. Bondarenko*. On realization of the transition radiation antenna. Proceedings IEEE 2008 Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium. Kiev, Ukraine. September 22-24, 2008. P.30-33.
- [9] Вычислительные методы в электродинамике. Под ред. *Р.Митры*. М.: 1977.
- [10] *Г.Т. Марков, Д.М. Сазонов*. Антенны. М.: Энергия. 1975.

Поступила в редколлегию 16.05.2018

**Приيمنко Сергей Дмитриевич**, фото и сведения об авторе см. на стр. 33.



**Лонин Юрий Федорович**, доктор технических наук, кандидат физико-математических наук, начальник отдела, Институт плазменной электроники и новых методов ускорения ННЦ ХФТИ НАНУ. Область научных интересов: физика плазмы, физика ускорителей заряженных частиц, физика мощных импульсных генераторов микроволнового, ЭМИ и СЖР излучений и их распространение. Воздействие микроволнового, ЭМИ и СЖР излучений на РЭА и медико-биологические объекты.

**Лукин Константин Александрович**, фото и сведения об авторе см. на стр. 28.



**Онищенко Иван Николаевич**, доктор физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент НАНУ, заместитель директора института, Институт плазменной электроники и новых методов ускорения ННЦ ХФТИ НАНУ. Область научных интересов: плазменная электроника, новые методы ускорения, генерация мощных регулярных и стохастических электромагнитных колебаний, физика интенсивных релятивистских пучков.

УДК 537.87, 621.396.67

Прийменко С. Д. **Розподіл спектральних компонент струму уздовж лінійної антени, збуджуваної електронним релятивістським зарядом** / С. Д. Прийменко, Ю. Ф. Лонін, К. А. Лукін, І. М. Оніщенко // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 35–41.

Отримано інтегральне рівняння для струму лінійної антени з ненульовим значенням струму на одному з її кінців. Сформульовано граничні умови на торці лінійної антени, до якого з постійною швидкістю вздовж осі антени рухається релятивістський точковий заряд. Граничні умови описують струм на торці антени до стикання заряду з антеною, а також в момент перетину зарядом торця антени. В асимптотичному наближенні вирішено інтегральне рівняння для часової спектральної компоненти струму уздовж лінійної антени при наближенні точкового заряду до антени. Розраховано залежність струму від поздовжньої координати, частоти і радіусу антени.

*Ключові слова:* антена монопольно-дипольного типу, лінійна антена, інтегральне рівняння, граничні умови, релятивістський точковий заряд.

Л. 08. Бібліогр.: 10 найм.

UDC 537.87, 621.396.67

Prijmenko S. D. **Distribution of spectral current components along a linear antenna excited by an electron relativistic charge** / S. D. Prijmenko, Yu. F. Lonin, K. A. Lukin, I. N. Onishchenko // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17, № 1, 2. – P. 35–41.

An integral equation for the spectral current components of a linear antenna with a nonzero current at one of its ends is obtained. The boundary conditions at the end of the linear antenna are formulated, to which a relativistic point charge moves along the antenna axis at a constant speed. The boundary conditions describe the spectral current components and the current at the end of the antenna before a charge comes into contact with the antenna, and also at the moment of crossing by the charge of the end of the antenna. In the asymptotic approximation, an integral equation is solved for the time spectral current component along the linear antenna as the point charge approaches the antenna. The dependence of the current on the longitudinal coordinate, frequency and radius of the antenna is calculated.

*Keywords:* antenna of a monopolar-dipole type, linear antenna, integral equation, boundary conditions, relativistic point charge.

Fig. 08. Ref.: 10 items.

## ГОЛОГРАФИЯ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

*В. Е. ИГНАТЬЕВ*

Целью данной статьи является анализ современных тенденций в области голографической ассоциативной памяти на основе нейронных сетей, и показать, как идеи оптической голографической ассоциативной памяти послужили основой для построения цифровой нейронной ассоциативной памяти. На данный момент голографические нейронные сети все еще остаются малоизученными, и нашли слабое применение. В научной прессе присутствует малое количество статей, и практически отсутствуют специализированные книги. Все существующие программные пакеты для работы с голографическими нейронными сетями платные, что существенно осложняет доступ к их исследованию. Рассмотрим эволюцию и переход от обычных нейросетей до нейросетей на комплексных числах, далее до голографических нейронных сетей и многомерной голографической ассоциативной памяти.

*Ключевые слова:* голографическая ассоциативная память, нейросети, комплексные нейронные сети, голографические нейронные сети, многомерная голографическая ассоциативная память.

### ВВЕДЕНИЕ

Ассоциативная память (АП) и вычисления на ее основе являются базисом человеческого разума, именно поэтому исследования в этой области вызывают такой бурный интерес у многих исследователей. В тоже время на аналогии между принципом работы голограммы и человеческой памяти обращали внимание Д. Габор, а позднее Ю.Н. Денисюк. В статье Д. Габора [1], уже ставшей классической, миру была представлена оптическая голографическая модель ассоциативной памяти (ОГАП). Позже, исследования такого типа памяти в трехмерных средах были сделаны ван Хирденом [2]. По мнению ван Хирдена, сходство некоторых свойств голограммы и мозга подтверждает гипотезу английского физиолога Берля [3] о том, что мозг хранит каждый бит информации не в одиночной пространственно-локализованной ячейке, а в виде одиночной пространственной гармонике возбуждения, заполняющей весь объем мозга.

Такой тип памяти имеет ряд преимуществ по сравнению с локализованными источниками памяти. Во-первых, в таком случае повреждение локальных участков памяти не приводит к полному исчезновению всей информации, а в некоторых случаях возможно даже дальнейшее восстановление утраченной информации. Во-вторых, вход в такую память можно осуществить из любого места. В-третьих, емкость такого рода памяти грандиозна и была теоретически оценена в [2]. В 1971 году Виславом [4] была предложена практическая реализация ОГАП.

Основой для использования голографии как ассоциативной памяти, заложена в самом принципе голограммы. Голограмма представляет из себя запись интерференционного паттерна на фоточувствительном материале, полученного путем интерференции

предметной и опорной когерентной волны, а также дальнейшее восстановление предметной волны, посредством освещения голограммы опорной волной, что можно трактовать как установление ассоциации или соответствия между предметной и опорной волной.

Другой технологией, послужившей основой для искусственной ассоциативной памяти, стали нейронные сети. После появления первых нейросетей [5], многие ученые быстро осознали возможность их применения в этой области. Так наиболее известной нейронной сетью такого типа является полносвязная сеть Хопфилда описанная в работе [6]. Эта работа пролила свет на то обстоятельство, что заимствованные из природы сети, состоящие из нейроподобных элементов, могут быть использованы в качестве вычислительного устройства. Что послужило толчком для многих исследователей из различных областей знания для дальнейшего изучения подобного класса сетей. При этом они преследовали двоякую цель: лучшее понимание того, как работает мозг, а также найти возможность применения мозгоподобных свойств этих сетей для решения проблем, которые не поддавались решению традиционными методами. Примечательно, что в дальнейшем, сети Хопфилда получили реализацию на голографических оптических корреляторах Вандер Люгта [7].

### 1. АССОЦИАТИВНАЯ ПАМЯТЬ НА ОСНОВЕ ОПТИЧЕСКОЙ ГОЛОГРАФИИ

Рассмотрим упрощенную версию записи голограммы, представленную на рисунке 1. Как мы видим из рисунка, две волны падают на фотографическую пластинку Р, одна волна опорная S, вторая объектная R, которая на самом деле представляет из себя волновой фронт  $R(x, y)$ . На плоскости пластины происхо-

дит интерференция двух волн с дальнейшей их регистрацией в фотоматериале.

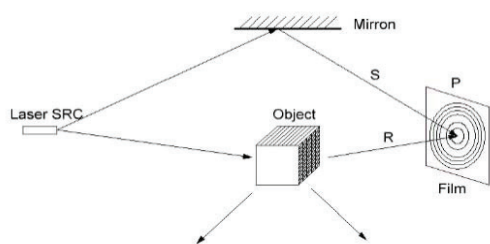


Рис. 1. Запись голограммы

Математически опишем этот процесс, опорная волна выражается формулой  $K = K_0 e^{-ikx}$ , тогда распределение интенсивности в плоскости голограммы определяется выражением:

$$\begin{aligned}
 I(x, y) &= |R(x, y) + K_0 e^{-ikx}|^2 = \\
 &= |R(x, y)|^2 + K_0^2 + K_0 \overline{R(x, y)} e^{-ikx} + K_0 R(x, y) e^{-ikx} = \\
 &= I_A + I_B + I_C + I_D.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Во время записи интерференционного рисунка на пленке, создается дифракционная решетка. При этом пропускная способность  $t(x, y)$  пленки в каждом ее участке пропорциональна  $I(x, y)$ . Полученная таким способом запись называется голограммой.

Снова облучим голограмму опорным пучком. Результирующее поле может быть описано следующим образом:

$$\begin{aligned}
 O(x, y) &= t(x, y) K_0 e^{-ikx} = K_0 I(x, y) e^{-ikx} = \\
 &= K_0 (K_0^2 + |R(x, y)|^2) e^{-ikx} + K_0 \overline{R(x, y)} e^{-ikx} + \\
 &+ K_0 |R(x, y)| = (A + B) + C + D.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Из формулы видно, что после всех преобразований у нас получилось три исходящих волны, как показано на рисунке 2. Но только волна D содержит в себе полностью и правильно восстановленный волновой фронт  $R(x, y)$ . Что примечательно, этот же способ может быть использован для восстановления опорной волны S, однако в этом случае требуется облучить голограмму непосредственно волновым

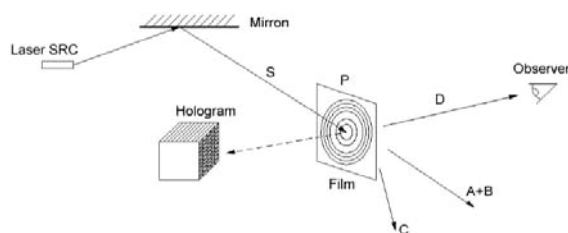


Рис. 2. Схема восстановления голограммы

фронтом  $R(x, y)$ . Эта идея впервые была выдвинута Габором в его работе [1] и заложила основу голографической ассоциативной памяти.

Если вместо опорной волны использовать волновой фронт, полученный путем облучения другого объекта, тогда интерференционный паттерн двух волновых фронтов от двух объектов будет представлять из себя ассоциацию двух объектов. После облучения, полученной таким образом голограммы, волной одного из объектов, мы восстановим изображение другого объекта, и наоборот. На одной фотопластинке можно записать не одну пару объектов, а множество различных ассоциативных пар. При этом все записанные пары будут находиться в суперпозиции по отношению друг другу.

ОГАП имеет ряд преимуществ. Во-первых, запись информации имеет распределенный характер, т. е. сохраненная информация сохранена на всей плоскости голограммы, а точнее во всем ее объеме. Что в свою очередь обеспечивает высокую помехоустойчивость и защиту от локальных повреждений. Повреждение части голограммы не приводит к потере всей информации, а приводит лишь к небольшим потерям и ухудшению качества голограммы или восстановленных изображений по голограмме. Во-вторых, высокая плотность записи. Как было описано выше на одной голограмме может быть записано огромное количество голограмм и ассоциативных пар.

## 2. ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОСЕТИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (НИКЧ)

Вычислительные возможности зачастую зависят от способа представления информации. Традиционно искусственные нейронные сети (ТНС) работают с вещественными числами, что для некоторых случаев накладывает определенные ограничения. Это послужило причиной создания альтернативных конструкций искусственного нейрона. Одной из таких новых парадигм стало создание нейронов на комплексных числах использующих для работы с данными комплексные числа и преобразование Фурье [8, 9, 10, 11, 12]. Интересная модель комплексного нейрона была представлена в работе [13]. В работе был описан новый тип нейронов для работы со спайковыми или импульсными нейронными сетями предложенными Хопфилдом [14] в 1995 году. Импульсные нейроны были нацелены прежде всего на более корректное моделирование реальных биологических нейронов, в которых, как известно, информация кодируется длительностью импульсов [15]. Было показано, что представление данных в виде комплексных чисел для такого рода сетей существенно облегчает решение многих задач.

Нейрон на комплексных числах структурно похож на традиционный нейрон, за исключением того, что он работает с комплексными числами. Поэтому

внешние данные, которые обычно представляют из себя действительные числа, должны быть сконвертированы в комплексные. Каждый комплексный нейрон имеет набор входов, образующих вектор  $P$ . Для того, чтобы сконвертировать вещественное значение входных данных для одного входа  $p_i$ , необходимо воспользоваться следующей формулой:

$$p_i = e^{i \left( \frac{R}{R_{max}} \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (3)$$

где  $R$  – это вещественное число входных данных,  $R_{max}$  – максимальное значение входных данных. Из формулы видно, что диапазон входных вещественных значений должен быть конечен. Функция агрегации для комплексного нейрона точно такая же, как и для обычного персептрона:

$$q = wp. \quad (4)$$

Здесь  $p \in C^n$  – вектор-столбец входных компонент  $p_i$ ,  $w \in C^n$  – вектор-строка весов  $w_i$  нейрона. Важно заметить, что в отличии от функции агрегации для обычного нейрона, эта функция агрегации нелинейная по отношению к вещественным входным данным.

Функция активации для нейрона на комплексных числах может быть различной, однако чаще всего используется функция вида:

$$a = \begin{cases} 0, & \text{if } |q| < T \\ 1, & \text{if } |q| \geq T \end{cases}, \quad (5)$$

где  $a$  и  $T$  – вещественные числа, а  $q$  – комплексное число. Поскольку функция активации работает с вещественным числом, то  $q$  может быть заменена на более простое выражение для дальнейшего вычисления, а именно на:

$$r = |q|^2. \quad (6)$$

Правило тренировки определяется формулой:

$$\Delta w = \Delta \theta = \theta_{new} - \theta_{old}. \quad (7)$$

Комплексный нейрон использует комплексные числа для представления данных. При этом если мы посмотрим на формулу его обучения (7), то можем увидеть, что это очень грубо соответствует самому простому случаю голографической ассоциативной памяти, когда ассоциация устанавливается между двумя когерентными волнами. Однако ассоциативную память идентичную ОГАП на них построить невозможно, поскольку сам по себе нейрон на комплексных числах идентичен традиционному персептрону.

### 3. ГОЛОГРАФИЧЕСКИЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ (ГНС)

Голографические нейронные сети — это уже отнюдь не новый тип искусственных нейронных сетей. Они были предложены Сазерлендом [16], такие сети сильно отличаются от классических нейронных сетей [5], непривычны во многих аспектах и представляют из себя альтернативу обычным нейросетям.

Их ключевое отличие от традиционных нейросетей – это голографический нейрон. За счет своих особенностей, голографический нейрон преодолевает ограничения, имеющиеся в нейроне на комплексных числах. Он гораздо более мощный чем нейрон традиционной нейронной сети и НИКЧ, заменяет собой целую нейронную сеть. Поэтому, для построения нейронной сети из таких нейронов, требуется гораздо меньше элементов, топология получается очень простая, состоящая из малого количества нейронов, а в некоторых случаях их достаточно несколько штук или всего один нейрон. Достигается такая эффективность за счет использования суперпозиции информации в одном объеме записывающей среды или пространстве памяти, что зависит от технологии реализации нейросети. В грубом приближении это напоминает ОГАП. При этом, оптическая голография представляет из себя запись трехмерного объекта на двухмерной среде, вмещающей внутри себя всю необходимую информацию для дальнейшего восстановления сохраненного изображения. Следует обратить внимание, что в процессе записи как бы теряется одно из измерений, как результат при чистой голографической записи, а если говорить терминами АП – при кодировании и декодировании, повышается плотность записи информации. Аналогичные процессы происходят и в голографических нейронных сетях за счет использования комплексных чисел для работы с данными, что является ключевой их особенностью, сильно отличая их ГНС и НИКЧ.

Голографический нейрон можно рассматривать как черный ящик. Схема голографического нейрона изображена на рисунке 3.

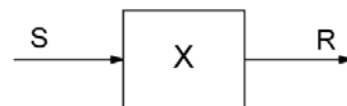


Рис. 3. Голографический нейрон

Процесс работы с ним основан на принципе подачи на вход паттернов стимулов и получении соответствующего ответа, который представляет из себя так же паттерн выходов. Сазерленд, создатель ГНС, вместо термина паттерн часто использует термин поле [16]. Входной паттерн или поле можно записать как одномерную матрицу или поле, соответствующий набор выходов, так же можно выразить матрицей или полем:

$$S = [S_1, S_2, \dots, S_n],$$

$$R = [R_1, R_2, \dots, R_m]. \quad (8)$$

Важно отметить, что каждый входной и выходной вектор представляет из себя комплексное число. Набор входных векторов представляет из себя матрицу, состоящую из комплексных чисел и выражается формулой:

$$S = [\lambda_1 e^{i\theta_1}, \lambda_2 e^{i\theta_2}, \dots, \lambda_n e^{i\theta_n}]. \quad (9)$$

В наборе выходных векторов также все элементы заменяются комплексными числами:

$$R = [\gamma_1 e^{i\phi_1}, \gamma_2 e^{i\phi_2}, \dots, \gamma_m e^{i\phi_m}]. \quad (10)$$

В данных формулах амплитуда представляет из себя уровень вероятности данных, она изменяется в диапазоне  $[0.0, 1.0]$ . Толковать это нужно следующим образом, это уровень доверия к данным, например, если входными данными служит статистика, то это будет вероятность события. Фаза, также, как и для НИКЧ, это актуальные значения данных. Однако в качестве функции конвертации здесь используется функция сигмоида, имеющая следующий вид:

$$\theta_k = 2\pi \left( 1 - e^{-\frac{\mu - S_k}{\sigma}} \right)^{-1}, \quad (11)$$

где  $\sigma$  – стандартное отклонение распределения значений (дисперсия);  $\mu$  – среднее отклонение (математическое ожидание).

Использование сигмоиды в качестве функции конвертации вещественных входных значений, полученных к примеру, с измерительных приборов, дает существенное преимущество ГНС перед НИКЧ, поскольку здесь входные значения могут быть в диапазоне  $[-\infty, +\infty]$ . При этом полученные фазовые значения всегда будут в диапазоне  $[0, 2\pi]$ , с точкой симметрии в  $\pi$ .

Базовая идея использования комплексных чисел, как и в НИКЧ это представление входящей информации в виде вектора на комплексной плоскости. Обучение такой нейронной сети осуществляется за счет определения разницы между поворотом или фазовым углом каждого входного вектора с каждым выходным вектором. Из этого можно вывести следующие принципы обучения голографического нейрона, во-первых, каждый нейрон должен содержать внутри себя матрицу размерности  $n \times m$  состоящую из комплексных чисел, во-вторых, обучение голографического нейрона сводится к нахождению всех значений элементов этой матрицы. Получить ее можно из следующего выражения:

$$[M] = [S]^T \cdot [R], \quad (12)$$

$[S]^T$  – это Эрмитово-сопряженная матрица входной матрицы  $[S]$ . Получается она следующим образом, на примере матрицы  $[A]$  с комплексными элементами, получается из исходной матрицы  $[A]$  транспонированием и заменой каждого элемента комплексно-сопряженным. Для матрицы  $[A]$  в комплексных числах преобразование можно выразить следующими формулами:

$$\text{для } [A] = (a_{j,k}) \quad \overline{[A]} = (\overline{a_{k,j}}),$$

$$\text{для каждого } a = e^{i\vartheta} \quad \bar{a} = e^{-i\vartheta},$$

$$\text{или } a = x + iy \quad \bar{a} = x - iy,$$

$$\text{где } x = \cos \vartheta \quad y = \sin \vartheta. \quad (13)$$

Обучение одной ассоциации между стимулом S и желаемым ответом R осуществляется за счет сохранения корреляции между каждым входным j-м стимулом и k-м выходом в матрице памяти, что в аналогично обучению НИКЧ и выражается формулой:

$$m_{jk} = \lambda_j \gamma_k e^{i(\phi_k - \theta_j)}. \quad (14)$$

Как уже было упомянуто выше, голографические нейронные сети используют принцип суперпозиции информации в одном пространстве памяти. Корреляционная матрица  $[M]$  описывает процесс обучения для одного паттерна стимулов и соответствующего ему паттерна выходов. Поэтому представленную выше технику, по аналогии с ОГАП, можно расширить до записи обучения большого набора входных паттернов стимулов на одной матрице голографического нейрона, что в данном случае представляет собой общее пространство памяти. Введем нумерацию матриц  $[M]$  для каждого из паттернов, тогда для первого паттерна это будет  $[M_1]$ , для второго  $[M_2]$ , для p-го будет  $[M_p]$ . Все паттерны стимулов могут по принципу суперпозиции быть записанными в одной матрице корреляции  $[X]$  по следующему правилу:

$$[X] = [M_1] + [M_2] + [M_3] + \dots + [M_p], \quad (15)$$

где знак «+» обозначает следующую операцию:

$$\text{для } [A] = (a_{j,k}), [B] = (b_{j,k})$$

$$[A] + [B] = (a_{j,k} + b_{j,k}). \quad (16)$$

Заметим еще раз, что  $a_{j,k}$  и  $b_{j,k}$  представляют из себя комплексные числа. Результирующая корреляционная матрица для группы векторов будет иметь следующий вид:

$$[X] = \begin{bmatrix} \sum_p \lambda_1 \gamma_1 e^{i(\varphi_{p,1}-\theta_{p,1})} & \sum_p \lambda_2 \gamma_1 e^{i(\varphi_{p,2}-\theta_{p,1})} & \dots \\ \sum_p \lambda_1 \gamma_2 e^{i(\varphi_{p,1}-\theta_{p,2})} & \sum_p \lambda_2 \gamma_2 e^{i(\varphi_{p,2}-\theta_{p,2})} & \dots \\ \sum_p \lambda_1 \gamma_3 e^{i(\varphi_{p,1}-\theta_{p,3})} & \sum_p \lambda_2 \gamma_3 e^{i(\varphi_{p,2}-\theta_{p,3})} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Теперь рассмотрим процесс получения ответа из предварительно обученной сети. Получение ответа от сети связано прежде всего со считыванием выходного вектора  $[R]$ , при подаче на вход соответствующего входного вектора  $[S]$ . Обозначим через  $[S]^*$  новый вектор входных стимулов или точнее паттерн. Тогда процесс извлечения ответа из сети будет описываться следующим перемножением матриц:

$$[R] = \frac{1}{c} [S]^* \cdot [X], \quad (18)$$

где  $c$  – это фактор нормализации. В качестве фактора нормализации может быть взято просто число входных стимулов, или любая другая функция. Обычно он вычисляется по следующей формуле:

$$c = \sum_1^n \lambda_k^*. \quad (19)$$

Как мы видим из вышеприведенного материала, ГНС построена по принципу ОГАП и наследует все основные ее преимущества. А именно: сохранение информации носит распределенный характер по всей матрице голографического нейрона, вся информация находится в суперпозиции по отношению друг к другу, за счет суммирования матриц корреляции для одного входного и выходного паттерна, благодаря чему достигается высокая плотность сохранения данных.

#### 4. МНОГОМЕРНАЯ ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ АССОЦИАТИВНАЯ ПАМЯТЬ (МГАП)

ГНС Сазерленда [16], описанные в предыдущей главе, явилась одной из первых пионерских работ по голографической нейронной ассоциативной памяти. Рассмотренная Ханом [17], многомерная ассоциативная память обобщает в себе логику ГНС работающей с данными на двумерной плоскости, и представляет данные в форме многомерных комплексных чисел как точек на гиперсфере. Таким образом формула для одного отдельного стимула имеет следующий вид:

$$S_k = \lambda_k e^{i \left( \sum_j^{d-1} i_j \theta_{j,k} \right)}. \quad (20)$$

Стимул представляет из себя функцию от  $S(\lambda_k, \theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_{d-1}^k)$ . При этом каждый из фазовых компонентов  $\theta_j^k$  это сферическая проекция вдоль оси  $i_j$ . Амплитудное значение  $\lambda_k$  несет тоже значение что и в ГНС. Используя формулу для одного стимула можно получить выражения для набора входных значений (паттерна) и соответствующих им ответов:

$$S = \left[ \lambda_1 e^{i \left( \sum_j^{d-1} i_j \theta_{j,1} \right)}, \lambda_2 e^{i \left( \sum_j^{d-1} i_j \theta_{j,2} \right)}, \dots, \lambda_k e^{i \left( \sum_j^{d-1} i_j \theta_{j,n} \right)} \right],$$

$$R = \left[ \lambda_1 e^{i \left( \sum_j^{d-1} i_j \theta_{j,1} \right)}, \lambda_2 e^{i \left( \sum_j^{d-1} i_j \theta_{j,2} \right)}, \dots, \lambda_k e^{i \left( \sum_j^{d-1} i_j \theta_{j,m} \right)} \right]. \quad (21)$$

В целом логика для кодирования и извлечения данных из такой памяти остается такой же, как и для ГНС. Формулы получения матрицы корреляции и получения ответа аналогичны соответствующим формулам (17), (18), (19), для ГНС. В целом МГАП наиболее точно соответствует ОГАП.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Голографические нейронные сети – в некоторых аспектах более мощные и удобные, чем традиционные типы нейросетей. Стоит отметить простоту их использования, а также их быструю обучаемость. В статьях Роберта Мангера [18] [19] [20], приводятся результаты практического применения ГНС, а так же их анализ. В сравнении с ТНС, диапазон возможности их применения шире, к примеру, в работе [19] показано использование ГНС для сжатия информации, на что не способны ТНС. Однако во многих случаях, как указывается в [18], их применение требует учета особенностей ГНС. Заложенные базовые принципы построения таких сетей из классической голографии, дает ряд ценных свойств, таких как компактность хранения информации и использование комплексных чисел для работы с информацией, что во многих случаях является просто более удобным представлением, чем использование вещественных чисел, а в некоторых ситуациях разрешает фундаментальные ограничения.

Следует так же отметить, что в статье не были затронуты и освещены достаточно глубоко темы появления ошибки обучения и разбалансировки ГНС после записи в одну сеть большого количества пат-

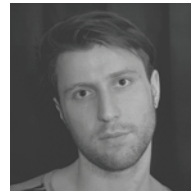
тернов [21], а также лишь вскользь была затронута тема бимодального способа представления данных [17] и уровня вероятности данных [21].

На сегодняшний день НИКЧ, ГНС и МГАП получили различные способы реализации. Имеются как программные пакеты, например, HNet созданный компанией AND Corporation, так и специализированные аппаратные решения [21], [13]. Активно обсуждаются и предлагаются решения на основе оптоэлектроники.

#### Литература

- [1] D. Gabor, «Associative Holographic Memories», IBM Journal of Research and Development, т. 3, pp. 156-159, 1969.
- [2] P. J. van Heerden, «A New Optical Method of Storing and Retrieving», Applied Optics, pp. 387-392, 1993.
- [3] B. R. J., «Properties of a mass of cell capable of regenerating pulses», Phil. Trans. Roy. Soc.(London), № B240, p. 55, 1956.
- [4] D. Willshaw, «Holography, Associative Memory, and Inductive Generalization», HiAn85, pp. 83-102, 1985.
- [5] R. Hecht-Nielsen, Neurocomputing, Massachusetts: Addison-Wesley, 1990.
- [6] J. J. Hopfield, «Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities», Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A, т. 79, pp. 2554-2558, April 1982.
- [7] K. Y. L. H. Y. P. D. Hsu, «Holographic Implementation of a Fully Connected Neural Network», Proc IEEE, т. 78, 1990.
- [8] T. Nitta, «An extension of the back-propagation algorithm to complex numbers», Neural Networks, т. 10, № 8, pp. 1391-1415, 1997.
- [9] N. a. P. F. Benvenuto, «On the complex backpropagation algorithm», IEEE Transactions on Signal Processing, т. 40, № 4, pp. 967-969, 1992.
- [10] H. a. H. S. Leung, «The complex backpropagation algorithm», IEEE Transactions on Signal Processing, т. 39, № 9, pp. 2101-2104, 1991.
- [11] G. M. a. K. C. Georgiou, «Complex domain backpropagation», IEEE Transactions on Circuits and Systems—II: Analog and Digital Signal Processing, т. 39, № 5, p. 330-334, 1992.
- [12] M. R. a. H. Y. Smith, «A data extrapolation algorithm using a complex domain neural network», IEEE Transactions on Circuits and Systems—II: Analog and Digital Signal Processing, т. 44, № 2, pp. 143-147, 1997.
- [13] D. R. a. S. I. H. E. Michel, «Proceedings of the International Conference on VLSI», в CMOS Implementation of phase-encoded complex-valued artificial neural networks, 2004.
- [14] J. J. Hopfield, «Pattern recognition computation using action potential timing for stimulus representation», Nature, т. 376, pp. 33-36, 1995.
- [15] W. a. B. C. M. Maass, «Pulsed Neural Networks», The MIT Press, 1998.
- [16] J. G. Sutherland, «Holographic model of memory, learning and expression», International J. Of Neural Systems, т. 1, № 3, p. 256-267, 1990.
- [17] J. I. Khan, Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, University of Hawaii, 1995.
- [18] R. Manger, «The lecture presented at the Mathematical Colloquium in Osijek organized by Croatian», в Holographic neural networks, Department of Mathematics, University of Zagreb, 1998.
- [19] R. Manger, «Proceedings of the 18th International Conference on Information Technology Interfaces», в Can holographic neural networks be used for data compression, Zagreb, 1996.
- [20] R. a. M. M. Manger, «Proceedings of the 16th International Conference on Information Technology Interfaces», в Using holographic neural networks for currency exchange rates prediction, University Computing Centre, Zagreb, 1994.
- [21] J. Sutherland, «NEURAL NETWORKS». USA Патент 5,515,477, 7 5 1996.
- [22] D. Gabor, «A New Microscopic Principle», Nature, pp. 777-778, 1948.
- [23] T. Poggio, «On holographic models of memory», Kybernetik, т. 12, № 4, pp. 237-238, 1973.
- [24] K. J. I. & D. Yun, «Holographic Image Archive», т. 20, № 4, 1996.

Поступила в редколлегию 17.05.2018



**Игнатъев Вадим Евгеньевич**, аспирант кафедры физической и биомедицинской электроники и комплексных информационных систем факультета радиофизики, биомедицинской электроники и компьютерных систем ХНУ им. В. Н. Каразина. Область научных интересов – оптическая голография и голографические информационные технологии.

УДК 004.8

Игнатъев В. Е. **Голографія та нейромережі** / В. Е. Игнатъев // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 42–48.

Метою даної статті є аналіз сучасних тенденцій у сфері голографічної асоціативної пам'яті на основі нейронних мереж, і показати, як ідеї оптичної голографічної асоціативної пам'яті лягли в основу для побудови цифрової нейронної асоціативної пам'яті. На сучасний момент голографічні нейронні мережі все ще залишаються маловивченими, і не знайшли широкого застосування. В науковій пресі присутня мала кількість статей, і практично відсутні спеціалізовані книги. Всі існуючі програмні пакети для роботи з голографічними нейронними мережами платні, що істотно ускладнює їх дослідження. Розглянемо еволюцію і перехід від звичайних нейромереж до нейромереж на комплексних числах, далі до голографічних нейронних мереж і багатовимірної голографічної асоціативної пам'яті.

*Ключові слова:* голографічна асоціативна пам'ять, нейромережі, комплексні нейронні мережі, голографічні нейронні мережі, багатовимірні голографічна асоціативна пам'ять.

Лл.3. Бібліогр.:24 найм.

UDC 004.8

Ignatiev V. E. **Holography and neural networks** / V. E. Ignatiev // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17, № 1, 2. – P. 42–48.

The main aim of this paper is to analyze modern trends in the sphere of a holographic associative memory based on neural networks, and to show how the optical holographic associative memory ideas have formed the basis of creating new digital neuron associative memory. At present the holographic neural networks still remain little-studied and have found a narrow application. There is not extensive scientific literature in the form of articles on this topic and specialized books are not practically available. All the existing programming packages and frameworks for working with holographic neural networks are pay, which significantly complicates their study. The paper considers evolution and transition from conventional neural networks to complex number neural ones and further to holographic neural networks and multidimensional holographic associative memory.

*Keywords:* holographic associative memory, neural networks, complex neural networks, holographic neural networks, multidimensional holographic associative memory.

Fig. 3. Ref.: 24 items.

## УНИКАЛЬНЫЕ КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЦИКЛИЧЕСКИХ СКРУЧЕННЫХ КРИВЫХ ЭДВАРДСА

А. В. БЕССАЛОВ

Дан анализ свойств точек 4-го и 8-го порядков в классах нециклических скрученных и квадратичных кривых Эдвардса. Доказаны теоремы о существовании не особых точек 4-го и 8-го порядков в этих классах. Дан обзор свойств трех классов кривых в обобщенной форме Эдвардса. Обсуждаются полезные для криптографии свойства скрученных кривых Эдвардса.

*Ключевые слова:* кривая в обобщенной форме Эдвардса, скрученная кривая Эдвардса, квадратичная кривая Эдвардса, порядок кривой, порядок точки, сложение точек, изоморфизм, квадратичное кручение, квадратичный вычет, квадратичный невычет.

### ВВЕДЕНИЕ

Авторы работ [1,2] впервые определили кривые Эдвардса к той форме, которая сделала их весьма перспективными для задач современной асимметричной криптографии. Они же дали детальный, но не всегда корректный анализ свойств этих кривых. В работах [3,4] мы обосновали свою критику и предложили новую классификацию *кривых в обобщенной форме Эдвардса* с разбиением их на 3 непересекающихся класса *полных, скрученных и квадратичных* кривых Эдвардса. В работе [2] все эти классы с кардинально отличающимися свойствами объединены термином «Twisted Edwards Curves» (скрученные кривые Эдвардса), что сразу внесло путаницу в их же статистику, приведенную в разделе 4 [2]. В этой связи после работы [4] мы пользуемся нашей классификацией.

Кривые Эдвардса с одним параметром, определенные в работе [1], имеют очень привлекательные для криптографии преимущества: максимальная скорость экспоненцирования точки [1,3], полнота и универсальность закона сложения точек, аффинные координаты нейтрального элемента группы точек, повышенная безопасность в отношении атак бокового канала [1]. Программирование групповых операций становится более эффективным и ускоряется в связи с отсутствием особой точки на бесконечности как нуля абелевой группы точек. Введение второго параметра кривой в работе [2] расширяет класс кривых Эдвардса и ставит вопрос: насколько это может оказаться полезным для криптографических приложений? В данной статье этот вопрос обсуждается.

В разделе 1 статьи вводятся основные определения и обозначения, приводятся законы сложения и удвоения точек в форме, адаптированной к горизонтальной симметрии обратных точек [5]. В разделе 2 дается анализ свойств точек малых порядков, и доказывается теорема 1 о точках 4-го порядка с формулировкой, более общей в сравнении с подобной теоремой в работе [4]. В ней определены условия существования не особых точек 4-го порядка для двух классов нециклических кривых Эдвардса. Здесь же дока-

зана теорема 2 об условиях существования точек 8-го порядка. В разделе 3 резюмируются определения и свойства 3-х классов кривых в форме Эдвардса согласно новой классификации [4]. В названии статьи термин «нециклические скрученные кривые Эдвардса» позволяет избежать неоднозначности термина «скрученные кривые Эдвардса» в мировой литературе. В разделе 4 обсуждаются некоторые особые свойства и преимущества скрученных кривых Эдвардса для криптографических приложений.

### 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе [2] *скрученные кривые Эдвардса* (twisted Edwards curves) определены как обобщение кривых [1]

$$x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, \left(\frac{d}{p}\right) = -1$$

введением нового параметра  $a$  в уравнение

$$ax^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, a, d \in F_p^*, d \neq 1, a \neq d, p \neq 2.$$

Наряду с вводом параметра  $a$  авторы [2] сняли ограничения на пару параметров  $a$  и  $d$ , допуская любые свойства квадратичности  $\left(\frac{ad}{p}\right) = \pm 1$ . При  $a = 1$  такая кривая получила в [2] название *кривой Эдвардса*, а если у нее  $d$  – квадратичный невычет (т.е. символ Лежандра  $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ ), то – *полной кривой Эдвардса*. Этот термин связан с полнотой закона сложения точек кривой [1]. В работе [5] мы предложили поменять местами  $x$  и  $y$  координаты в форме кривой Эдвардса с целью сохранения горизонтальной симметрии обратных точек, принятой в теории эллиптических кривых. Опираясь на это свойство, определим *кривую в обобщенной форме Эдвардса* уравнением

$$E_{a,d}: x^2 + ay^2 = 1 + dx^2y^2, a, d \in F_p^*, d \neq 1,$$

$$a \neq d, p \neq 2. \quad (1)$$

Тогда модифицированный универсальный закон сложения точек имеет вид

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \left( \frac{x_1 x_2 - a y_1 y_2}{(1 - dx_1 x_2 y_1 y_2)}, \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{(1 + dx_1 x_2 y_1 y_2)} \right). \quad (2)$$

При совпадении двух точек получим из (2) закон удвоения точек

$$2(x_1, y_1) = \left( \frac{x_1^2 - a y_1^2}{(1 - dx_1^2 y_1^2)}, \frac{2x_1 y_1}{(1 + dx_1^2 y_1^2)} \right). \quad (3)$$

Использование модифицированных законов (2), (3) позволяет сохранить общепринятую горизонтальную симметрию (относительно оси  $x$ ) обратных точек. Определяя теперь обратную точку как  $-P = (x_1, -y_1)$ , получим, согласно (1), координаты нейтрального элемента группы  $O = (x_1, y_1) + (x_1, -y_1) = (1, 0)$ . Кроме нейтрального элемента  $O$  на оси  $x$  также всегда лежит точка  $D_0 = (-1, 0)$  второго порядка, для которой в соответствии с (3)  $2D_0 = (1, 0) = O$ . В зависимости от свойств параметров  $a$  и  $d$  можно получить еще 2 особые точки 2-го порядка и 2 или 4 точки 4-го порядка. Как следует из (1), на оси  $y$  могут лежать точки  $\pm F_0 = (0, \pm 1/\sqrt{a})$  4-го порядка, для которых  $\pm 2F_0 = D_0 = (-1, 0)$ . Эти точки существуют над полем  $F_p$ , если параметр  $a$  является квадратом (квадратичным вычетом).

Из уравнения (1) определим квадраты:

$$x^2 = \frac{1 - ay^2}{1 - dy^2}, y^2 = \frac{1 - x^2}{a - dx^2},$$

порождающие в ряде случаев особые точки на бесконечности (знак « $\infty$ » мы ставим при делении на 0):

$$D_{1,2} = \left( \pm \sqrt{\frac{a}{d}}, \infty \right), \pm F_{11} = \left( \infty, \pm \frac{1}{\sqrt{d}} \right). \quad (4)$$

Они возникают в случаях  $\left(\frac{ad}{p}\right) = 1$  и  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$  соответственно. По правилам предельного перехода и закона удвоения (3) можно проверить, что  $2D_{1,2} = O$ ,  $\pm 2F_1 = D_0 = (-1, 0)$ . Иными словами, при выполнении условий их существования особые точки  $D_{1,2}$  есть точки 2-го порядка, а особые точки  $\pm F_1$  – точки 4-го порядка.

Кроме перечисленных, точки 4-го порядка могут существовать как не особые при ненулевых координатах  $x$  и  $y$ .

## 2. СВОЙСТВА ТОЧЕК 4-ГО И 8-ГО ПОРЯДКОВ КРИВЫХ В ОБОБЩЕННОЙ ФОРМЕ ЭДВАРДСА

Дадим анализ некоторых новых свойств точек 4-го и 8-го порядков.

**Теорема 1.** Не особые точки 4-го порядка

$$\pm F_2 = \left( \sqrt[4]{\frac{a}{d}}, \pm \sqrt{\frac{-1}{\sqrt{ad}}} \right), \pm F_3 = \left( -\sqrt[4]{\frac{a}{d}}, \pm \sqrt{\frac{-1}{\sqrt{ad}}} \right)$$

кривой в форме (1) при  $x \neq 0$  существуют тогда и только тогда, когда выполняются условия:

(i) при  $p \equiv 3 \pmod{4}$ :  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = -1$ ;

(ii) при  $p \equiv 1 \pmod{4}$ :  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = 1, ad = c^4$ .

**Доказательство.** *Необходимость.* Особые точки

$\pm F_1 = \left( \infty, \pm \frac{1}{\sqrt{d}} \right)$  согласно формул (4), возникающие при  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ , исключаются из рассмотрения в соответствии с формулировкой теоремы. Не рассматриваются также точки  $\pm F_0 = (0, \pm 1/\sqrt{a})$  при  $x = 0$ .

Пусть  $F_2 = (x_1, y_1)$  – точка 4-го порядка кривой (1), тогда  $2F_2 = 2(x_1, y_1) = D_1$ . Согласно (3) и (4) запишем два уравнения:

$$\frac{x_1^2 - ay_1^2}{(1 - dx_1^2 y_1^2)} = \sqrt{\frac{a}{d}}, \quad \frac{2x_1 y_1}{(1 + dx_1^2 y_1^2)} = \infty.$$

Отсюда  $(1 + dx_1^2 y_1^2) = 0, \Rightarrow x_1^2 + ay_1^2 = 0, \Rightarrow x_1^2 = -ay_1^2$ . Из  $x_1 \neq 0$  следует  $y_1 \neq 0$ . Здесь второе равенство записано на основании уравнения (1) кривой. Согласно первому из уравнений и равенства  $x_1^2 = -ay_1^2$  имеем

$$\frac{2x_1^2}{1 + \frac{a}{d} x_1^4} = \sqrt{\frac{a}{d}} \Rightarrow dx_1^4 - 2\sqrt{ad} x_1^2 + a = 0 \Rightarrow x_1^2 = \sqrt{\frac{a}{d}},$$

$$y_1^2 = \frac{-1}{\sqrt{ad}}.$$

Итак, получаем 4 точки с координатами:

$$\pm F_2 = \left( \sqrt[4]{\frac{a}{d}}, \pm \sqrt{\frac{-1}{\sqrt{ad}}} \right), \pm F_3 = \left( -\sqrt[4]{\frac{a}{d}}, \pm \sqrt{\frac{-1}{\sqrt{ad}}} \right) \quad (5)$$

которые определены в формулировке теоремы. При  $p \equiv 3 \pmod 4$  элемент  $(-1)$  есть квадратичный невычет [7], тогда  $(-a)$  – квадратичный вычет в условиях (i) и равенство  $x_1^2 = -ay_1^2$  корректно связывает квадраты координат точки  $F_2$ . Пусть  $\beta$  – примитивный элемент мультипликативной группы  $F_p^*$ , и  $\beta^2$  – квадрат этой группы, тогда при условии (i) имеем  $\beta^2 = \beta^2 \beta^{p-1} = \beta^{2+4k+2} = \beta^{4(k+1)}$ . Значит, любой квадрат имеет квадратные корни и корни 4-й степени при  $p \equiv 3 \pmod 4$ . Необходимость существования первых координат в (5) с учетом условий (i) доказана. Учитывая условия (i) и принимая значение  $\left(\frac{-\sqrt{ad}}{p}\right) = 1$  (т.е.

как квадратичного вычета, при этом  $\sqrt{ad}$  – квадратичный невычет), получаем по 2 решения для вторых координат в точках (5). Так как квадраты  $ad$  и  $a/d$  имеют корни 4-й степени, такие точки в условиях теоремы существуют. Необходимость условий (i) теоремы доказана.

При  $p \equiv 1 \pmod 4$  (условия теоремы) элемент  $(-1)$  есть квадратичный вычет [7], тогда равенство  $x_1^2 = -ay_1^2$  выполняется при  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ . Для квадрата мультипликативной группы имеем  $\beta^2 = \beta^2 \beta^{p-1} = \beta^{2+4k} = \beta^{2(2k+1)}$ . Для этого случая при  $\beta = c^2$  число элементов  $c^4$  при всех ненулевых значениях  $c$  равно  $(p-1)/4$ . Обе координаты точек (5) существуют, если  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = 1$ , и  $ad = c^4$  (или  $a/d = c^4$  для  $c \in F_p$ ). Тогда и для второй координаты справедливо  $\frac{1}{ad} = \frac{c^4}{a^2} = e^4$ . Итак, необходимость условий (ii) теоремы доказана.

**Достаточность.** Пусть выполняются условия (i) или (ii). Тогда существуют 4 точки  $\pm F_{2,3} = \left(\pm 4\sqrt{\frac{a}{d}}, \pm \sqrt{\frac{-1}{\sqrt{ad}}}\right)$ , для которых согласно (3) получим  $\pm 2F_{2,3} = D_{1,2}$ . Так как удвоение точек  $F_{2,3}$  4-го порядка дает точки 2-го порядка, то определенные координатами (5) точки есть точки 4-го порядка. Это доказывает достаточность условий теоремы. ▲

Точки  $\pm F_{2,3}$  можно рассматривать как точки деления на 2 особых точек 2-го порядка  $D_{1,2}/2$  [3,6].

**Пример 1.** Для кривой  $x^2 - y^2 = (1 + 3x^2y^2) \pmod 7$  (здесь  $a = -1$ ,  $d = 3$  – квадратичные невычеты при  $p = 7 \equiv 3 \pmod 4$  и выполняются условия (i) теоремы 1) точки 4-го порядка (5) имеют координаты  $\pm F_{2,3} = (\pm 2, \pm 2)$ . При удвоении их согласно (3) получим  $2F_2 = (\pm 3, \infty) = D_{1,2}$ . Порядок  $N_E$  этой кривой, включающей точки  $O, F_{2,3}, D_{0,1,2}$ , равен 8, группа точек нециклическая с типом  $T = (2, 2^2)$ .

**Пример 2.** В условиях (ii) теоремы 1 рассмотрим кривую  $x^2 + y^2 = (1 + 3x^2y^2) \pmod{13}$  (здесь  $a = 1$ ,  $d = 3$  – квадратичные вычеты при  $p = 13$ ). Согласно (5) находим точки 4-го порядка  $\pm F_{2,3} = (\pm 6, \pm 4)$ . Кроме того, согласно (4) кривая имеет две особые точки 4-го порядка  $\pm F_1 = (\infty, \pm 3)$ . Подстановка значений координат точек  $F_{2,3}$  в уравнение кривой дает  $6^2 + 4^2 = 1 + 3 \cdot 6^2 \cdot 4^2 = 0$ . Удвоение точек  $F_{2,3}$  со-

гласно (3) дает точки  $2F_2 = \left(\pm \sqrt{\frac{a}{d}}, \infty\right) = (\pm 3, \infty) = D_{1,2}$ .

Эта кривая имеет порядок  $N_E = 16$  и является нециклической с типом  $T = (2^2, 2^2)$ .

**Утверждение 1.** Все кривые Эдвардса (1) с условиями  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = -1$  при  $p \equiv 1 \pmod 4$  имеют порядок  $N_E = 4n$  ( $n$  – нечетное).

**Доказательство.** В условиях  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = -1$  теоремы 1 при  $p \equiv 1 \pmod 4$  кривая не содержит точек 4-го порядка, но включает нециклическую подгруппу 4-го порядка точек 2-го порядка  $G_4 = \{O, D_0, D_1, D_2\}$ . Следовательно, порядки всех других точек могут быть равными  $n$  и  $2n$  (вместе с возможными нечетными сомножителями  $n$ ). Итак, подгруппа  $G_4$  есть подгруппа минимального четного порядка 4 кривой, и порядок кривой  $N_E = 4n$ . Утверждение доказано. ▲

Найдем необходимые условия существования точек 8-го порядка, порожденных делением на 2 точки  $F_0$ .

**Теорема 2.** Необходимыми условиями существования точек 8-го порядка кривой (1) являются:

$$(i) \text{ при } \left(\frac{ad}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{1-d}{p}\right) = 1;$$

$$(ii) \text{ при } \left(\frac{ad}{p}\right)=1, \left(\frac{a}{p}\right)=1, \left(\frac{1-d}{p}\right)=1 \quad \text{и}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{d}{a}}}{p}\right)=1.$$

**Доказательство.** Пусть  $S = (x_1, y_1)$  – точка 8-го порядка, тогда  $2S_1 = F_0 = (0, 1/\sqrt{a})$  – точка 4-го порядка на оси  $y$ . Согласно (3) и координат точки  $F_0$  имеем

$$\frac{x_1^2 - ay_1^2}{(1 - dx_1^2 y_1^2)} = 0, \quad \frac{2x_1 y_1}{(1 + dx_1^2 y_1^2)} = \frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (6)$$

Тогда  $x_1^2 = ay_1^2 \Rightarrow \frac{d}{a}x_1^4 - 2x_1^2 + 1 = 0, \Rightarrow x_{1,2}^2 = \frac{a}{d}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{d}{a}}\right)$ . Координаты точек  $S_k, k = 1..4$  или  $k = 1..8$  определяются из

$$S_k = \left\{ \pm \left(\frac{a}{d}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{d}{a}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \pm \left(\frac{1}{d}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{d}{a}}\right)\right)^{1/2} \right\}. \quad (7)$$

Так как справедливо

$$\left(1 + \sqrt{1 - \frac{d}{a}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d}{a}}\right) = \frac{d}{a}, \quad (8)$$

то при  $\left(\frac{ad}{p}\right) = -1$  и  $\left(\frac{1-d}{p}\right) = 1$  либо  $\left(1 + \sqrt{1 - \frac{d}{a}}\right)$

является квадратом, либо  $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d}{a}}\right)$ . Умножая квадратичный невычет из этой альтернативы на невычет  $\frac{a}{d}$ , получим значение  $x_1^2$  координаты одной из точек (7). Извлекая из квадрата  $x_1^2$  два корня, определяем значения координат  $\pm x_1$  в (7). Учитывая условие  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$  и разделив эти значения на  $\sqrt{a}$ , получим координаты  $\pm y_1$  точки 8-го порядка. Число точек 8-го порядка для данного случая равно 4. Первое из необходимых условий теоремы (i) доказано.

При  $\left(\frac{ad}{p}\right) = 1$  оба значения в скобках (8) есть квадратичные вычеты или невычеты. Так как сомно-

житель  $\frac{a}{d}$  квадрата  $x_1^2$  является квадратом, то вместе

с условием  $\left(\frac{1-d}{p}\right) = 1$  должны выполняться условия

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{d}{a}}}{p}\right) = 1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{d}{a}}}{p}\right) = 1. \quad \text{Тогда с учетом}$$

$\left(\frac{a}{p}\right) = 1$  получаем обе координаты 8-ми точек 8-го порядка (7). Увеличение вдвое числа точек связано с нециклической структурой точек четного порядка для этого случая. Итак, 8 точек 8-го порядка в условиях теоремы существуют.  $\blacktriangle$

Теорема 2 не исчерпывает всех возможных точек 8-го порядка, т. к. при  $\left(\frac{ad}{p}\right) = 1$  возникают особые точки 4-го порядка (4), для которых деление на 2 может также породить точки 8-го порядка.

В приведенном выше примере 1 кривой с  $a = -1, d = 3$  при  $p = 7$  оба параметра – квадратичные невычеты и нарушаются условия  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$  и  $\left(\frac{a-d}{p}\right) = -1$ . Хотя порядок кривой равен 8, точек 8-го порядка она не содержит.

При условии существования особых точек (4) вместе с точками  $D_{0,\pm} F_0 = (0, \pm 1/\sqrt{a})$ , принимая правила предельного перехода в (2), можно найти координаты сумм:

$$(x_1, y_1) + (-1, 0) = (-x_1, -y_1),$$

$$(x_1, y_1) + \left(\sqrt{\frac{a}{d}}, \infty\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{d}}x_1^{-1}, \frac{1}{\sqrt{ad}}y_1^{-1}\right),$$

$$(x_1, y_1) + \left(-\sqrt{\frac{a}{d}}, \infty\right) = \left(-\sqrt{\frac{a}{d}}x_1^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{ad}}y_1^{-1}\right),$$

$$(x_1, y_1) + \left(\infty, -\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{d}}y_1^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{d}}x_1^{-1}\right),$$

$$(x_1, y_1) + \left(\infty, -\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{d}}y_1^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{d}}x_1^{-1}\right).$$

Все найденные суммы удовлетворяют уравнению (1) при подстановке, т.е. являются точками кривой.

Подчеркнем, что использование правил предельного перехода сохраняет операцию сложения любых пар точек, включая особые. Это позволяет говорить об изоморфизме кривых в форме Монтгомери и Эдвардса [2,3].

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ В ОБОБЩЕННОЙ ФОРМЕ ЭДВАРДСА

Обоснование новой классификации кривых в обобщенной форме Эдвардса дано в работах [3,4]. Здесь даны определения 3-х классов этих кривых и перечень фундаментальных свойств кривых разных классов.

В зависимости от свойств параметров  $a$  и  $d$  кривые в обобщенной форме Эдвардса (1) разбиваются на 3 непересекающиеся класса изоморфизмов:

- *полные кривые Эдвардса* (с условием C1:  $\left(\frac{ad}{p}\right) = -1$  :

- *скрученные кривые Эдвардса* (с условиями C2.1:  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1, \left(\frac{d}{p}\right) = -1$  ;

- *квадратичные кривые Эдвардса* (с условиями C2.2:  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1, \left(\frac{d}{p}\right) = 1$  .

Основные свойства этих классов кривых:

3.1 В отношении точек 2-го порядка первый класс полных кривых Эдвардса над простым полем является классом *циклических* кривых, скрученные же и квадратичные кривые Эдвардса образуют классы *нециклических* кривых. Максимальный порядок точек кривых последних классов равен  $N_E / 2$  .

3.2 Класс полных кривых Эдвардса не содержит особых точек.

3.3 Скрученные кривые Эдвардса содержат лишь две особые точки 2-го порядка  $D_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\frac{a}{d}}, \infty\right)$  .

3.4 Квадратичные кривые Эдвардса содержат две особые точки 2-го порядка  $D_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\frac{a}{d}}, \infty\right)$  и две особые точки 4-го порядка  $\pm F_{11} = \left(\infty, \pm\frac{1}{\sqrt{d}}\right)$  .

3.5 Скрученные и квадратичные кривые Эдвардса образуют пары квадратичного кручения на основе преобразования параметров:  $a = ca, d = cd, \left(\frac{c}{p}\right) = -1$  .

3.6 Полные и квадратичные кривые Эдвардса изоморфны кривым с параметром  $a = 1: E_{a,d} \sim E_{1,d/a}$  . Введение нового параметра  $a$  в уравнение кривой (1) оправдано лишь для класса скрученных кривых Эдвардса.

3.7 Для точек нечетного порядка закон сложения точек (2) всегда является полным (т.е. сумма любой пары точек не дает особой точки).

### 4. СПЕЦИФИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКРУЩЕННЫХ КРИВЫХ ЭДВАРДСА ДЛЯ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Для криптографических приложений следует искать кривые Эдвардса порядка  $N_E = 4n$  с минимальным кофактором 4 при нечетном  $n$ , из которых отбираются кривые с простым значением  $n$ . Среди полных кривых Эдвардса (условие C.1) практически половина имеют порядок  $4n$  ( $n$  – нечетное). Они являются циклическими, и их порядки пробегают все кратные 4-м числа в границах Хассе. Квадратичные кривые Эдвардса с параметром  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$  (условия C.2.2) являются нециклическими с тремя точками 2-го порядка и четырьмя или восемью точками 4-го порядка (в последнем случае согласно теореме 1  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ). Отсюда следует, что они содержат нециклическую подгруппу, изоморфную  $Z/2 \times Z/4$  порядка 8, а порядок этих кривых имеет минимальный кофактор 8. Они наименее привлекательны для криптографии. Поэтому кривые порядка  $N_E = 4n$  наряду с полными кривыми Эдвардса можно искать лишь среди скрученных кривых Эдвардса в условиях C.2.1.

Согласно утверждению 1, при  $p \equiv 1 \pmod{4}$  все скрученные кривые Эдвардса имеют порядок  $N_E = 4n$  . Это первое уникальное свойство скрученных кривых, сводящее поиск криптостойких кривых к поиску кривых с почти простым порядком  $4n$  ( $n$  – простое) при условии  $p \equiv 1 \pmod{4}$  . Генератор крипто-системы выбирается как точка  $G$  простого порядка  $n$  ( $\text{Ord}G = n$ ). Так как практически любая случайная точка  $P$  нециклической скрученной кривой имеет порядок  $n$  или  $2n$ , генератор криптосистемы легко находится простым удвоением случайной точки:  $G = 2P$ . Это второе уникальное свойство скрученных кривых Эдвардса, полезное на этапе вычисления общесистемных параметров.

Наличие двух особых точек 2-го порядка  $D_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\frac{a}{d}}, \infty\right)$  на скрученной кривой не является основанием для отказа от их внедрения в стандарты асимметричной криптографии. Эти точки лежат за пределами подгруппы точек  $\langle G \rangle$  простого порядка  $n$ , с которыми оперирует криптосистема. Согласно свойству 3.7, для точек этой подгруппы закон сложения (2) точек полный.

Наконец, выбирая минимальное значение параметра  $a \in \{2,3\}$  как квадратичного невичета, можно достичь, как и для полных кривых, максимальной производительности имплементации крипто алгоритмов. Средний выигрыш в производительности экспоненцирования точки на кривой Эдвардса в сравнении с кривой в форме Вейерштрасса достигает 1.6 раза [3].

**Литература**

- [1] Bernstein D.J., Lange T. Faster Addition and Doubling on Elliptic Curves // Advances in Cryptology—ASIACRYPT'2007 (Proc. 13th Int. Conf. on the Theory and Application of Cryptology and Information Security. Kuching, Malaysia. December 2–6, 2007). Lect. Notes Comp. Sci. V. 4833. Berlin: Springer, 2007. P. 29–50.
- [2] Bernstein Daniel J. , Birkner Peter , Joye Marc , Lange Tanja, Peters Christiane. Twisted Edwards Curves.// IST Programme under Contract IST–2002–507932 ECRYPT, and in part by the National Science Foundation under grant ITR–0716498, 2008, PP. 1–17.
- [3] Бессалов А.В. Эллиптические кривые в форме Эдвардса и криптография. Монография. «Политехника», Киев, 2017. – 272 с.
- [4] Бессалов А.В., Цыганкова О.В. Число кривых в обобщенной форме Эдвардса с минимальным четным кофактором порядка кривой. Проблемы передачи информации, – Том 53 (1), 2017. – С. 101–111.
- [5] Бессалов А.В., Цыганкова О.В. Взаимосвязь семейств точек больших порядков кривой Эдвардса над простым полем. Проблемы передачи информации, – Том 51, вып 4, 2015. – С. 92–98.
- [6] Бессалов А.В. Метод нахождения порядка точки скрученной кривой Эдвардса. Радиотехника, №.186, 2016. – С. 110–118.
- [7] Бессалов А.В., Телиженко А.Б. Криптосистемы на эллиптических кривых:// Учеб. пособие. – К.: ІВЦ «Політехніка», 2004. – 224 с.

Поступила в редколлегию 06.06.2018



**Бессалов Анатолий Владимирович**, доктор технических наук, профессор, профессор НТУУ «КПИ им. Игоря Сикорского». Область научных интересов – асимметричная криптография.

UDC 621.391.15: 519.7

Bessalov A.V. **Unique cryptographic properties of acyclic twisted Edwards curves** / A.V. Bessalov // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17, № 1, 2. – P. 49–54.

Analysis of properties of 4th and 8th order points in classes of acyclic twisted and quadratic Edwards curves is given. The theorems of existence of not singular 4th and 8th order points in these classes are proved. Reviewing the properties of three classes of curves in a generalized Edwards form is given. The properties of twisted Edwards curves useful for cryptography are discussed.

*Keywords:* curve in a generalized Edwards form, twisted Edwards curve, quadratic Edwards curve, curve order, point order, addition of points, isomorphism, quadratic twist, quadratic residue, quadratic nonresidue.

Ref.: 07 items.

УДК 621.391.15: 519.7

Бессалов А.В. **Унікальні криптографічні властивості нециклічних скручених кривих Єдвардса** / А.В. Бессалов // Прикладна радіоелектроніка: науково – техн. журнал. – 2018. – Том 17, №. 1, 2. – С. 49–54.

Дано аналіз властивостей точок 4-го і 8-го порядків у класах нециклічних скручених і квадратичних кривих Єдвардса. Доведено теореми про існування точок 4-го і 8-го порядків у цих класах. Дано огляд властивостей трьох класів кривих в узагальненій формі Єдвардса. Обговорюються корисні для криптографії властивості скручених кривих Єдвардса.

*Ключові слова:* крива в узагальненій формі Єдвардса, скручена крива Єдвардса, квадратична крива Єдвардса, порядок кривої, порядок точки, додавання точок, ізоморфізм, квадратичне кручення, квадратичний лишок, табкватратичний нелишок.

Бібліогр. 07 найм.

УДК 537.862

**ПЕРЕТВОРЕННЯ ІМПУЛЬСУ ЕЙРІ ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ШАРОМ, МЕЖІ ЯКОГО ЗБЛИЖУЮТЬСЯ**

*О. В. КУРИЖЕВА, О. Г. НЕПУХ*

---

Розв'язана просторово-часова задача про взаємодію електромагнітного імпульсу Ейрі з діелектричним шаром, межі якого рівномірно рухаються так, що у певний момент часу діелектричний шар припиняє існувати. Розв'язок отриманий методом інтегральних рівнянь Вольтерра та резольвенти. Проведено аналіз еволюції первинного імпульсу Ейрі. Із аналізу отриманих результатів випливає, що зустрічний рух меж за деяких значень параметрів може призводити як до зміни форми первинного імпульсу Ейрі, так і до його підсилення.

*Ключові слова:* імпульс Ейрі, інтегральне рівняння Вольтерра, резольвента, діелектричний шар, рівномірний рух.

**ВСТУП**

Дослідження процесу взаємодії електромагнітних хвиль з шаруватими структурами здійснюється уже впродовж достатньо тривалого проміжку часу. Цей інтерес обумовлюється тим, що шаруваті структури мають широке розповсюдження у природі у вигляді атмосфери або океану, у штучних конструкціях у вигляді хімічних сполук та тканин тощо. Клас задач, які належать до описання взаємодії електромагнітних хвиль із шаруватими структурами, широкий [1] та їхнє розв'язання описано багатьма статтями та монографіями, таких як [2, 3]. Так, у книзі [6] детально описано дослідження взаємодії плоскої монохроматичної хвилі з шаруватими структурами. Зокрема, у книзі міститься аналіз процесу взаємодії монохроматичної хвилі з діелектричним шаром з постійними межами і шаром, межі якого рівномірно рухаються. Оскільки форма плоскої хвилі не змінюється під час руху у часі, більший практичний інтерес становлять електромагнітні хвилі з несиметричною формою. Тому, як первинне поле у задачі про взаємодію електромагнітної хвилі з діелектричним шаром з межами, що рухаються, розглядається електромагнітний імпульс Ейрі з несиметричною формою. Цей імпульс має досить незвичайні властивості, такі як недифрагуюче розповсюдження, самолікування та самоприскорення [7, 8]. Активне дослідження пучків Ейрі продовжується з кінця 70-х років минулого сторіччя. Уже досліджені симетричні імпульси Ейрі [9], запропонований метод заглушення побічних пелюстків, що базується на використанні кільцевої амплітудної маски, у роботі [10] описано спеціальне фокусування цих імпульсів. У роботах [11, 12] описано результати взаємодії імпульсу Ейрі з плоскою межею розділення середовищ та

з плоским шаром діелектрика з нерухомими межами. У даній роботі розглядається взаємодія імпульсу Ейрі з діелектричним шаром, межі якого рівномірно рухаються у часі. Задачу розв'язано методом інтегральних рівнянь Вольтерра та резольвенти [3, 4].

Стаття організована наступним чином. В п.1 формулюється початково-крайова задача про перетворення імпульсу Ейрі плоским шаром діелектрика з межами, що рухаються. У п.2 описана структура поля у шарі, а п.3 присвячений аналізу просторово-часової структури імпульсу Ейрі у шарі, який супроводжується графічними зображеннями внутрішнього поля у різних точках шару та за різних параметрів.

**1. МЕТОД РЕЗОЛЬВЕНТИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ**

Розглянемо початково-просторову задачу про взаємодію електромагнітного асиметричного імпульсу Ейрі з діелектричним плоским шаром товщиною  $a$ , межі якого рівномірно зустрічно рухаються зі сталою швидкістю  $u$ . В момент часу  $t = a/2u$  діелектричний шар припиняє своє існування. Первинний імпульс описується такою функцією Єйрі:

$$E_0(t, x) = Ai(-t/T + x/vT + s), \quad (1)$$

де  $v = c/\sqrt{\epsilon}$  – швидкість імпульсу в середовищі з діелектричною проникністю  $\epsilon$ ,  $T$  – часовий масштаб,  $s = (x_0/v - t_0)/T$  – стартовий параметр, який формується початковим моментом дії та точкою розміщення джерела імпульсу. При від'ємних значеннях параметра  $s < 0$  передній фронт імпульсу проникає в діелектричний шар до початку руху меж, а у протилежному

випадку, при  $s > 0$ , передній фронт імпульсу шару не досягає.

Аналіз взаємодії імпульсу Ейрі з діелектричним шаром з постійними межами проведено в [11]. Вплив руху меж шару в даній роботі проводиться за таким же алгоритмом, як і у випадку шару з нерухомими межами [9]. Алгоритм базується на методі інтегральних рівнянь Вольтерра [5], згідно з яким поле у шарі описується рівнянням:

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{v^2 - v_1^2}{2v_1^2 v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \int_0^\infty dt' \int_0^a dx' \theta \left( t - t' - \frac{|x - x'|}{v} \right) f(t', x') E(t', x'), \quad (2)$$

де  $v_1 = c/\sqrt{\epsilon_1}$  – швидкість хвиль у середовищі з діелектричною проникністю  $\epsilon_1$ ,  $\theta(t)$  – одинична функція Хевісайда, функція  $f(t, x)$  описує особливості явища і у даному випадку визначається як

$$f(t, x) = \theta(a - ut - x)\theta(x - ut), \quad (3)$$

де  $u$  швидкість меж шару, яка задовольняє нерівності  $0 < u < v_2$ . Умова  $u > 0$  є необхідною для того, щоб шар припиняв своє існування та щоб вхідний у шар імпульс Ейрі «встиг» відчувати вплив меж шару, коли  $u < v_2$ . У протилежному випадку при від’ємному значенні  $u < 0$ , межі шару віддаляються одна від одної. Коли швидкість меж шару більша за швидкість імпульсу, то вся область, що утворена межами шару, повністю вкладається у вільну від впливу меж просторово-часову зону з номером 00. У цьому випадку імпульс Ейрі «не відчуває» впливу меж діелектричного шару.

Для розв’язання інтегрального рівняння (1) будуються резольвенти [4]. Як і у випадку задачі з шаром з нерухомими межами, область, що описується характеристичною функцією (3), розбивається на просторово-часові зони, що показано на рис. 1. Просторово-часова картина взаємодії електромагнітного імпульсу Ейрі показана на рис. 1 занумерованими стрілками. Стрілкою 1 показано падіння первинного імпульсу Ейрі на шар у момент початку руху меж, тобто передній фронт імпульсу знаходиться за межами шару у момент, коли межі почнуть зближуватися. Стрілкою 2 показано положення переднього фронту імпульсу у момент, коли відбувся стрибок діелектричної проникності. Стрілки 3 та 4 ілюструють ситуацію, коли межі починають рухатись раніше, ніж імпульс починає взаємодію з шаром.

Відстань між утвореними просторово-часовими зонами змінюється за законом:

$$t_n - t_{n-1} = p^{1-n} a / (v_1 + u), \quad (4)$$

де  $p = (v_1 + u) / (v_1 - u)$ .

Резольвента інтегрального рівняння (2) складається з двох частин  $\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2$  [5]. Якщо точка спостереження  $(t, x)$  знаходиться у зоні з номером 00, то перша частина резольвенти має такий же вигляд, як і у випадку необмеженого простору:

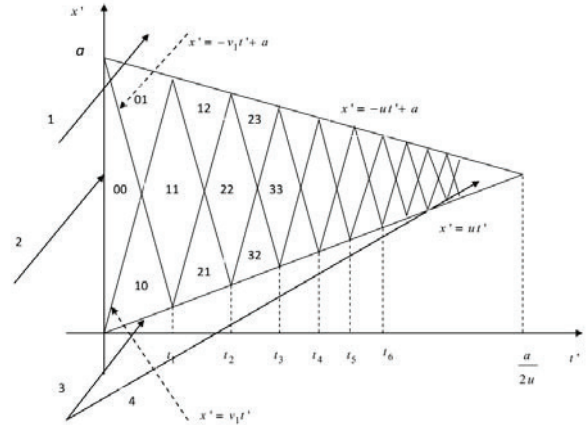


Рис. 1. Просторово-часова картина початково-крайової задачі про взаємодію імпульсу Ейрі з діелектричним шаром

$$\hat{R}_1 = \frac{v_2^2 - v^2}{2v^2 v_2} \theta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta \left( t - t' - \frac{|x - x'|}{v_2} \right) \theta(x'). \quad (5)$$

Друга частина резольвенти для точки спостереження, що знаходиться в зоні з номером  $mm$ , має вигляд:

$$\hat{R}_{mm} = -\zeta \frac{v_1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \sum_{k=1}^m R_u^k \chi_1(t', x') + \sum_{k=1}^m R_u^k \chi_2(t', x') \right\}, \quad (6)$$

де

$$\chi_1(t', x') = \theta \left( -v_1 t' + (-1)^k x' + p^{i_k} \left( 1 + \frac{u}{v_2} q^2 \frac{1 - p^{k-i_k}}{1 - p^2} \right) \times v_1 \tau^{(-)} - p^{i_k} \frac{1 - p^{k+i_k}}{1 - p^2} qa \right),$$

$$\chi_2(t', x') = \theta \left( -v_1 t' - (-1)^k x' + p^{i_k} \left( 1 + \frac{u}{v_2} q^2 \frac{1 - p^{k-i_k}}{1 - p^2} \right) \times v_1 \tau^{(+)} - p^{k-i_k} \frac{1 - p^{k+i_k}}{1 - p^2} qa \right),$$

$$q = \frac{2v_1}{v_2 - u}, \quad \tau^{(\pm)} = t \pm x/v_1, \quad i_k = \left[ 1 + (-i)^k \right] / 2.$$

## 2. СТРУКТУРА ВНУТРІШНЬОГО ПОЛЯ У ШАРІ, МЕЖІ ЯКОГО РУХАЮТЬСЯ

Застосувавши резольвенту (5) до інтегрального рівняння (2), отримаємо поле в зоні з номером 00, у якій відсутній вплив меж шару [4]. Структура внутрішнього поля і цій зоні буде така ж, як і у випадку з діелектричним шаром з нерухомими межами:

$$E_{00}(t, x) = \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{vT}\right) \times \quad \times Ai\left(-\frac{v_2 t}{vT} + \frac{x}{vT} + s\right) \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{vT} - \frac{a}{vT}\right), \quad (7)$$

$$\left[\frac{v_1 v_1 - v}{v} \frac{v_1 + v}{2v} Ai\left(\frac{v_1 t}{vT} + \frac{x}{vT} + s\right) + \frac{v_1 v_1 + v}{v} \frac{v_1 - v}{2v} \times\right.$$

Застосувавши резольвенту (6) до рівняння (2), отримаємо вираз для внутрішнього поля у зоні з номером  $mm$  :

$$E_{mm} = \theta\left(-\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{vT} + (1-m)\frac{a}{vT}\right) \theta\left(\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{vT} - m\frac{a}{vT}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{v_1 v - u}{v} \frac{v_1 + u}{v_1 + u} \left\{ C_0 Ai\left(-\frac{v_1 v - u}{v} \frac{v_1 + u}{v_1 + u} \frac{t}{T} + \frac{v - u}{v_1 + u} \frac{x}{vT} + s\right) + \right.\right.$$

$$\left. + R_1^k C_0 \sum_{k=1}^{m-1} Ai\left[p^k \left[-\frac{v_1 v - u}{v} \frac{v_1 + u}{v_1 + u} \frac{t}{T} + (-1)^k \frac{v - u}{v_1 + u} \frac{x}{vT}\right] + q \frac{1 - p^2}{1 - p^2} \frac{v - u}{v_1 + u} \frac{a}{vT} + s\right] + \right\}$$

$$+ R_1^m C_1 Ai\left(p^m \left[-\frac{v_1 t}{vT} + (-1)^m \frac{x}{v_1 T}\right] + q \frac{1 - p^2}{1 - p^2} \frac{a}{vT} + s\right) +$$

$$+ R_1^m C_2 Ai\left(p^m \left[\frac{v_1 t}{vT} + (-1)^m \frac{x}{v_1 T}\right] + pq \frac{1 - p^2}{1 - p^2} \frac{a}{vT} + s\right) \times$$

$$\times \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{vT} + (1+m)\frac{a}{vT} + s\right) \theta\left(\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{vT} + m\frac{a}{vT}\right), \quad (8)$$

Коефіцієнти у формулі (8) визначаються виразами:

$$C_0 = \frac{2v_1}{v + v_1}, \quad C_{1,2} = \frac{v_1(v_1 \pm v)}{2v^2},$$

$$R_1 = pR = \frac{v_1 + u}{v_1 - u} \frac{v - v_1}{v + v_1}, \quad R = \frac{v - v_1}{v + v_1} \frac{v_1 - u}{v_1 + u}$$

Функції Хевісайда у формулі (8) визначають межі відповідних просторово-часових занумерованих зон шару.

Незалежно від руху меж, у шарі формується два імпульси, що пропорційні коефіцієнтам  $C_{1,2}$  у формулі (8). Ці імпульси утворюються у результаті стрибка у часі діелектричної проникності і поширюються по шару, відображаючись від його меж. Нескінченна кількість таких відображень має вкластися у шар за скінченний проміжок часу, оскільки межі шару у певний момент збігаються в одній точці. Імпульси, що пропорційні коефіцієнту  $C_0$ , формуються після проходження імпульсу в шар з боку освітленої межі. Амплітуди цих імпульсів необмежено збільшуються, що призводить до нестійкості падаючого імпульсу в шарі та до розбиття первинної хвилі на хвильові пакети.

### 3. ЗМІНА ІМПУЛЬСУ ЗІ ЗМІНОЮ ЧАСОВИХ ІНТЕРВАЛІВ

Для більш детального аналізу віртуальної структури поля в шарі з межами, що зближуються, розглянемо поле в зонах з номерами 00, 11 та 22 при від'ємному значенні стартового параметра. Структура поля в зоні 00 описується формулою (7), а в зонах 11 та 22 – формулами (9) та (10) відповідно.

$$E_{11} = \frac{v_1 v - u}{v} \frac{v_1 + u}{v_1 + u} C_0 Ai\left(-\frac{v_1 v - u}{v} \frac{v_1 + u}{v_1 + u} \frac{t}{T} + \frac{v - u}{v_1 + u} \frac{x}{vT} + s\right) +$$

$$+ R_1 C_1 Ai\left(p \left[-\frac{v_1 t}{vT} - \frac{x}{v_2 T}\right] + q \frac{1 - p^{1/2}}{1 - p^2} \frac{a}{vT} + s\right) +$$

$$+ R_1 C_2 Ai\left(p \left[\frac{v_1 t}{vT} - \frac{x}{v_1 T}\right] + pq \frac{1 - p^{1/2}}{1 - p^2} \frac{a}{vT} + s\right), \quad (9)$$

$$E_{22} = \frac{v_1 v - u}{v} \frac{v_1 + u}{v_1 + u} C_0 Ai\left(-\frac{v_1 v - u}{v} \frac{v_1 + u}{v_1 + u} \frac{t}{T} + \frac{v - u}{v_1 + u} \frac{x}{vT} + s\right) +$$

$$\begin{aligned}
 &+R_1 \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} C_0 Ai \left( p \left[ -\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{t}{T} - \frac{v-u}{v_1+u} \frac{x}{vT} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + q \frac{1-p^{1/2}}{1-p^2} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{a}{vT} + s \right) + \\
 &+R_1^2 C_1 Ai \left( p \left[ -\frac{v_1}{v} \frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right] + q \frac{1-p^{1/2}}{1-p^2} \frac{a}{vT} + s \right) + \\
 &+R_1^2 C_2 Ai \left( p \left[ \frac{v_1}{v} \frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right] + pq \frac{1-p^{1/2}}{1-p^2} \frac{a}{vT} + s \right), \quad (10)
 \end{aligned}$$

Поле у зоні з номером 11, як видно з формули (9), складається з трьох імпульсів Ейрі, перший з яких сформувався шляхом проходження імпульсу в шар зі сторони освітленої межі. Останні два імпульси у цій зоні утворились у результаті відображень від меж шару після розщеплення первинного імпульсу в результаті стрибка діелектричної проникності.

Формула (10) описує структуру поля у зоні 22. Тут формується уже чотири імпульси: перші два – це результат проходження первинного імпульсу в шар, а останні імпульси, що пропорційні коефіцієнту  $R_1^2$ , є результатом дворазового відображення імпульсу від меж шару.

Структура полів у цих зонах складніша, ніж у задачі з шаром з нерухомими межами. По-перше, змінюється множник, який характеризує амплітуду коливань імпульсу. По-друге, ускладнюється просторово-часова залежність аргументів функцій Ейрі. І, по-третє, у випадку шару з рухомими межами, залежність від товщини шару набагато складніша, ніж у випадку, коли межі шару нерухомі.

На рис. 2 показано еволюцію імпульсу Ейрі з межами, що рівномірно рухаються назустріч одна одній, при переході із однієї зони в іншу.

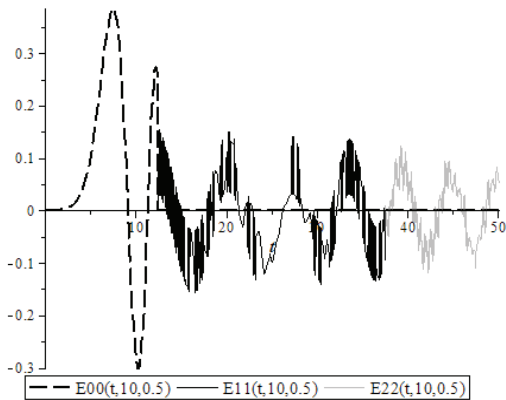


Рис. 2. Еволюція імпульсу Ейрі у часі в зонах 00(пунктирна лінія), 11 (чорна суцільна лінія) та 22 (сіра суцільна лінія):  $a/vT = 20$ ,  $x/vT = 10$ ,  $u/v = 0.5$ ,  $v_1/v = 0.8$

На рис.3 показано змінення імпульсу Ейрі шаром з рухомими межами порівняно з первинним імпульсом.

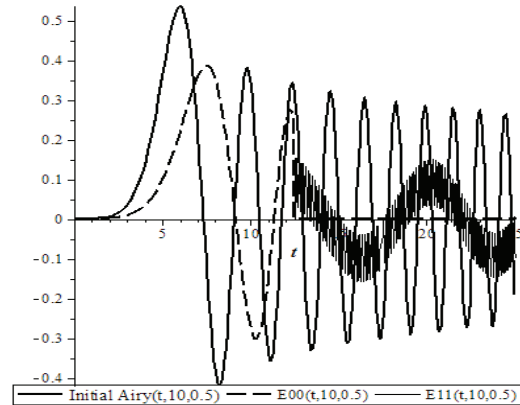


Рис. 3. Порівняння діфрагованого імпульсу в зонах E00 та E11 з первинним імпульсом Ейрі (Initial Airy):  $a/vT = 20$ ,  $x/vT = 10$ ,  $u/v = 0.5$ ,  $v_1/v = 0.8$

Рис. 3 ілюструє віртуальну структуру поля в шарі: у зоні, вільній від впливу меж (зона 00), змінюється лише величина головного пелюстка імпульсу, в той час як форма імпульсу Ейрі зберігається. При переході в зону 11 після одноразового відображення від меж шару форма імпульсу змінюється. З'являються побічні пелюстки та вторинні коливання імпульсу.

Наглядний вплив руху меж демонструє рис. 4, де показано еволюцію імпульсу Ейрі у шарі з постійними межами. У цьому випадку поле менше змінюється порівняно з шаром з рухомими межами (рис.2).

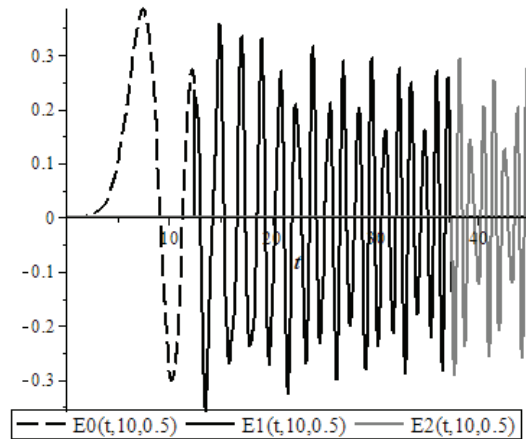


Рис. 4. Імпульс Ейрі в шарі з постійними межами у зонах 00 (пунктирна лінія), 11 (чорна суцільна лінія) та 22 (сіра суцільна лінія):  $a/vT = 20$ ,  $x/vT = 10$ ,  $v_1/v = 0.8$

У нульовій зоні імпульс не змінюється у обох випадках, але після відображення від меж амплітуда коливань «хвоста» змінюється порівняно з первинним.

Задача з такою постановкою була розв'язана для випадку плоскої монохроматичної хвилі [4]. У процесі дослідження взаємодії плоскої хвилі з шаром, межі

якого зближуються, були виявлені параметри, за яких амплітуди хвиль, утворених у шарі, зростають, та внутрішнє поле стає нестійким. Унаслідок цього відбувається накопичення енергії в шарі за рахунок перетворення кінетичної енергії його меж у енергію електромагнітного поля.

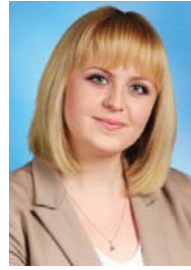
### ВИСНОВКИ

У статті розглянуто взаємодію імпульсу Ейрі з плоским шаром діелектрика, межі якого рівномірно зустрічно рухаються. Отримані аналітичні вирази для поля всередині шару, а також проведено порівняльний аналіз шару з рухомими та нерухомими межами. Зустрічний рух меж шару призводить до збільшення амплітуди імпульсу, змінення його форми та ускладнює загальну структуру поля всередині шару.

### Література

- [1] Шварцбург А. Б., Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели), Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН – Москва, том 170, №12, 2000г.
- [2] Бреховских Л.М., Волны в слоистых средах. 2-е издание. — М.: Наука, 1973. — 343 с.
- [3] Борн М., Вольф Э., Основы оптики. — М.: Наука, 1973. — 721 с.
- [4] Нерух А.Г., Электромагнитные волны в диэлектрическом слое с зависящими от времени параметрами, ЖТФ, т.57, в.11,1987г.
- [5] Нерух А.Г., Хижняк Н.А., Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики, ХНПО «Тест-радио», 1991р.
- [6] Nerukh A, Sakhnenko N., Benson T., Sewell P., Non-stationary electromagnetics, Pan Stanford Publishing, Singapore, 597 p., 2013.
- [7] Siviloglou G. A. Observation of Accelerating Airy Beam Ballistics// OSA/CLEO/QELS. – 2008. – №1. – P. 2085–2089.
- [8] Berry M.V., Balasz N.L., Nonspreading wave packets, Am.J. Phys. 47(3),1978.
- [9] Vaveliuk P., Lencina Alberto Jose A. Rodrigo and Y. Martnez-Matos, Intensity-symmetric Airy beams, Vol. 32, No. 3 / March 2015 / J. Opt. Soc. Am. A, 2015
- [10] Li, P. Spiral autofocusing Airy beams carrying power-exponent-phase vortices / P. Li, S. Liu, T. Peng, G. Xie, X. Gan, J. Zhao // Optics Express. – 2014. – V. 22, Issue 7. – P. 7598-7606.
- [11] Nerukh A., Kuryzheva O., Benson T., Time-spatial structure of airy pulse in non-stationary environment, Optical and Quantum Electronics (1295), 2018, Issue 2, Articles 52.
- [12] Курыжева О.В., Нерух А.Г., Преобразование импульса Эйри на плоской границе диэлектрика, Прикладная радиоэлектроника (Applied Radio Electronics), vol. 15, N 4, 321-326 (2016)

Надійшла до редколегії 02.05.2018



**Курижева Ольга Володимирівна**, асистент кафедри вищої математики ХНУРЕ. Галузь наукових інтересів – дослідження явища дифракції імпульсу Ейрі у параксiальному наближенні за допомогою рівнянь Вольєрра.

**Нерух Олександр Георгійович**, доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедрою вищої математика ХНУРЕ. Галузь наукових інтересів – розвиток побудови алгоритмів розв’язання початково-крайових задач нестационарної електродинаміки на основі інтегральних рівнянь та їх застосування; математичне моделювання задач збудження ширококутових та надширококутових незамкнених та неоднорідних антен; стаціонарні та нестационарні плазмони, їх збудження та застосування.

УДК 537.862

Курыжева О. В., Нерух А.Г., **Преобразование импульса Эйри диэлектрическим слоем, границы которого сближаются** / Курыжева О. В., Нерух А.Г.// Прикладная радиоэлектроника: науч. – техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 55–59.

Решена пространственно-временная задача о взаимодействии электромагнитного импульса Эйри с диэлектрическим слоем, границы которого равномерно перемещаются и в определенный момент времени и сходятся в одной точке, в результате чего слой схлопывается. Решение получено методом резольвенты, применяемого к интегральному уравнению Вольєрра, которое описывает данную задачу. Графическая иллюстрация результатов наглядно демонстрирует эволюцию первичного импульса Эйри, вызванную взаимодействием поля со слоем со схлопывающимися границами. Из анализа полученных результатов следует, что встречное движение границ приводит как к изменению формы импульса, так и к его усилению.

*Ключевые слова:* импульс Эйри, интегральное уравнение Вольєрра, резольвента, диэлектрический шар, равномерное движение.

Ил.04. Библиогр.:12 назв.

UDC 537.862

Kuryzheva O. **Conversion of an Airy pulse by dielectric layer, whose boundaries are converging** / O. Kuryzheva, A. Nerukh // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17, № 1, 2. – P. 55–59.

The paper has solved the time-space problem of the interaction of the electromagnetic Airy pulse with a dielectric layer whose boundaries are moving uniformly in such a way that at a certain instant of time they converge at one point, resulting in the layer collapse. The solution has been obtained by the method of integral Volterra equations and the resolvent. The exact solutions obtained are accompanied by graphical drawings that clearly demonstrate the evolution of the initial Airy pulse after interaction with “moving” boundaries of the layer. It follows from the analysis of the results that the motion of the boundaries leads to an increase in the Airy pulse in the layer and a change in its shape.

*Keywords:* Airy pulse, integral Volterra equation, resolvent, dielectric layer, uniform motion.

Fig. 04. Ref.: 12 items.

## ИЗЛУЧАЮЩИЕ СВОЙСТВА НЕОДНОРОДНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

Н. В. ЩЕРБАКОВ, Г. И. ХЛОПОВ, О. А. ВОЙТОВИЧ, В. Н. ПЕХОТА, С. В. МИРОНИЮК, В. Д. ПАВЛЕНКО, А. В. ОВЧАРОВ

Впервые предложена конструкция антенной решетки неоднородных апертурных излучателей на основе секториальных рупорных антенн Ка диапазона с разными размерами раскрывов, превышающими длину волны. В результате решения оптимизационной задачи показано, что использование излучающих элементов с неодинаковыми прямоугольными размерами раскрыва, расположенных в виде концентрических «колец» на раскрыве антенной решетки, обеспечивает формирование узкой диаграммы направленности и подавление дифракционных лепестков на краю сектора сканирования до уровня -17 дБ при падении коэффициента усиления антенны не более, чем на 1 дБ. Предложенная антенная система предназначена для электрического сканирования иглообразным лучом в ортогональных плоскостях.

**Ключевые слова:** антенная решетка, диаграмма направленности, дифракционный лепесток, сектор сканирования.

### ВВЕДЕНИЕ

Для применения в современных радиотехнических системах большой интерес представляет разработка электрически сканирующих антенных решеток (АР) миллиметрового диапазона длин радиоволн.

В частности, широко распространены АР проходного (рис. 1, а) и отражательного типа (рис. 1, б) с квазиоптическим питанием [1, 2]. Необходимым условием является обеспечение максимально возможного значения коэффициента перехвата энергии первичного облучателя. В первом случае решетка приемных антенн  $A_{Rn}$  осуществляет перехват энергии облучателя и разделение ее на каналы, в каждом из которых установлен электрически управляемый фазовращатель (ФВ). Передающая решетка  $A_{Tn}$  обеспечивает формирование диаграммы направленности (ДН) АР в целом.

Решетка отражательного типа (рис. 1, б) работает аналогично, с той лишь разницей, что на выходе ФВ установлены регулируемые короткозамыкатели для компенсации первоначального разброса фаз в каналах АР, допущенных в процессе изготовления устройств СВЧ.

Современная элементная база устройств СВЧ миллиметрового диапазона длин волн не позволяет расположить фазовые центры излучающих элементов решетки на расстоянии порядка половины длины волны из-за их больших поперечных размеров. Это относится как к электрически управляемым элементам на основе ферритовых устройств [3–7], так и к элементам на основе полупроводниковых р-і-п диодных устройств [8,9]. По этой причине практически всегда формируются дифракционные лепестки, амплитуда которых на краю сектора сканирования может достигать значительной величины.

Использование неэквидистантных АР позволяет разрушить периодичность фазовой структуры, однако в этом случае апертура антенны оказывается запол-

ненной не полностью, что приводит к снижению ее коэффициента усиления (КУ).

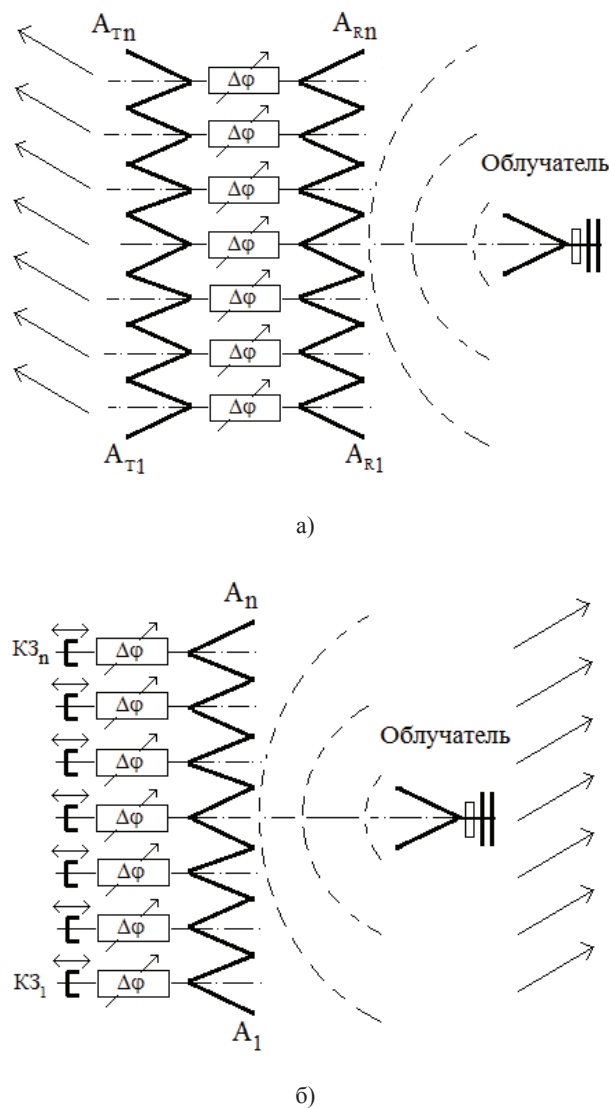


Рис. 1. Структура АР проходного -а) и отражательного -б) типов

Поэтому целью данной работы является разработка АР миллиметрового диапазона длин волн с уменьшенным количеством излучателей, полным заполнением апертуры антенны и низким уровнем боковых лепестков ее ДН.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим геометрию выходной апертуры плоской АР рупорных излучателей, которые расположены в плоскости XOY (рис. 2), где введены следующие обозначения:

- $\rho_i$  – радиус-вектор точки на апертуре антенны с координатами  $x_i, y_i$ ;
- $r, \theta, \varphi$  – координаты точки наблюдения  $P(r, \theta, \varphi)$ ;
- $P^0$  – проекция точки наблюдения на плоскость раскрытия антенны.

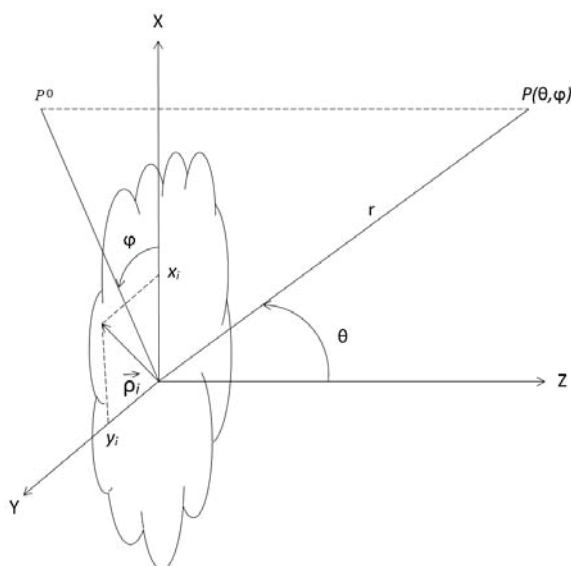


Рис. 2. Геометрия плоскости расположения АР рупорных излучателей

Тогда ДН решетки с размерами раскрытий отдельных излучателей  $a_i \times b_i$  записывается в виде [8]:

$$f(\theta, \varphi) = \left| \sum_i \sqrt{D_i} \times \frac{A_i \times e^{j\varphi_i}}{\sqrt{\sum_i A_i}} \times F_i(\theta, \varphi) \times e^{jk \cdot \vec{\rho}_i \cdot \vec{r}} \right|, \quad (1)$$

где:

$$D_i = 0,81 \cdot \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a_i \cdot b_i, \quad (2)$$

- коэффициент направленного действия (КНД)  $i$ -го излучателя;
- $A_i$  – амплитуда напряженности электрического поля в центре  $i$ -го излучателя;
- $\varphi_i$  – фаза напряженности электрического поля в центре  $i$ -го излучателя;

$$\vec{\rho}_i \cdot \vec{r} = x_i \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + y_i \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi,$$

- набег фазы в  $i$ -м излучателе

$$F_i(\theta, \varphi) = \frac{\sin \frac{\pi \cdot b_i \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi \cdot b_i \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi}{\lambda}} \times \frac{\cos \frac{\pi \cdot a_i \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi}{\lambda}}{1 - \left( \frac{2 \cdot a_i \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi}{\lambda} \right)^2} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2};$$

- ДН рупора;
  - $\lambda$  – рабочая длина волны.
- КНД решетки излучателей определяется выражением

$$D = \frac{4 \cdot \pi}{\lambda^2} \cdot \frac{\left| \iint A(x, y) dx dy \right|^2}{\iint A^2(x, y) dx dy}, \quad (3)$$

где  $A(x, y)$  – амплитудно-фазовое распределение (АФР) в раскрытии решетки.

Отметим, что в выражении (1) значение КНД отдельного излучателя нельзя вынести за знак суммы (2) из-за того, что каждый из них вносит свой отдельный вклад в формирование АФР всей АР.

### 2. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 3 приведена структура излучающего полотна АР размером  $17\lambda \times 17\lambda$  для случая, когда рупорные излучатели имеют раскрытия размером  $\lambda \times \lambda$  и расположены в узлах прямоугольной сетки.

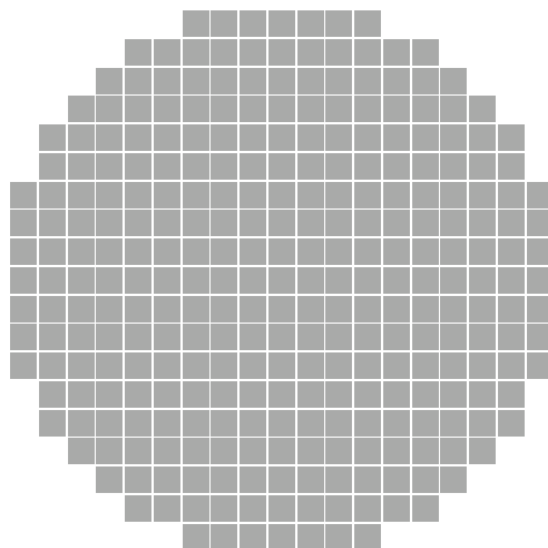


Рис. 3. Структура выходной апертуры антенной решетки с размерами излучающих элементов  $\lambda \times \lambda$ , расположенных в узлах прямоугольной сетки. Количество элементов  $K=265$

Сечения ДН АР шириной  $3,5^\circ$  в плоскостях  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$  при отклонении главного лепестка от нормали на угол  $-6^\circ$  приведены на рис. 4

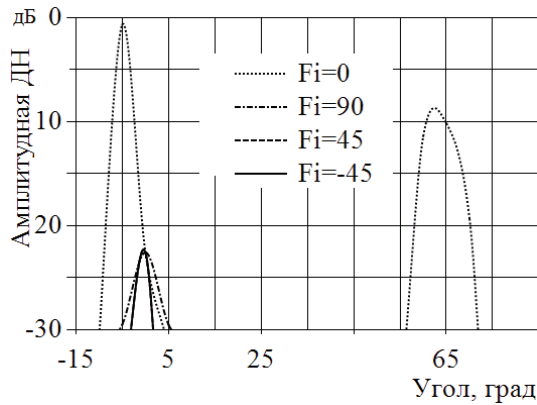


Рис. 4. Сечение ДН АР (рис. 3) в плоскостях  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$  при отклонении главного лепестка от нормали на угол  $-6^\circ$

Как видно, при расстоянии между элементами, равными длине волны, даже сравнительно небольшое отклонение главного максимума ДН от нормали к ее раскрытию приводит к появлению дифракционных лепестков достаточно большого уровня (до  $-9$  дБ).

Для снижения уровня дифракционных лепестков при расстоянии между элементами ( $a_i, b_i \geq 0,8\lambda$ ) необходимо разрушить периодичность в расположении излучателей при условии полного заполнения апертуры решеткой излучающими элементами.

Обычно эта задача решается путем неэквидистантного расположения одинаковых излучающих элементов [2,10], что возможно только для частично заполненных апертур. В рассматриваемом случае, когда для максимального перехвата энергии первичного облучателя требуется полное заполнение излучающей апертуры, практически единственным вариантом разрушения интерференционной структуры боковых лепестков является применение излучающих элементов разных размеров. Это приводит к концепции неоднородной АР. Поэтому дальнейшее рассмотрение посвящено исследованию особенностей одного из вариантов построения подобной АР, состоящей из рупорных излучателей с разными размерами раскрытов.

Одним из путей решения задачи может быть попарное объединение отдельных излучателей решетки по вертикали и по горизонтали (рис.5).

При этом общее количество элементов уменьшается в два раза по сравнению с АР рис. 3, а фазовые центры элементов смещаются из узлов прямоугольной сетки в разные стороны. В частности, один из наиболее удачных, по мнению авторов, вариантов расположения элементов (рис. 5) приводит к уменьшению общего количества излучающих элементов до  $K=133$  по сравнению с традиционной компоновкой излучающей апертуры рис.3, причем уровень дифракционных лепестков в этом случае снижается до  $-18$  дБ (рис. 6).

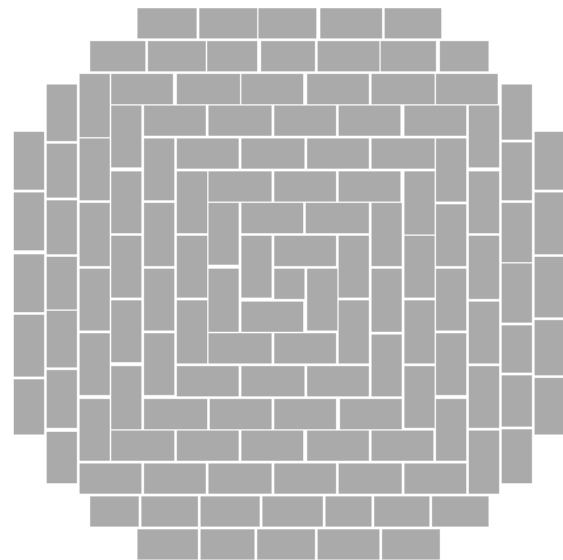


Рис. 5. Структура неоднородной АР с попарным объединением элементов ( $K=133$ )

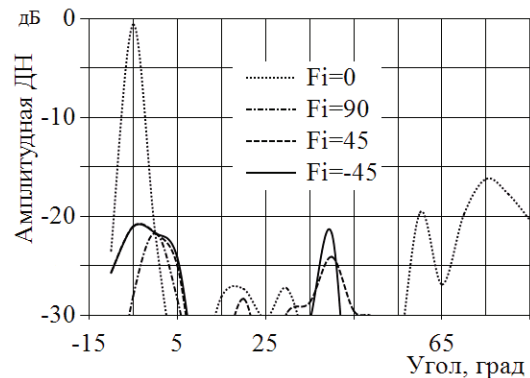


Рис. 6. Сечение ДН неоднородной АР (рис. 5) в плоскостях  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$  при отклонении главного лепестка от нормали на угол  $-6^\circ$

Для дальнейшего улучшения характеристик подобной решетки рассмотрим процедуру оптимизации ее параметров с целью определения размеров апертур излучателей и их положения при требовании минимального уровня бокового излучения во всей области углов и отклонении главного лепестка ДН на заданный угол.

При решении этой задачи учитываем, что необходимо:

- зафиксировать общий размер излучающего полотна АР;
- рассчитать максимальный и минимальный размеры апертуры излучателя;
- учесть толщину стенок излучающих элементов, которые задаются из конструктивных соображений.

При этом предполагается, что:

- элементы решетки расположены в виде концентрических «колец» (рис. 5);
- размер апертуры всех элементов решетки и радиус их расположения – разные;
- полотно решетки представляет собой восьмиугольник с заданными размерами.

Таким образом, исходными параметрами для проведения процедуры оптимизации являются следующие величины:

- $N$  – количество «колец»;
- $R$  – радиус вписанной окружности;
- $R_0$  – радиус описанной окружности;
- $d_{\min}$  – минимальная ширина раскрыва элемента решетки;
- $d_{\max}$  – максимальная ширина раскрыва элемента решетки;
- $h_{\min}$  – минимальная длина элемента решетки;
- $h_{\max}$  – максимальная длина элемента решетки;
- $Z$  – толщина стенок рупора.

Количество элементов при решении задачи синтеза не задается, а независимыми переменными являются:

$$\delta_i, 0 \leq \delta_i \leq 1, 0 < i \leq N, \quad (4)$$

значения которых задаются генератором случайных чисел и определяют ширину  $i$ -го „кольца“:

$$w_i = d_{\min} + \delta_i \cdot \frac{R - d_{\min}(N - 0,5)}{\sum_{i=1}^N \delta_i}, \quad (5)$$

$$\Delta_{ij}, 0 \leq \Delta_{ij} < 1, 0 < i \leq N, 0 \leq j < 4 \times i, \quad (6)$$

значения которых также задаются генератором случайных чисел и определяют больший размер раскрыва  $j$ -й апертуры элемента решетки в  $i$ -м „кольце“:

$$h_{ij} = 2 \cdot d_{\min} + \Delta_{ij} \cdot \frac{R_0 \cdot 2 - 2 \cdot d_{\min} \cdot i - w_i}{\sum_{j=1}^i \Delta_{ij}}. \quad (7)$$

При этом решается минимаксная оптимизационная задача

$$\min_{\delta_i, \Delta_{ij}} \max_{r_0 \in \Omega_{sl}} |F(r_0, \delta, \Delta)|, \quad (8)$$

где  $r_0$  – орт направления на точку наблюдения;  $\Omega_{sl}$  – область боковых лепестков.

Расчет проводился для различного количества «колец» и различного количества элементов решетки. При этом задача решалась при помощи генетического алгоритма [11,12] и методом случайного поиска [13–15], в результате чего определялось количество элементов оптимальной АР, формировалась структура антенного полотна и рассчитывались сечения ДН в четырех плоскостях. На рис. 7 приведен вид излучающей апертуры АР, содержащей 86 элементов в виде 5 «колец», а на рис. 8 – ДН АР при отсутствии сканирования ДН. При отклонении луча в секторе

мене  $\pm 6^\circ$  достигается приемлемый уровень дифракционных лепестков ( $< -17$  дБ).

В этом случае уровень максимального бокового излучения не превышает  $-18$  дБ, а при отсутствии сканирования уменьшается до  $-22$  дБ.

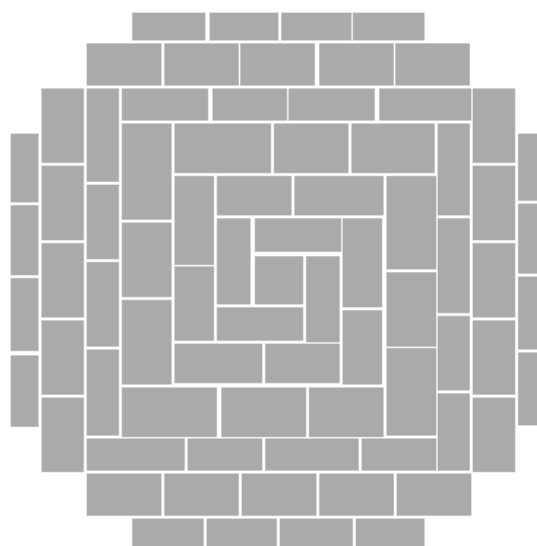


Рис. 7. Структура излучающего полотна антенной решетки при  $K=86$

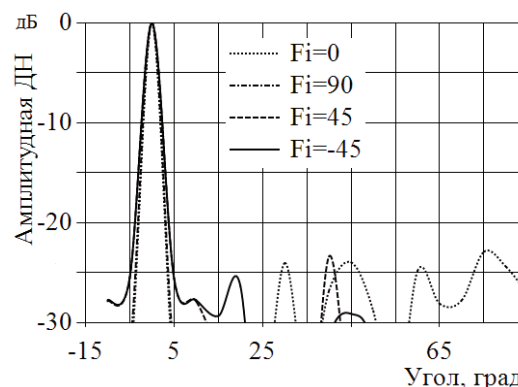


Рис. 8. Сечение ДН неоднородной АР (рис. 7) в плоскостях  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$  при отсутствии сканирования

Однако увеличение размеров излучающих элементов приводит к снижению КУ антенны при отклонении главного лепестка ДН от нормали к раскрыву АР из-за значительной направленности ее отдельных элементов.

Как показали результаты численного моделирования параметров рассматриваемой АР, наиболее приемлемый вариант достигается при 7 кольцах ( $K=77$ ). ДН такой антенны при отклонении главного лепестка на величину  $-6^\circ$  приведена на рис. 9.

Представляют интерес результаты расчета ДН АР на разных частотах при различных углах отклонения главного максимума ее ДН. Например, на рис. 10 приведены ДН в диапазоне частот при отсутствии сканирования, а на рис. 11 – при отклонении луча антенной решетки на  $-60$ .

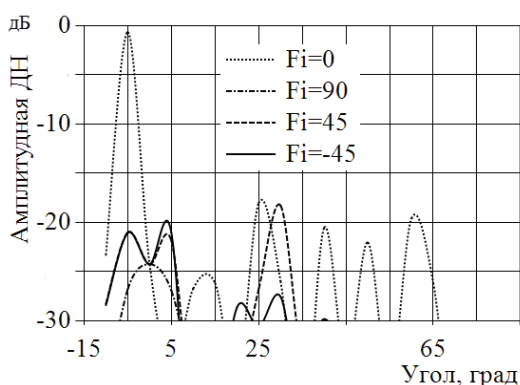


Рис. 9. Сечение ДН неоднородной АР ( $K=77$ ) в плоскостях  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$ , при отклонении главного лепестка от нормали на угол  $-6^\circ$

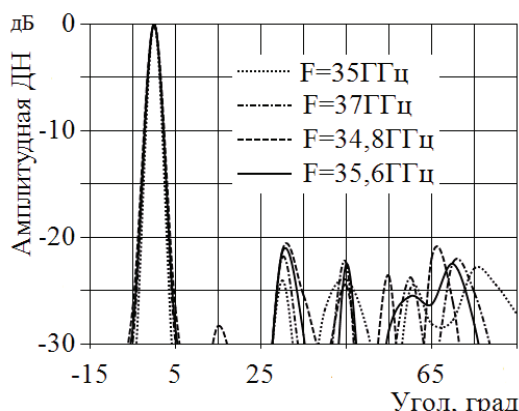


Рис. 10. ДН неоднородной АР ( $K=77$ ) в диапазоне частот  $f = 34,8 - 37$  ГГц, при отсутствии сканирования

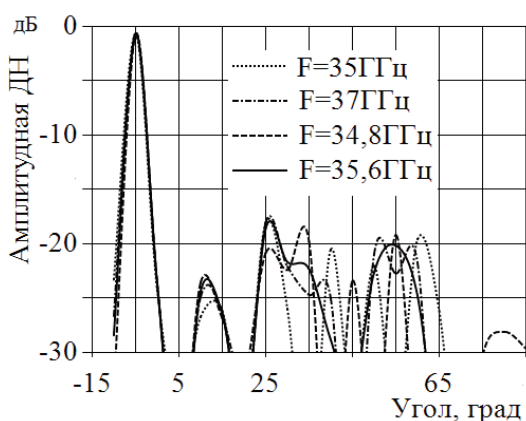


Рис. 11. ДН неоднородной АР ( $K=77$ ) в диапазоне частот  $f = 34,8 \div 37$  ГГц, при отклонении главного лепестка от нормали на  $-6^\circ$

Проведение подобных расчетов объясняется тем, что общем случае параметры АР зависят от частоты в связи с зависимостью электрических размеров излучателей от длины волны. Более того, дискретные ФВ обычно работают в режиме сброса фазы, точная установка которой возможна только на центральной частоте.

В первом случае уровень дифракционных лепестков не превышает  $-22$  дБ во всем диапазоне частот и углов. При отклонении ДН на  $-6^\circ$  от нормали, уровень

дифракционных лепестков не превышает  $-17$  дБ, а КУ уменьшается менее, чем на 1 дБ.

### ВЫВОДЫ

Таким образом, в результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Впервые предложена геометрия неоднородной АР секториальных рупорных излучателей с разными размерами прямоугольных раскрытов.

2. Проведено численное моделирование излучающих свойств АР и показано, что при использовании излучателей с разными размерами раскрытов, расположенных в виде концентрических «колец», обеспечивается электронное сканирование в двух плоскостях в секторе углов  $\pm 6^\circ$ .

3. На краю сектора сканирования уровень дифракционных лепестков ДН не превышает  $-17$  дБ, а коэффициент усиления снижается не более, чем на 1 дБ.

### Литература

- [1] Скольник М. Справочник по радиолокации: пер. с англ. / Под ред. В.С. Вербы. В 2-х книгах. К.1. – М.: Техносфера, 2014. – 672 с.
- [2] Хансен Р.С. Сканирующие антенные системы СВЧ: пер. с англ. / под ред. Г.Т. Маркова и А.Ф. Чаплина. В 3-х т. Т. 2. – М.: Сов. радио, 1969. – 496 с.
- [3] В.Н. Боголюбов, А.В. Ескин, С.Б. Карбовский Управляемые ферритовые устройства СВЧ. – М.: Сов. Радио, 1972. – 72 с.
- [4] Устройства СВЧ и антенны. Проектирование фазированных антенных решеток / Под ред. Д.И. Воскресенского. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2012. – 744 с.
- [5] ОАО «НИИ «Феррит-Домен». Материалы. Каталог, часть 8.
- [6] Исследование быстродействующих отражательных волноводных ферритовых фазовращателей КВЧ диапазона / Комиссарова Е.В. [и др.] // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 11. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/248297.html> (дата обращения 27.11.2011).
- [7] Комиссарова Елена Владимировна. Исследование и разработка волноводных ферритовых фарадеевских фазовращателей и элементов ФАР на их основе для коротковолновой части миллиметрового диапазона волн. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Москва, 2011.
- [8] О.Г. Вендик, М.Д. Парнес. / Под редакцией Л.Д. Бахраха. Антенны с электрическим сканированием. Введение в теорию. 2001 г.
- [9] <http://www.microchip.com/wwwproducts/en/en552743>. PIC16(L)F1784/6/7 28/40/44-Pin 8-Bit Advanced Analog Flash MCU Data Sheet.
- [10] Останков А.В., Антипов С.А., Сахаров Ю.С. Минимальный уровень бокового излучения равноамплитудной неэквидистантной антенной решетки // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – Т. 9. – № 4. С. 8–11.
- [11] Melanie Mitchell. An Introduction to Genetic Algorithms. — MIT Press, 1998. — С. 167. — 226 с. — ISBN 9780262631853.
- [12] Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы: Учебное пособие. — 2-е

изд. — М.: Физматлит, 2006. — 320 с. — ISBN 5-9221-0510-8.

- [13] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. — 384 с.  
 [14] Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978. — 351 с.  
 [15] Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. — М.: Физматлит, 2005. — 304 с.

Поступила в редколлегию: 11.05.2018



**Щербаков Николай Всеволодович**, кандидат технических наук, доцент ООО „Связьэнергосервис“, начальник научно – исследовательской лаборатории. Область научных интересов: синтез антенных решеток, цифровая обработка радиолокационных сигналов.



**Хлопов Григорий Иванович**, доктор технических наук, старший научный сотрудник Института радиофизики и электроники НАН Украины, заведующий отделом физических основ радиолокации. Область научных интересов: теория и практика создания радиотехнических и радиолокационных систем.



**Войтович Олег Антонович**, кандидат технических наук, доцент Института радиофизики и электроники НАН Украины, старший научный сотрудник отдела физических основ радиолокации. Область научных интересов: разработка антенн и устройств СВЧ.



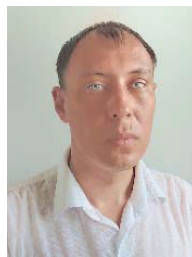
**Пехота Василий Николаевич**. ООО „Связьэнергосервис“, директор. Область научных интересов: теория и практика создания радиотехнических и радиолокационных систем, устройств СВЧ.



**Миронюк Сергей Витальевич**. Начальник сектора проектного отдела ГП КБ „Южное“. Область научных интересов: разработка специальных бортовых систем.



**Павленко Владимир Демьянович**. Главный специалист по разработкам и управлению разработками специальных бортовых систем ГП КБ КБ „Южное“. Область научных интересов: разработка специальных бортовых систем.



**Овчаров Александр Владимирович**. Начальник группы по разработкам и управлению разработками специальных бортовых систем ГП КБ КБ „Южное“. Область научных интересов: разработка специальных бортовых систем

УДК 621.396.677

Щербаков М. В. **Випромінюючі властивості неоднорідної антенної ґратки** / М. В. Щербаков, Г. І. Хлопов, О. А. Войтович, В. М. Пехота, С. В. Миронюк, В. Д. Павленко, О. В. Овчаров // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 60–65.

Вперше запропоновано конструкцію антенної ґратки неоднорідних апертурних випромінювачів на основі секторіальних рупорних антен Ка діапазону з різними розмірами розкривів, які перевищують довжину хвилі. В результаті розв'язання оптимізаційної задачі показано, що використання випромінюючих елементів з неоднаковими прямокутними розмірами розкривів, які розташовані на апертурі антенних ґраток у вигляді концентричних «кілець», забезпечує формування вузької діаграми спрямованості та заглушення дифракційних пелюсток на межі сектора сканування до рівня  $-17$  дБ при падінні коефіцієнта підсилення антени не більше, ніж на 1 дБ. Запропонована антенна система призначена для електронного сканування променем в ортогональних площинах.

*Ключові слова:* антенні ґратки, діаграма спрямованості, дифракційна пелюстка, сектор сканування.

Лл.: 11. Бібліогр.: 15 найм.

UDC 621.396.677

Shcherbakov M. **Radiation property heterogeneous antenna array** / M. Shcherbakov, G. Khlopov, O. Voitovich, V. Pehota, S. Myroniuk, V. Pavlenko, A. Ovcharov // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17, № 1, 2. – P. 60–65.

For the first time, the construction of the antenna array of heterogeneous aperture radiators based on sectorial horn antennas of the Ka band with different aperture dimensions exceeding the wavelength has been proposed. As a result of the solution of the optimization problem, it has been shown that the use of radiating elements with unequal rectangular aperture dimensions arranged in the form of concentric «rings» on the antenna array aperture provides the formation of a narrow beam pattern and suppression of diffraction lobes at the edge of the scan sector to a level of  $-17$  dB, at the antenna gain drop being no more than 1 dB. The proposed antenna system is designed for electrical scanning with a needle-like beam in orthogonal planes.

*Keywords:* antenna array, radiation pattern, diffraction lobe, scan sector.

Fig.:11. Ref.:15 items.

## PULSE-MODE SIMULATIONS OF RTD-LD CIRCUITS FOR VISIBLE LIGHT COMMUNICATION

V. B. YURCHENKO, L. V. YURCHENKO, M. CIYDEM

We suggest a new kind of circuit made of a resonant tunneling diode (RTD) and a laser diode (LD) for visible light communication. The circuit has a radio frequency (RF) resonant antenna joined to the RTD-LD unit with a microstrip section. The circuit can convert modulation pulses with no carrier into the pulses with an RF carrier. The RF pulses are radiated by the antenna for duplicating optical pulses emitted by the LD. The optical pulses also acquire the RF modulation that helps in detection of pulses by the RF filtering of optical signals.

*Keywords:* resonant tunneling diode, laser diode, visible light communication.

### INTRODUCTION

A visible light communication (VLC) technology is an attractive solution for providing broadband mobile communication services to the end-users with high speed of information delivery [1-5]. It has appealing advantages such as a possibility of using available lighting equipment based on the light emitting diodes (LEDs), though it has inherent limitations. The main limitations are the limited bandwidth of conventional LEDs (on the physical layer, the modulation frequency  $f$  is limited by 100 MHz), the difficulty of high-speed modulation of high-power LEDs, and the need of re-arrangement of lighting infrastructure. Further difficulties may appear if much chipper but much slower organic LEDs (OLEDs) would come to replace conventional LEDs.

A promising development in this area is the use of laser diode (LD) light sources. The LDs can provide a data bandwidth more than 100 times greater than the LEDs bandwidth [6]. The data rates in the excess of 100 Gb/s would be accessible with LD VLC systems at standard indoor illumination levels [7]. The LDs have higher current density and output power per unit area than LEDs, and multicolor LD lighting is shown to have no health concern on the human eye [8]. The LDs light is coherent and collimated, which is an advantage for point-to-point data transmission. In total, LD-based white VLC and lighting systems have a potential to outperform the ones based on LEDs. Multi-Gigabit data rates have been achieved in VLC systems based on the III-nitride LDs (e.g., 17.6 Gb/s in [6]). Eventually, the fabrication of LD arrays similar to LED arrays should be developed for these applications.

### 1. PROBLEM FORMULATION

An interesting version of an LD circuit was proposed in [9, 10]. The authors considered a system with an LD being driven by the resonant tunneling diode (RTD). This makes the circuit capable of operating at the frequencies up to 2 GHz [9]. The LD was an optical communication laser operating at around 1550 nm IR radiation wavelength with an average output power of 5 mW. The RTD-LD hybrid circuit was produced with a minimal length of

bonding wires  $b$  accessible with manual manufacture ( $b \sim 1$  mm) in order to minimize the inductance  $L$  of the system. Using the RTDs of small capacitance  $C$ , the authors observed self-oscillations at the frequencies of 350 – 400 MHz, 550 – 590 MHz, and 1.82 – 2.17 GHz, depending on the bonding wire length  $b$  and other parameters [9]. The authors also simulated the system dynamics while considering the structure as a lumped circuit [9, 10].

The aim of this work is to propose and analyze a more general kind of RTD-LD oscillator. In distinction from [9, 10], we consider a distributed system (Fig. 1) that, along with an RTD-LD unit (block G), contains a resonator antenna unit (block A), which is connected to the RTD-LD block by a section of microstrip line of length  $D$  and, at the same time, can radiate the electromagnetic waves  $U_A$  into an open section of microstrip line of an infinite length. The presence of microstrip section of length  $D$  creates the time-delay feedback in the system. The duration of time-delay is  $T_D = 2D/c$ , where  $c$  is the wave propagation speed in the microstrip section (for simplicity, we assume  $c$  is the speed of light in the

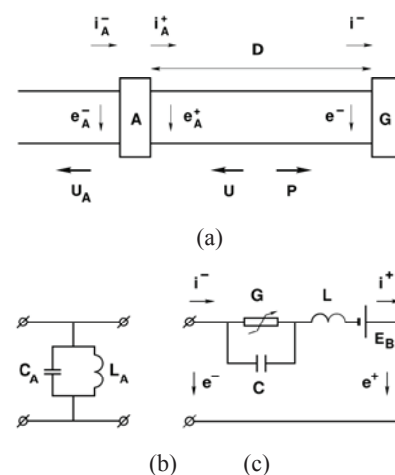


Fig. 1. (a) – A microstrip circuit with (b) a resonator antenna A and (c) a generator section G based on the RTD-LD unit (notations show the current and voltage values, the circuit elements, and the waves propagating in the system)

free space). The time-delay feedback can produce complicated dynamics of oscillations such as the emergence of self-pulsing of high-frequency oscillations [11], nonlinear power combining [12], dynamical chaos [13], ultra-short pulse generation [14], etc.

The RTD-LD circuit is shown in Fig. 1 (c) as an element G of a G-block, which is specified by the current-voltage characteristics  $I_G = I_G(V_G)$  (the I-V curve) with a region of negative differential resistance (NDR) as defined in [9, 10]. Self-oscillations could appear in such a system when the RTD-LD voltage  $V_G$  falls into the NDR region. In relative units, the I-V curve of RTD-LD circuit is presented as  $i_G(e_G) = I_G/I_0 = G_0 F(e_G)/I_0$  where  $G_0$  is the peak current coefficient,  $e_G = V_G/V_0$ ,  $V_0 = 1$  V,  $I_0 = V_0/Z_0 = 0.02$  A,  $Z_0 = 50$  Ohm is the microstrip impedance, and  $F(e_G)$  is the function defining the shape of I-V curve as specified in [10] in ampere units, with peak current  $I_{G0} = 0.04$  A (then,  $G_0 = 1$  and the peak value of  $i_G$  is  $i_G = 2$ ). Equations describing the radio-frequency (RF) part of the system are presented in [11].

The LD optical output is modeled as explained in [10]. The rate equations for the electron and photon densities contain, among other terms, the excitation term proportional to the RTD-LD current  $I_G$  and two relaxation terms defined by the electron and photon lifetimes  $\tau_n = 0.8$  ns and  $\tau_p = 1.2$  ps, respectively. It is the value of  $\tau_n \sim 1$  ns that makes the LD frequency-limited at  $f \sim 1$  GHz. For the LD operating at  $f \sim 100$  GHz [7], we expect  $\tau_n \sim 10$  ps and consider this value in our simulations, while assuming the other LD parameters to be the same as in [10].

We start with the RF circuit parameters specified in [10], including the RTD capacitance  $C = 5.5$  pF and the circuit inductance  $L = 8$  nH, that makes the G-block intrinsic frequency  $f_G = 0.76$  GHz (the actual self-oscillation frequency appears to be smaller). We also, typically, assume the resonator parameters  $C_A = C$  and  $L_A = L$  that makes the A-block intrinsic frequency  $f_A$  the same as  $f_G$ , though, occasionally, we consider the values  $f_A = 0.76 - 76$  GHz.

Both the LD and RTD devices in [10] are specified by the same frequency limit of  $f \sim 1$  GHz, though much faster LDs [7] and RTDs [15, 16] are available at present. Specifically, the RTDs can operate at the frequencies up to  $f \sim 1$  THz, while having the quantum well-collector capacitance  $C_{WC} \sim 1$  fF at nearly the same RTD current [16]. Assuming the inductance  $L$  is also reduced by, at least, 10 times, we can expect the G-block intrinsic frequency to approach  $f_G \sim 100$  GHz that we also consider in simulations.

Notice, the time-delay circuit with a piece of transmission line between the G and A blocks can be treated as a model of real THz RTD structure integrated with a resonator antenna [16]. In this structure, the dominating capacitance and inductance values are  $C$  of RTD and  $L_A$  of resonator. In [16], the size of the RTD-resonator structure is small as compared to the radiation wavelength  $\lambda$ , though the structure is further integrated with planar Vivaldi antenna whose size is comparable with  $\lambda$  for the better radiation of waves into the free space. This extended component could also affect the operation of the oscillator. So, the analysis of the model systems considered in our research could be useful for a better understanding of the RTD-based THz oscillator structures presented in [16].

## 2. SIMULATION RESULTS

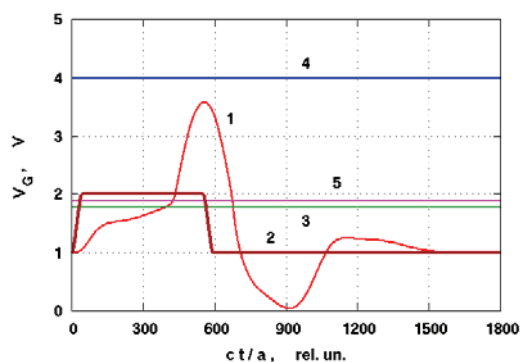
An RTD-LD circuit joint with a resonator antenna by a piece of transmission line can produce synchronous generation of both the RF pulse radiation and the RF-modulated optical pulses. This feature could be of interest for the development of new kinds of optical communication systems. We start our simulations by using a set of parameters provided in [10] and assuming the length of microstrip section  $D = 10$  mm (in relative units  $d = D/a = 10$  where  $a = 1$  mm) and the length of the excitation pulse  $T_p \sim 2$  ns ( $cT_p/a = 600$ ).

Fig. 2 shows the results that demonstrate a possibility of a single, well-shaped LD optical pulse excitation while the RF radiation pulse  $U_A$  is not well formed (the light intensity normalization unit is the same for all the plots presented below).

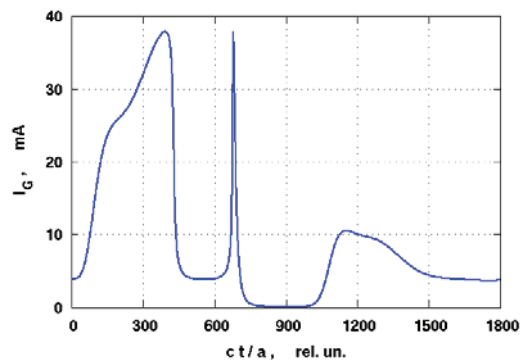
The microstrip circuit at these parameters is not yet fast enough for pulses of  $T_p = 2$  ns (the relevant frequency is  $f_p = 1/T_p = 0.5$  GHz, while the pulse repetition frequency is  $f_{REP} = 0.25$  GHz at 50% duty cycle). The results are similar at smaller values of microstrip length  $D$ , except for lower peak intensity (e.g.,  $S = 7$  at  $D < 1$  mm). The increase of  $D$  to  $D = 40$  mm increases the light peak to nearly maximum  $S = 16$  at the same pulse width, though further increase of  $D$  reduces the peak and begins to deform the light pulse and increase its duration.

Now, we consider the circuit that has 10 times faster RTD and resonator response ( $f_G = f_A = 7.6$  GHz when the other parameters are the same as above, except for the microstrip length being  $D = 5$  mm). The simulation results are shown in Fig. 3.

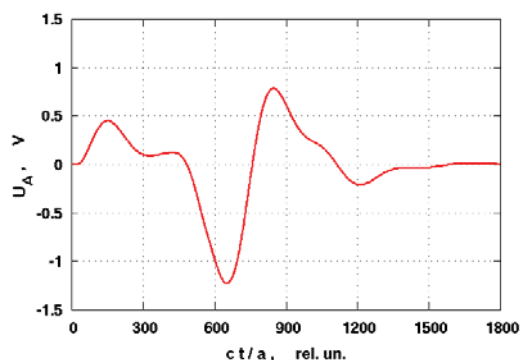
The simulations reveal the effect of RF modulation of light intensity of the optical pulse along with gradual increase of the light power during the process of light emission. The RF modulation of light intensity  $S$  is induced by the RF oscillations of RTD-LD current that also creates the oscillations of radiated RF waveform  $U_A$ . The oscillations occur at the frequency  $f_{RF} = 2.6$  GHz.



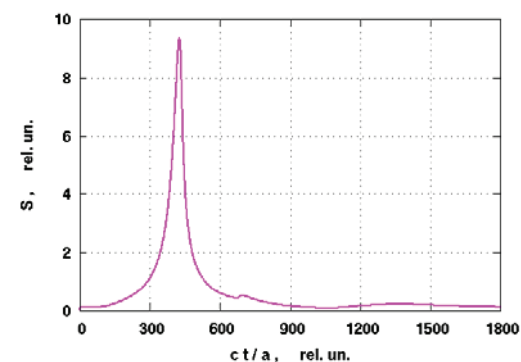
(a)



(b)

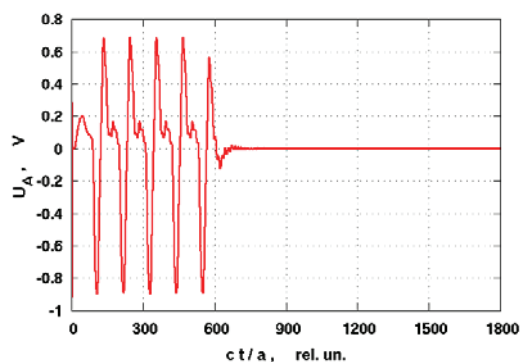


(c)

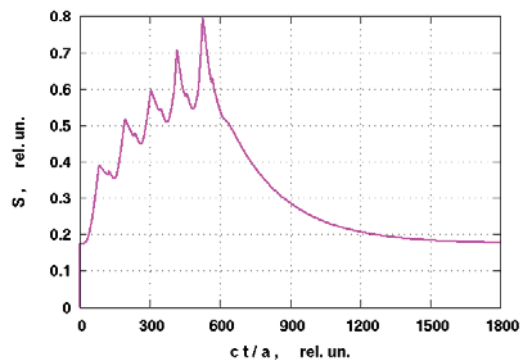


(d)

Fig. 2. The pulse of (a) RTD-LD voltage (curve 1), (b) RTD-LD current, (c) RF output, and (d) LD light pulse intensity  $S$  when  $G_0 = 1$ ,  $d = 10$ ,  $f_G = f_A = 0.76$  GHz, and the excitation pulse length  $T_p = 2$  ns (curve 2; lines 3 to 5 show the voltage values of lower and upper borders of NDR region and of the peak of negative differential conductance, respectively)



(a)



(b)

Fig. 3. The RTD-LD pulse of (a) RF output and (b) LD optical pulse at  $G_0 = 1$ ,  $d = 5$ ,  $f_G = f_A = 7.6$  GHz, and  $T_p = 2$  ns

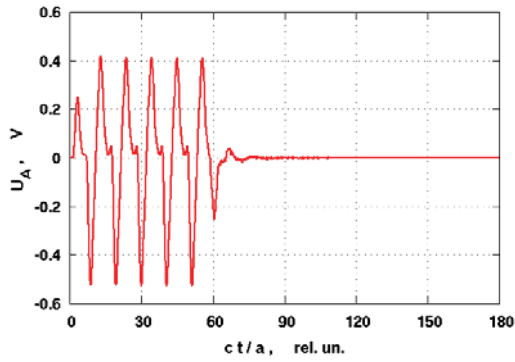
With decreasing the microstrip length to  $D = 1$  mm and below, we observe a slight increase of the RF oscillation frequency up to  $f_{RF} = 3.4$  GHz. On the contrary, with increasing  $D$  to  $D = 20$  mm, we reduce  $f$  to  $f_{RF} = 1.5$  GHz and slightly increase the light intensity (to  $S = 1$ ), though further increase of  $D$  spoils the modulation shape and destroys the RF oscillations.

Finally, we analyze the main circuit of our interest, which is the case when the RTD and resonator frequencies are  $f_G = f_A = 76$  GHz (Figures 4 – 6).

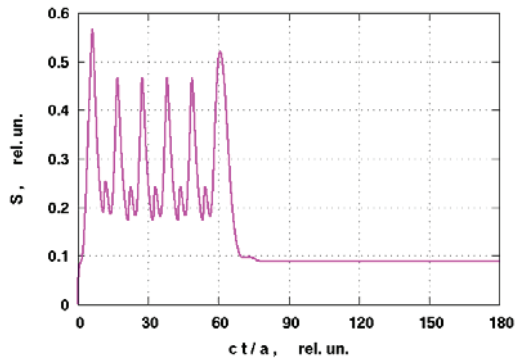
In this case, we reduce the LD electron lifetime parameter to  $\tau_n \sim 10$  ps (see above) so that the LD optical output could follow more frequent RF oscillations of the RTD circuit. Also, we assume twice smaller RTD peak current ( $G_0 = 0.5$ ), which is more typical for high-frequency devices [16], and choose  $D = 1$  mm.

In this setting, we consider two options for obtaining high frequency oscillations. In the first case (case #1), we assume further proportional decrease of all values of capacitance and inductance as we did before.

In the second case (case #2), the RTD capacitance is made 100 times smaller as compared to the case in Fig. 3 (i.e.,  $C$  and  $C_A$  are reduced to  $C = C_A = 5.5$  fF) but the inductance is left the same ( $L = L_A = 0.8$  nH) that makes, possibly, a more realistic system. In this case, at the greater pulse voltage  $V_B = 3$  V, we can get a short burst of RF oscillations or a single RF peak even at the short pulse length  $T_p = 50$  ps and  $T_p = 25$  ps, respectively.



(a)



(b)

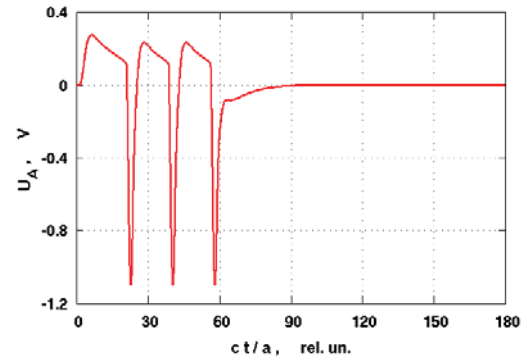
Fig. 4. Case #1 of excitation of (a) RF output and (b) LD optical pulse at  $G_0 = 0.5$ ,  $d = 1$ ,  $f_G = f_A = 76$  GHz, and  $T_p = 0.2$  ns

Fig. 4 shows the results of simulations in case #1. Here we observe a well-defined pulse of RF oscillations and deep modulation of light intensity. The pulse length is now  $T_p = 0.2$  ns, which is 10 times smaller as compared to Figs. 2 and 3, that corresponds to the pulse data rate of 2.5 Gb/s (at 50% duty cycle). The RF frequency in this case is  $f_{RF} = 28.4$  GHz.

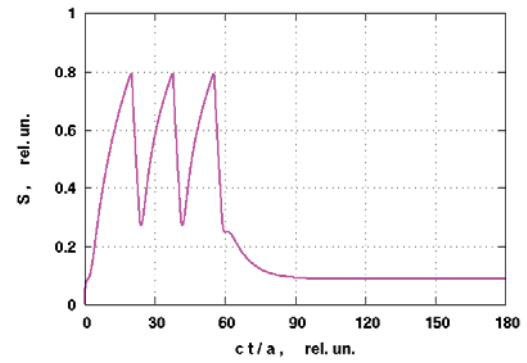
Fig. 5 shows the simulation results in case #2. In this case, the RF oscillation frequency is  $f_{RF} = 16.7$  GHz. It is nearly twice less than the frequency obtained in case #1, though the pulses of both the RF and light signals are well formed and well modulated.

Fig. 6 shows a possibility of exciting a short burst of RF oscillations in the system of case #2 by increasing the pulse peak bias voltage to  $V_B = 3$  V when reducing the pulse duration to  $T_p = 50$  ps. With a shorter pulse, at least one RF peak can be excited at the pulse length  $T_p = 25$  ps. These pulse durations correspond to the data rate of 10 and 20 Gb/s, respectively, assuming 50% duty cycle of periodic pulse sequence.

An essential issue in making high-speed VLC systems is the use of sufficiently fast photo-detectors. We believe the detector arrays will be used for this purpose, similarly to the LED, LD, RTD, and RTD-LD circuit arrays.

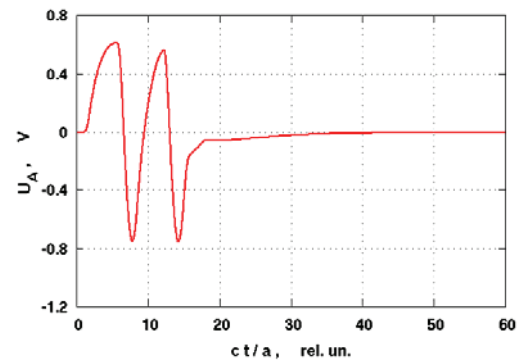


(a)

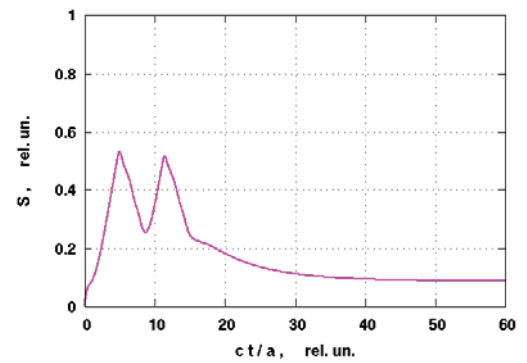


(b)

Fig. 5. Case #2 of excitation of (a) RF output and (b) LD optical pulse at  $G_0 = 0.5$ ,  $d = 1$ ,  $f_G = f_A = 76$  GHz, and  $T_p = 0.2$  ns



(a)



(b)

Fig. 6. Case #2 of excitation of (a) RF output and (b) LD optical pulse when the external pulse bias voltage is  $V_B = 3$  V and the pulse length is  $T_p = 0.05$  ns ( $cT_p/a = 15$ )

For the direct detection of RF modulation of light pulses, an interesting device is the RF optical heterodyne 100 GHz photo-detector proposed in [17]. The device is specified by the RF response  $S_{RF} = 2$  dBm, the RF bandwidth  $f_{RF} = 100$  GHz, the sensitivity to 1550 nm IR radiation with photo-response 0.15 A/W, and the junction parameters of capacitance  $C_{tot} = 36$  fF, inductance  $L = 85$  pH, and series resistance  $R_s = 15$  Ohm.

Development of a detection system capable of processing RF modulation of optical signals in free-space propagation channels is an important goal in the future light communication technology.

### CONCLUSIONS

An RTD-LD circuit with a resonator antenna can be used for synchronous generation of both the RF pulse radiation and the RF modulated optical pulses. This possibility could be of interest for the development of new kinds of optical communication systems.

Our simulations of these circuits have shown a diversity of RF modulation effects and basic conditions for their implementation. A short piece of transmission line is helpful for the RF excitation and light modulation in response to the external pulse signal. It is similar to the stub effect in the excitation of a waveguide system. The optimal length of the piece depends on the phase shift of the feedback signal reflected from the antenna and has to be found from simulations of these circuits.

The period of oscillations of RTD-LD circuit has to be small as compared to the pulse duration of digital signal. In the opposite case, even if a sharp pulse is formed, an extra time is needed for damping the excitation between the pulses. This kind of relaxation delay is quite a common feature in laser systems.

In a high-speed RTD-LD system, the optical output of modern LDs is, generally, capable of following the RF oscillations of the RTD driver. In a slow RTD-LD system, even though narrow light peaks could appear with short excitation pulse, the RF oscillations may not be excited.

The arrays of RTD-LD circuits, which are made as the chip-on-board (COB) structures similar to the LED arrays, are expected to be a promising solution for the development of hybrid lighting and VLC applications. For the better operation of circuits, the RTD-LD frequency should essentially exceed the data transmission bandwidth as presented at the physical layer. This could allow one to implement the effect of RF modulation of optical pulses along with radiation of RF pulses for enhancing the detection of extremely weak data signals.

**Acknowledgement:** This work became possible, partially, due to support by The Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) through the 2221 Fellowship Program.

### References

[1] *Arnon S.* Visible Light Communication. / Arnon S., Ed. - Cambridge: Cambridge University Press, 2015. – 210 p.

- [2] *Ji R., Wang S., Liu Q., Lu W.* High-Speed Visible Light Communications: Enabling Technologies and State of the Art // *Appl. Sci.* 2018. Vol. 8. Paper 589.
- [3] *Chi N., Zhou Y., Shi J., Wang Y., Huang X.* Enabling Technologies for High Speed Visible Light Communication. // *Optical Fiber Communication Conference and Exhibition (OFC-2017)* Los Angeles, USA. 19-23 Mar 2017. OSA Technical Digest. 2017. Paper Th1E.3.
- [4] *Grobe L., et al.* High-Speed Visible Light Communication Systems // *IEEE Communication Magazine.* 2013. – P. 60–66.
- [5] *Vučić J., Langer K.-D.* High-Speed Visible Light Communications: State-of-the-Art. // *OFC/NFOEC Technical Digest.* 2012. Paper OTh3G.3.
- [6] *Tsai C.-T., Chi Y.-C., Peng P.-C., Lin G.-R.* Long-Reach MMWoF Using Single-Sideband Modulated Dual-Mode VCSEL with 16-QAM OFDM at 8 Gbit/s. // *Proc. Conf. Lasers and Electro-Optics (CLEO), San Jose, CA, USA.* 14–19 May 2017. Paper Tu2F3.
- [7] *Tsonev D., Videv S., Haas H.* Towards a 100 Gb/S Visible Light Wireless Access Network. // *Opt. Express.* 2015. Vol. 23(2), – P. 1627–1637.
- [8] *Neumann A., Wierer Jr. J. J., Davis W., Ohno Y., Brueck S. R. J., Tsao J. Y.* Four-Color Laser White Illuminant Demonstrating High Color-Rendering Quality // *Opt. Express.* 2011. Vol. 19 (Suppl. 4), – P. A982–A990.
- [9] *Slight T. J., Romeira B., Wang L., Figueiredo J. M. L., Wasige E., Ironside C. N.* A Liénard Oscillator Resonant Tunnelling Diode-Laser Diode Hybrid Integrated Circuit: Model and Experiment // *IEEE J. Quantum Electron.* 2008. Vol. 44, – P. 1158–1163.
- [10] *Romeira B., Figueiredo J. M. L., Slight T. J., Wang L., Wasige E., Ironside C. N., Quintana J. M., Avedillo M. J.* Synchronisation and Chaos in a Laser Diode Driven by a Resonant Tunnelling Diode // *IET Optoelectron.* 2008. Vol. 2, – P. 211–215.
- [11] *Yurchenko V. B., Yurchenko L. V.* Bistability and Hysteresis in the Emergence of Pulses in Microstrip Gunn-Diode Circuits // *AIP Advances.* 2014. Vol.4, Paper 127126–11.
- [12] *Yurchenko L. V., Yurchenko, V. B.* Noise Generation in a Cavity Resonator with a Wall of Solid-State Power-Combining Array // *11th Int. Conf. Microwaves and Radar (MIKON-96).* 1996. Vol. 2, – P. 454–458.
- [13] *Yurchenko L. V., Yurchenko V. B.* Analysis of the Dynamical Chaos in a Cavity with an Array of Active Devices // *12th Int. Conf. Microwaves and Radar (MIKON-98).* 1998. – P. 723–727.
- [14] *Yurchenko L. V., Yurchenko, V. B.* Generation of Ultrashort Pulses in a Resonator with an Active Layer and a Dielectric Mirror // *Applied Radioelectronics.* 2005. Vol. 4, No. 2. – P. 195–200.
- [15] *Suzuki S., Asada M., Teranishi A., Sugiyama H., Yokoyama H.* Fundamental Oscillation of Resonant Tunneling Diodes above 1 THz at Room Temperature // *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 97, paper 242102.
- [16] *Feiginov M., Sydlo C., Cojocari O., Meissner P.* Resonant-Tunnelling-Diode Oscillators Operating at Frequencies above 1.1 THz // *Appl. Phys. Lett.* 2011. Vol. 99, paper 233506.
- [17] *Li Q., Sun K., Li K., Yu Q., Runge P., Ebert W., Beling A., Campbell J. C.* High-Power Evanescently Coupled Waveguide MUTC Photodiode with > 105-GHz Bandwidth // *J. Lightwave Technol.* 2017. Vol. 35, Issue 21. – P. 4752–4757.

Manuscript received April, 25, 2018



**Vladimir Yurchenko**, M.Sc.(1980), Ph.D. (1984), D.Sc.(1994), occupied research and teaching positions at the NTU "KhPI" (1980-1995), A. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of the National Academy of Sciences of Ukraine (IRE NASU, 1995-2001 and 2008-2014, Kharkiv, Ukraine), Bilkent University (1996-1999, Turkey), National University of Ireland Maynooth (NUIM, 2000-2007, Ireland), Karatay University (2015, Turkey) and, on the TUBITAK-EU Fellowships, at the Engitek Engineering Technologies Ltd (2015-2017) and Gazi University (2014, 2018) in Ankara, Turkey. At the NUIM, he contributed to the design of the ESA PLANCK radio-telescope by developing ultra-fast PO-PO simulations of dual-reflector systems. His research interests are in the theory of semiconductors and electronic devices, hot-electron transport, plasma physics, electromagnetic wave generation, propagation, and scattering, antenna simulations, and mm-wave photonics.



**Lidiya Yurchenko**, M.Sc. (1980), Ph.D. (1991), Senior Research Scientist at the Dept. of Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, A.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of the National Academy of Sciences of Ukraine (IRE NASU), Kharkiv, Ukraine. Research interests: computer simulations of the electromagnetic dynamical chaos in electronic systems, ultrabroad-band oscillations, generation of ultra-short pulses, and spatial power combining.



**Mehmet Ciydem** was born in Ankara, Turkey. He received his B.Sc., M.Sc. and Ph.D. degrees all in electrical engineering from Middle East Technical University (METU), Ankara, Turkey with high honours. After working in defence industry (Aselsan, Havelsan, TAI) for many years, he founded Engitek Ltd company where he is president. He is also one of the founders and board member of Communication Technologies Cluster (CTC) in Turkey. Dr. Ciydem is an Associate Professor of electromagnetics and communications. He lectures occasionally in several universities (Bilkent Univ., Gazi Univ., Karatay Univ., Hacettepe Univ., and Army War Academy). His research interests are in the areas of electromagnetics, antennas, RF/micro-wave engineering, radar, communication systems and mobile communications.

УДК 517.862

Юрченко В. Б. Импульсное моделирование РТД-ЛД цепей для видимой оптической связи / В. Б. Юрченко, Л. В. Юрченко, М. Чийдем // Прикладная радиоэлектроника: науч.-техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 66–71.

Предложено новый тип схемы, состоящей из резонансно-туннельного диода (РТД) и лазерного диода (ЛД) для видимой оптической связи. Схема имеет сверхвысокочастотную (СВЧ) резонансную антенну, соединенную с РТД-ЛД блоком микрополосковой секцией. Схема может преобразовывать импульсы модуляции без несущей в СВЧ импульсы. СВЧ импульсы излучаются антенной для дублирования оптических импульсов, излучаемых ЛД. Оптические импульсы также приобретают СВЧ модуляцию, которая помогает в обнаружении импульсов посредством СВЧ-фильтрации оптических сигналов.

*Ключевые слова:* резонансно-туннельный диод, лазерный диод, видимая оптическая связь.

Ил. 6. Библиогр.: 17 назв.

УДК 517.862

Юрченко В. Б. Імпульсне моделювання РТД-ЛД схем для видимого оптичного зв'язку / В. Б. Юрченко, Л. В. Юрченко, М. Чийдем // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 66–71.

Запропоновано новий тип схеми з резонансно-тунельного діода (РТД) і лазерного діода (ЛД) для видимого оптичного зв'язку. Схема має надвисокочастотну (НВЧ) резонансну антену, з'єднану з РТД-ЛД блоком мікрополосковою секцією. Схема може перетворювати імпульси модуляції без несучої в НВЧ імпульси. НВЧ імпульси випромінюються антенною для дублювання оптичних імпульсів, випромінюваних ЛД. Оптичні імпульси також набувають НВЧ модуляцію, яка допомагає у виявленні імпульсів за допомогою НВЧ-фільтрації оптичних сигналів.

*Ключові слова:* резонансно-тунельний діод, лазерний діод, видимий оптичний зв'язок.

Іл. 6. Бібліогр.: 17 найм.

## ELECTRODELESS SULFUR LAMP ON THE BASIS OF MICROWAVE EXCITATION: ESTIMATION OF SPECTRAL EFFECTIVENESS OF RADIATION FOR BIO-OBJECTS

T. FROLOVA

The paper considers a lighting system based on an electrodeless sulfur lamp with microwave excitation for bio-objects. As a result of the intensive development of new technologies in the field of lighting equipment (LED, HID lamps, and others) it is necessary to replace outdated lighting for a more energy-efficient one, by using new modern lamps of artificial radiation for biological objects (human, animals and plants). The parameters of optical radiation sources for different biological objects are different (for humans and some animals they are based on the sensitivity of the eye (photonic response curve), for plants – it is the photon flux density of photosynthetically active radiation (PAR) from 400 to 700 nm). High-pressure sodium lamps (HPSL) and metal halide lamps (MHL) are the most common among the artificial light sources used in greenhouses. However, at present, the most effective and promising are lighting systems based on LED lamps and the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation. The latter is environmentally friendly (it does not contain mercury), with a high efficiency of PAR (72%) and durable (above 60,000 hrs.) Analysis of the spectral efficiency of radiation showed that the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation has a high photosynthetic photon flux density (PPFD) ( $1440 \mu\text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ) in an optical range of 400-700 nm.

*Keywords:* electrodeless sulfur lamp with microwave excitation, bio-object, sunlight, spectral irradiance, photosynthetically active radiation, photosynthetic photon flux density.

### INTRODUCTION

At present the problem of finding and implementing energy-efficient solutions in various areas of human economic activity is a priority, the role of an artificial lighting is particularly important. Artificial radiation sources have different effects on living organisms (human, animals, plants, etc.), therefore, depending on the effect on bio-objects, the ones of photophysical, photochemical and photobiological action are distinguished [1]. Sources of photobiological action are used in agro-industrial complexes (example, for growing plants in the protected ground) [2-4]. The percentage of the sectoral electricity consumption in the technological processes of the greenhouse farm with the use of optical radiation is 10-15%, and the losses in them reach 40%. Plants grown in greenhouses, using the radiant energy of artificial light sources, transform this energy into the chemical energy of plants. At the same time, the higher the absorption coefficient of artificial radiation sources, the less electrical energy is spent on growing a unit of plant products. The spectrum of light affects both the consumption of electrical energy by plants and the efficiency of photosynthesis. Visible radiation is the main source of energy for photosynthesis, therefore, with increasing illumination, the intensity of photosynthesis will also increase.

The purpose of this paper is to evaluate the spectral efficiency of the electrodeless sulfur lamp based on microwave excitation for use in illuminate the plants in agro-industrial complexes.

Photometric methods [5], mathematical modeling and quantitative analysis were used during the research.

### 1. FORMULATION OF THE PROBLEM

The best artificial light sources are sources that have a spectrum close to sunlight (Fig. 1) [6].

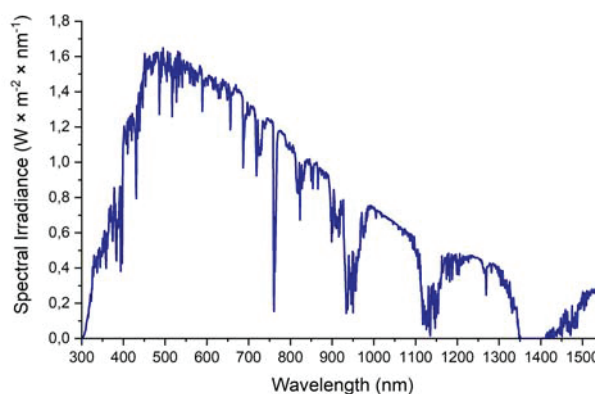


Fig. 1. The spectrum of solar radiation AM 1.5G on the surface of the Earth

When choosing the artificial radiation source for plants, one cannot be based on the parameters of lamps for humans, where the luminous flux is measured in lumens (lm). Since the spectral sensitivity curves of the standard human eye, birds, and photosynthesis of plants are different. Every living organism has its own spectrum of absorption of optical radiation. In fig. 2 are presented:

- averaged spectral sensitivity curve of the standard human eye, established by an international agreement in 1924 [5];
- averaged curve of the spectral sensitivity of the eye of a domestic bird [7];
- the curve of the relative quantum efficiency as determined by the average plant response for photosynthesis (from K. J. McCree [8]).

The curves of the spectral sensitivity of the human and animal eye (bird) have the peak about 550 nm. Humans and many animals use what is called photopic vision in well-lit conditions to perceive color and light, so

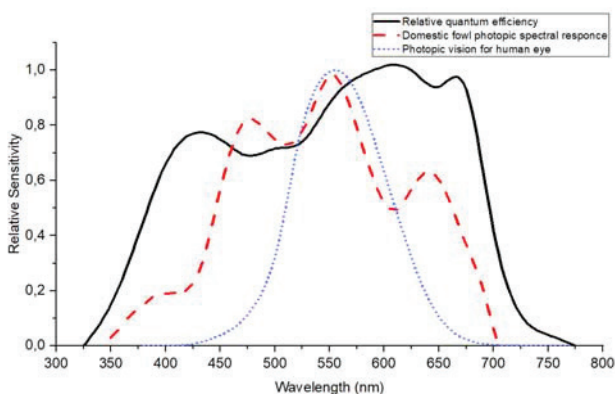


Fig. 2. Spectral sensitivity curves for human, birds, and plants

this graph is also called the photopic response curve. The peaks of the photosynthetic efficiency response of plants are in the red (600–675 nm) and blue (425–450 nm) regions and it is called Relative Quantum Efficiency (RQE). Therefore, plants react differently to light than humans and animals.

Such a difference in the spectra is due to the influence of optical radiation on the efficiency of photochemical processes in the plant (photosynthesis, photomorphogenesis, chlorophyll synthesis, etc.). This is due to the fact that a particular organ of photosynthetically activity in plants is the leaf where the specialized cell structures are located – chloroplasts containing pigments and other components necessary for the processes of absorption and conversion of light energy into chemical potential. The photosystem contains about 250 molecules of pigments capable of absorbing light. The source of energy is electromagnetic radiation of the visible region of the spectrum with an energy of 1–3 eV [9]. Each pigment has its own individual absorption spectrum and, accordingly, its own spectral characteristic of the light activity of the exciting radiation. Green pigments are the main pigments of plants that provide for the absorption of radiant energy and its use for building biomass.

There are several ways to accelerate growth and increase the period of plant growth by using artificial radiation sources. Artificial radiation sources are used:

- as an addition to natural daylight; to increase the level of assimilation lighting in order to increase the intensity of photosynthesis and thereby accelerate growth and improve the quality of plants in greenhouses (additional assimilation lighting);
- to control the light period by lengthening the natural daylight through the use of artificial lighting (photoperiodic lighting);
- as full daylight replacement with artificial lighting, it allows achieving maximum climate control (cultivation without daylight).

## 2. PHOTOBIOLOGICAL PROCESSES OCCURRING IN PLANTS

Photobiological processes in plants are photosynthesis (synthesis of organic molecules under the influence of

the energy of sunlight), phototropism (rotation of leaves or plant stems to light or from light) and photoperiodism (regulation of diurnal and annual cycles of life through cyclic influences of day/night) [10]. The main and energy-intensive process is photosynthesis, which occurs when the optical radiation energy is absorbed by plants.

The leaves of plants absorb visible and part of ultraviolet radiation and synthesize organic substances from mineral (photosynthesis). The scientists found out that each part of the spectrum of solar radiation near the Earth's surface (Figure 2) affects plants differently. Some scientists distinguish the red spectrum, as the main illumination for photosynthesis. However in the papers of Voskresenskaya N. P. and Tikhomirov A. A. was shown that the most effective can be both red and blue light, depending on the kind of the plants [11, 12]. Other scientists believe that plants need the entire solar spectrum for normal development and life activity because the effect of optical radiation on the plant is diverse and cannot be reduced to photosynthesis alone [9].

However, it should be noted that the excess of the certain spectrum in the source of artificial radiation can be bad for plants:

- the high content of blue color causes inhibition of growth of the stem and leaf surface, thus leaves are formed with a high specific gravity;
- the high content of red color promotes an intensive growth of leaf area and elongation of axial organs;
- with the predominance of green color, thin leaves with small count cells and chloroplasts are formed.

Table 1 presents the results of researches of a better percentage content of the blue, green, and red spectrum of radiation in the source of optical radiation for plants [13].

Table 1 Requirements for the distribution of optical radiation

Plant species	Blue (400 – 500 nm), %	Green (500 – 600 nm), %	Red (600 – 700 nm), %
Tomato	15	17	68
Cucumber	17	40	43
Lettuce	45	20	35
Radish	34	33	33
Wheat	25	1	74
Other	30	20	50

## 3. PHOTOSYNTHETICALLY ACTIVE RADIATION

The effectiveness of light exposure is determined by the whole complex of reactions associated with the conversion of radiation energy into biological radiation. The speed of these reactions and the effectiveness of the photosynthetic effect depends on many factors: the irradiation density, the stage of plant growth, the spectral composition of the radiation, and other.

The sources of optical radiation for human are chosen based on the value of illuminance is measured in lux (lx), whereas for plants the determining value is the photon flux incident on the surface of the leaf. However, at

Table 2

Parameters of lamps

Parameter	Electrodeless sulfur lamp with microwave excitation	LED lamp
Rated current, A	4,7	3,5
Input voltage, V	220	32 – 36
Power consumption, W	1850	120
Angle of divergence, °C	80	90
Start-up Time, sec	12	1 – 3
Efficacy, lm/W	101	174
Temperature, °C	50 – 80 (on the searchlight glass)	60 – 90 (on a chip)
Rated life, hours.	60000 – 100000	50000 – 70000

the moment there is no single approach to measuring the photon flux. This is due to the lack of an official unit for measuring the photon flux in the international SI system.

For the sources of optical radiation of the greenhouse complex, the values of photosynthetically active radiation (PAR-photosynthetically active radiation) and photosynthetic photon flux density (PPFD) are used.

Part of the optical range to which the plant is most susceptible, i. e., a necessary and sufficient range for life support and biomass formation in the process of photosynthesis that it promotes the development of the plant, is the PAR region [8]. The PAR range is determined from 400 nm to 700 nm [8, 14], or from 380 nm to 710 (720) nm [9]. However, this difference does not significantly affect the measurement of the PAR of the artificial radiation source.

The value for evaluating the PAR of artificial optical sources is defined as the photosynthetic photon flux density PPFD, which shows the number of photons in the 400–700 nm waveband incident of the leaf per unit time on a unit surface. It is now customary to measure PPFD in  $\mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ . However, there is no single approach to determining PPFD, so the universal formula was chosen [8]:

$$PPFD = \frac{\int_{400}^{700} (E(\lambda) \cdot \lambda) d\lambda}{h \cdot N_A \cdot c} \quad (1)$$

where  $E(\lambda)$  is the irradiance, which characterizes the absolute value of the PAR radiation at the wavelength,  $\text{W}/\text{m}^2$ ;  $\lambda$  – wavelength, nm;  $h$  – Planck's constant, J·s;  $N_A$  – Avogadro's number, 1/mol;  $c$  – speed of light, m/s.

Irradiation is a physical quantity, one of the radiometric quantities, which characterizes the surface power density of a radiation incident on the unit surface. The value of the efficiency of PAR shows, as a percentage, how much the spectrum of the artificial radiation source coincides with the RQE of the plant (see Fig. 2).

#### 4. EVALUATION THE SPECTRAL EFFICIENCY OF AN ELECTRODELESS SULFUR LAMP BASED ON MICROWAVE EXCITATION FOR GREENHOUSES

The use of specialized artificial radiation sources in crop production is diverse today, but not all sources are effective and safe. New and prospective sources of artificial lighting in protected ground conditions are LED and plasma (in particular, the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation) lamps [9, 15].

The efficiency of application of the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation for the agro-industrial complex is considered [16]. For comparison, a the LED lamp is also selected. The characteristics of the lamps are given in Table. 2.

In fig. 3 shows the spectral characteristics of the lamps, as well as the average photosynthetic response of plants to light energy (McCree curve).

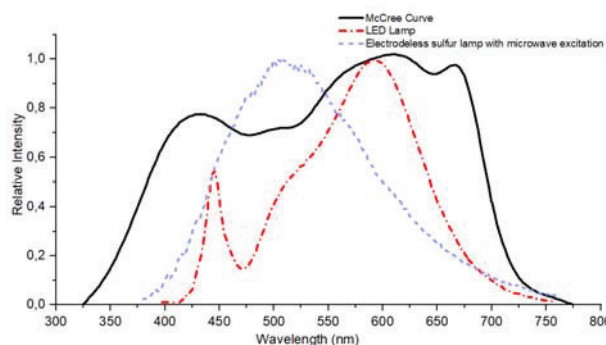


Fig. 3. Spectral characteristics of the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation, LED lamp and average photosynthetic response of plants to light energy according to McCree

The spectral characteristics of the lamps are in the PAR waveband (400-700 nm) and are close to the spectral absorption of the plant leaf. The LED lamp has peaked in blue (400-500 nm) and in the red (600-700 nm) spectral range. The sulfur lamp with microwave excitation has a peak at 510 nm, which is closer to the spectrum of solar radiation AM 1.5G and the spectral sensitivity curve of the human eye (550 nm).

As noted earlier, illumination is not a determining parameter for the artificial radiation source for plants in the agro-industrial complex. For greenhouses, it is important to know the parameter of PPFD lamps. For its definition, it is necessary to convert from radiometric (irradiance ( $E(\lambda)$ ,  $\text{W}/\text{m}^2$ )) to photometric units of PPFD ( $\mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ). This recalculation is carried out using the formula 1. That is, to calculate the parameter PPFD it is necessary to define the absolute value of irradiance in the PAR range. This value can be measured with a spectrometer (ASEQ LR1).

This instrument measures the amount of the energy contained within the light of the optical radiation source,

which is the irradiance in the PAR waveband. Measurements of the irradiance dependence in PAR range perform for the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation was carried out at a distance of 2 m and 3.5 m from the end of fiber optic cable for direct light into the spectrometer, and for the LED lamp – it is of 20 cm and 40 cm. The results of the experiment are shown in Fig. 4 and Fig. 5, as well as the color space of the investigated lamps in Fig. 6.

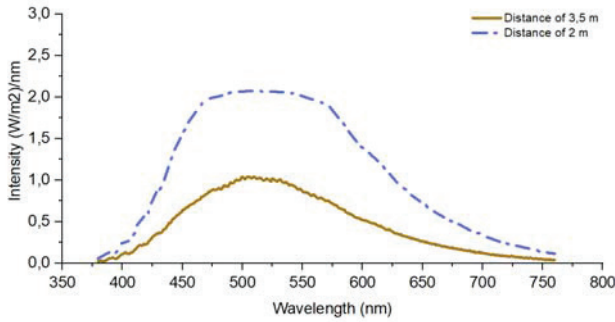


Fig. 4. The spectral characteristic of the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation at a distance of 2 m and 3.5 m

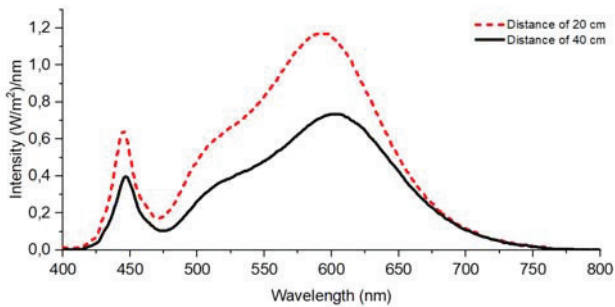


Fig. 5. The spectral characteristic of the LED lamp at a distance of 20 cm and 40 cm

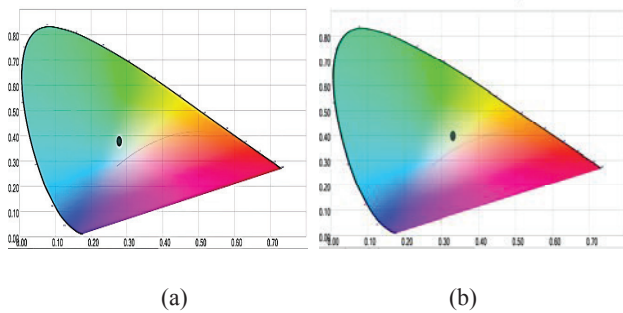


Fig. 6. Color space of electrodeless sulfur lamp with microwave excitation (a) and LED lamp (b)

As mentioned above, the best source of optical radiation for plants is the Sun. Therefore, the parameters of lamps that are used in conditions of protected ground, should be approximated to the characteristics of the Sun at the surface of the Earth - AM 1.5G. AM (Air Mass).

Fig. 7 shows the spectral characteristics of the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation and the LED lamp for different distances from the end of fiber optic cable of the spectrometer, as well as solar spectrum AM 1.5G, and the average photosynthetic response of plant leaves.

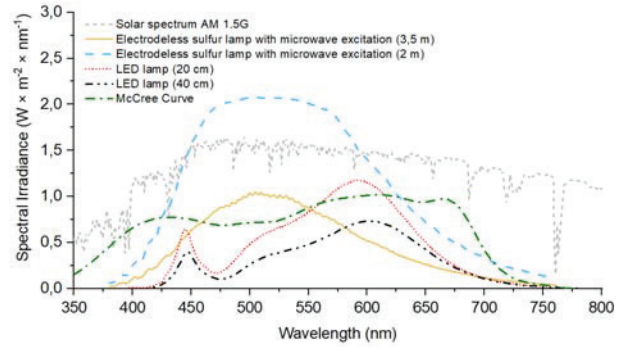


Fig. 7. Spectral characteristics of the artificial radiation sources, standard solar spectrum AM 1.5G, and McCree curve

As can be seen, from Fig. 7, the spectral characteristics of the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation at a distance of 3.5 m with an illumination area of ~ 30 m<sup>2</sup> have the best match to the spectral characteristics of the Sun (AM 1.5G). At a distance of 2 m, this lamp has a very large value of irradiance, which exceeds the value of the irradiance of the Sun. Therefore, the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation should be placed at a distance of 3.5 m from plants in large industrial greenhouses, so as not to damage them. The spectrum of the LED lamp at a distance of 20 cm has an illumination area of ~ 0.15 m<sup>2</sup> and therefore this lamp can be used for small greenhouses. For the use of LED lamps in large greenhouses possible with combining, for example, 6 lamps together, thereby increasing the value of the radiation intensity in the PAR range. 6 lamps at a distance of 1 m create the same irradiance as at a distance of 20 cm, but with an illumination area of ~ 12 m<sup>2</sup>.

Table 3 shows the percentage of the spectrum of lamps in the PAR range, which was calculated by the formula

$$k_i = \frac{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (E(\lambda))d\lambda}{\int_{400}^{700} (E(\lambda))d\lambda} \cdot 100\%,$$

where  $E(\lambda)$  is the absolute value of the PAR irradiance for blue ( $\lambda_{\min} = 400$  nm and  $\lambda_{\max} = 500$  nm), green ( $\lambda_{\min} = 500$  nm and  $\lambda_{\max} = 600$  nm) and red ( $\lambda_{\min} = 600$  nm and  $\lambda_{\max} = 700$  nm) spectra;  $i = 1, 2, 3$ .

Table 3  
The percentage of the spectrum of lamps in the PAR range

Source	Blue (400–500 nm), %	Green (500–600 nm), %	Red (600–700 nm), %
Sun AM 1,5	34	38	35
Electrodeless sulfur lamp with microwave excitation	37	43	20
LED lamp	14	47	45

For artificial radiation sources used in greenhouses, it is recommended to provide such ratios of the spectral ranges of the PAR irradiance:

- blue (400-500 nm) - 20 - 25%;
- green (500-600 nm) - 20 - 25%;
- red (600-700 nm) - 60 - 50%.

As can be seen from Table. 3 the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation does not have enough radiation intensity in the red region (600-700 nm), which should be the largest percentage in the spectrum [46-48]. The value of the PPFD parameter for normal plant growth is:

- light-loving plants – from 700 to 800  $\mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ;
- plants that are less demanding of light – from 300 to 500  $\mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ;
- shadow-tolerant plants – from 200 to 300  $\mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ .

The values of the PPFD parameter for the investigated lamps are presented in Table. 4.

Table 4

The value of PPFD for the different sources

Source	PPFD, $\mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$
Sun AM 1,5G	1700
Electrodeless sulfur lamp with microwave excitation; 2 m	3620
Electrodeless sulfur lamp with microwave excitation; 3,5 m	1440
LED lamp; 20 cm	904
LED lamp; 40 cm	514
6 LED lamp; 1 m	914

As can be seen from Table. 4 LED lamp has insufficient PPFD value in comparison with the Sun, but it is sufficient for normal plant growth. The electrodeless sulfur lamp with microwave excitation has more than twice the value of PPFD at a distance of 2 m ( $3620 \mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ). Therefore, at this distance, in no case should you place the lamp. This will negatively affect the vital activity of plants. However, at a distance of 3.5 m from the lamp, the radiation intensity is very close to the intensity of the solar spectrum. The location of the lamp at this distance allows us to cover a large area of the plant surface, so it is effective for industrial greenhouse complexes.

### CONCLUSION

In this paper, an evaluation of the efficiency of the application of the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation for the illumination of plants in agro-industrial complexes was carried out. Studies have shown that they have a spectral characteristic close to the spectrum of the Sun AM 1.5G on the Earth's surface in the waveband of 400-700 nm (PAR), to which the plant is most sensitive.

The electrodeless sulfur lamp with microwave excitation has a high index of PPFD (at the distance of 2 m is  $3620 \mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$  and 3.5 m is  $1440 \mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ). It follows that the electrodeless sulfur lamp with microwave excitation is better used for industrial greenhouses (the illumination area of one lamp is  $\sim 30 \text{ m}^2$ ), whereas LED

lamps cannot compete with it even in case of combining them into 6 pieces together the value of PPFD at a distance of 1 m, in this case, is  $914 \mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$  and an illumination area of  $\sim 12 \text{ m}^2$ . Therefore, LED lamps can be used in small greenhouses.

### References

- [1] *Ayzenberg Yu.B.* Spravochnaya kniga po svetotekhnike. [The reference book on lighting engineering]. 3rd prod. Moscow: Znak 2006. – 972 p. (in Russian)
- [2] *Cathey H.M.* Light and lighting systems for horticultural plants / H.M. Cathey L.E. Campbell // Hort. Rev. (Amer. Soc. Hort. Sci.) 2: 1980. – PP. 491–537.
- [3] *Schulze E.-D.* Plant ecology / E.-D. Schulze, E. Beck, K. Müller-Hohenstein. – Berlin : Springer, 2005. – 702 p.
- [4] *Hanan Joe J.* Greenhouses: advanced technology for protected horticulture. CRC press, 2017.
- [5] *Gurevich M. M.* Fotometriya (Teoriya, metody i pribory) [Photometry (Theory, Methods and Devices)], Leningrad.: Energoatomizdat, 1983. – 272 p. (in Russian)
- [6] ASTM G173-03(2012), Standard Tables for Reference Solar Spectral Irradiances: Direct Normal and Hemispherical on 37° Tilted Surface, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2012, DOI: 10.1520/G0173-03R12.
- [7] *Prescott N. B.* Spectral sensitivity of the domestic fowl (gallus g. domesticus) / N. B. Prescott, C. M. Wathes // British Poultry Science. – 1999. – Vol. 40, № 3. – P. 332–339.
- [8] *McCree K. J.* The action spectrum, absorptance and quantum yield of photosynthesis in crop plants / K. J. McCree / Agricultural Meteorology. – 1972. – № 9. – P. 191-216.
- [9] *Kozyreva I. N.* Formation of phyto flux of LED irradiation plants for growing crops in protected soil conditions. : dis. cand. tech. sciences. Tomsk. : National Research Tomsk Polytechnic University, 2014. – 119 p. (in Russian)
- [10] *Inada K.* Effects of leaf color and the light quality applied to leaf-developing period on the photosynthesis response spectra in crop plants / K. Inada // Proc. Crop Sci. Soc. Jpn. – 1977. – № 46: – P. 37-44.
- [11] *Voskresenskaya N.P.* Photosynthesis and Spectral Composition of Light / N. P. Voskresenskaya // Moscow: Nauka. – 1965. – 311 p. (in Russian)
- [12] *Tikhomirov A. A., Sharupich V. P., Lisovsky G. M.* Svetokul'tura rasteniy: biofizicheskoe i biotekhnologicheskoe osnovy [Plant light culture: biophysical and biotechnological bases]. Training manual, Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk: Izd. Sib. otd. RAN.– 2000. – 213 p. (in Russian)
- [13] *Yuferev L. Yu.* Energy-resource-saving lighting and irradiation systems and installations of agricultural purpose on the basis of a resonant power supply system / L. Yu. Yufe-rev // - Moscow: All-Russian Scientific Research Institute of Agriculture Electrification, 2015. – 424 p. (in Russian)
- [14] "Principles of Radiation Measurement. Li-Cor." [Online]. Available: <https://www.licor.com/documents/liuswfvuvtqn7e9loxaut>. [Accessed: 17-Nov-2017].
- [15] *Frolova T.* Modern radiation sources in lighting systems for growing plants in conditions of protected ground / T. Frolova, M. Nikiforova // Proc. of the VI International Scientific and Technical Conference within the framework

of the Lighting International Forum "LIGHT FORUM'2017" October 4–6, 2017. – Kharkiv: O.M. Beketov NUUE, 2017. – P. 149-151. (in Russian)

- [16] Frolova T. I. Perspectives of developing highly efficient light sources: from theory to real lighting systems / T. I. Frolova, G. I. Churyumov // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2014. – Vol. 13. – № 2. – P. 135–143. (in Russian)

Надійшла до редколегії 18.06.2018



**Tetyana Frolova**, M.Sc. (1997), Ph.D. (2005), Associate Professor (2011), Leading Researcher at the Dept. of Physical Fundamentals of Electronic Engineering, Kharkiv National University of Radio Electronics. Research interests – develop 2D and 3D mathematical and computer models for the study of physical processes in vacuum devices and plasma, the design of new high-performance devices based on microwave devices, such as microwave discharge lamps.

УДК 628.9: 535.2

Фролова Т. И. **Безэлектродная серная лампа на основе СВЧ возбуждения: оценка спектральной эффективности излучения для биообъектов** / Т. И. Фролова // Прикладная радиоэлектроника: науч. – техн. журнал. – 2018. – Том 17, №. 1, 2. – С. 72–77.

В работе рассматривается осветительная система на основе безэлектродной серной лампы с СВЧ возбуждением для биообъектов. В связи с интенсивным развитием новых технологий в области осветительной техники (светодиодных, газоразрядных ламп и др.) необходима замена устаревшего освещения на более энергоэффективное, за счет применения новых современных источников искусственного излучения для биологических объектов (человека, животных и растений). Для различных биологических объектов параметры источника оптического излучения отличаются (для человека и некоторых животных основываются на чувствительности глаза (кривая фотопического отклика), для растений – это плотность потока фотонов в диапазоне фотосинтетически активной радиации (ФАР) (англ. photosynthetically active radiation, PAR) от 400 до 700 нм). Натриевые лампы высокого давления (НЛВД) и металлогалогенные лампы (МГЛ) являются наиболее распространенными среди искусственных источников света, используемых в теплицах. Однако наиболее эффективными и перспективными на сегодняшний день являются осветительные системы на основе светодиодов и безэлектродной серной лампы с СВЧ возбуждением. Последняя является экологичной (не содержит ртуть), с высоким КПД ФАР (72%) и долговечной (свыше 60 тыс. ч.). Анализ спектральной эффективности излучения показал, что безэлектродная серная лампа с СВЧ возбуждением имеет высокий показатель плотности фотосинтетического фотонного потока (англ. photosynthetic photon flux density, PPF) (1440  $\mu\text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ) в оптическом диапазоне 400–700 нм.

*Ключевые слова:* безэлектродная серная лампа с СВЧ возбуждением, биообъект, солнечный свет, облученность, фотосинтетически активная радиация (ФАР), плотность фотосинтетического фотонного потока.

Табл. 04. Ил. 07. Библиогр.: 16 назв.

УДК 628.9: 535.2

Фролова Т. И. **Безэлектродная серная лампа на основе НВЧ возбуждения: оценка спектральной эффективности випромінювання для біооб'єктів** / Т. І. Фролова // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2018. – Том 17, №. 1, 2. – С. 72–77.

В роботі розглядається освітлювальна система на основі безелектродної сірчаної лампи з НВЧ збудженням для біооб'єктів. У зв'язку з інтенсивним розвитком нових технологій в області освітлювальної техніки (світлодіодних, газорозрядних ламп та ін.) Необхідна заміна застарілого освітлення на більш енергоефективне, за рахунок застосування нових сучасних джерел штучного випромінювання для біологічних об'єктів (людини, тварин і рослин). Для різних біологічних об'єктів параметри джерела оптичного випромінювання відрізняються (для людини і деяких тварин ґрунтуються на чутливості ока (крива фотопічного відгуку), для рослин – це щільність потоку фотонів у діапазоні фотосинтетично активної радіації (ФАР) (англ. Photosynthetically active radiation, PAR) від 400 до 700 нм). Натрієві лампи високого тиску (НЛВД) і металогалогенні лампи (МГЛ) є найбільш поширеними серед штучних джерел світла, що використовуються в теплицях. Однак найбільш ефективними і перспективними на сьогоднішній день є освітлювальні системи на основі світлодіодів і безелектродної сірчаної лампи з НВЧ збудженням. Остання є екологічною (не містить ртуть), з високим ККД ФАР (72%) і довговічною (більш ніж 60 тис. год.). Аналіз спектральної ефективності випромінювання показав, що безелектродна сірчана лампа з НВЧ збудженням має високий показник щільності фотосинтетичного фотонного потоку (англ. Photosynthetic photon flux density, PPF) (1440  $\mu\text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ) в оптичному діапазоні 400–700 нм.

*Ключові слова:* безелектродна сірчана лампа з НВЧ збудженням, біооб'єкт, сонячне світло, опромінення, фотосинтетично активна радіація (ФАР), щільність фотосинтетичного фотонного потоку.

Табл. 04. Іл. 07. Бібліогр.: 16 найм.