International Science Group

ISG-KONF.COM

XXVII

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE "TRENDS OF YOUNG SCIENTISTS REGARDING THE DEVELOPMENT OF SCIENCE”

Edmonton, Canada

July 11 - 14, 2023

ISBN 979-8-89074-573-6

DOI 10.46299/ISG.2023.1.27

TRENDS OF YOUNG SCIENTISTS REGARDING THE DEVELOPMENT OF SCIENCE

Proceedings of the XXVII International Scientific and Practical Conference

Edmonton, Canada
July 11 – 14, 2023

UDC 01.1

The 27th International scientific and practical conference "Trends of young scientists regarding the development of science" (July 11 – 14, 2023) Edmonton, Canada. International Science Group. 2023. 225 p.

ISBN – 979-8-89074-573-6
DOI – 10.46299/ISG.2023.1.27

TABLE OF CONTENTS

НЕОДНОРІДНА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПОЛОСИ

Рожкова Крістіна Василівна,
студентка групи КУІБ-22-1
Харківський національний університет радіоелектроніки

Стогній Надія Петрівна
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики
Харківський національний університет радіоелектроніки

Фізика з плином часу перетворилася з науки описової на науку точну, що зумовлене використанням математичного апарату, або окремих математичних методів задля характеристики тих чи інших фізичних явищ, процесів. Таким чином, математична фізика є одним з найголовніших досягнень людства. Ця теорія знаходиться на стику математики і фізики, оскільки такі моделі описують конкретні фізичні процеси, а методи побудови і дослідження цих моделей є математичними.

Під час вивчення навчальної, методичної, науково-популярної літератури з математичної фізики, ми дійшли до такого висновку, що багато уваги приділяється розв'язуванню одномірних однорідних задач параболічного типу, ця тема досить повно розроблена як в теоретичному, так і практичному планах. Але однорідні задачі - це частинний випадок неоднорідних, тому нас зацікавило питання розв'язання саме неоднорідних задач параболічного типу. Тут ми стикаємося із проблемою, що висвітлення цього питання здійснюється досить фрагментарно та відповідний матеріал не систематизовано до вигляду, придатного для використання на практиці.

Дану проблему вивчали в своїх працях [1] Арамович, Левін (крайові задачі), [2] Смірнов (диференціальні рівняння в частинних похідних), [3] Самарський (коректність постановки задач математичної фізики) тощо.

Постановка задачі. Знайти розв’язок неоднорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x,y,t) \qquad (1)$$

у полосі $D(0 < x < l,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0)$, з початковою умовою

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = f(x,y), \qquad (2)$$

та граничними умовами загального вигляду

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right]\Big|_{x=0} = \varphi(y,t), \tag{3}$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right]\Big|_{x=l} = \phi(y,t). \tag{4}$$

Застосовуємо загальне перетворення Фур'є за змінною y. Тоді рівняння (1) перетвориться в задачу:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,s,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 s^2 \tilde{u}(x,s,t) + \tilde{F}(x,s,t) \tag{1*}$$

при відповідних початкових умовах

$$\tilde{u}(x,s,t) = \tilde{f}(x,s), \tag{2*}$$

граничних умовах

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \beta_1 \tilde{u}\right]\Big|_{x=0} = \tilde{\varphi}(s,t), \tag{3*}$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \beta_1 \tilde{u}\right]\Big|_{x=0} = \tilde{\phi}(s,t). \tag{4*}$$

Використовуючи підстановку

$$\tilde{v}(x,s,t) = \exp\left[-a^2 s^2 t\right] \cdot \tilde{u}(x,s,t), \tag{5*}$$

одержимо таку систему:

$$\frac{\partial \tilde{v}(x,s,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{F}(x,s,t), \tag{5}$$

$$\tilde{v}(x,s,t)\big|_{t=0} = \tilde{f}(x,s), \tag{6}$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \beta_1 \tilde{v}\right]\Big|_{x=0} = \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{\varphi}(s,t), \tag{7}$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \beta_1 \tilde{v}\right]\Big|_{x=0} = \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{\phi}(s,t). \tag{8}$$

Розглянемо наступні два окремі випадки, які найчастіше зустрічаються.

Перша неоднорідна гранична задача теплопровідності

У цьому випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = 1$ система (5)-(8) перетворюється в систему

$$\frac{\partial \tilde{v}(x,s,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{F}(x,s,t), \tag{9}$$

$$\tilde{v}(x,s,t)\big|_{t=0} = \tilde{f}(x,s), \tag{10}$$

$$\tilde{v}(x,s,t)\big|_{x=0} = \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{\varphi}(s,t), \tag{11}$$

$$\tilde{v}(x,s,t)\big|_{x=l} = \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{\phi}(s,t). \tag{12}$$

Враховуючи підстановку (5^*), розв’язок задачі (9)-(12) буде мати такий вигляд:

$$\tilde{u}(x,t) = \int_0^l \frac{\exp(-a^2 s^2 t)\,\tilde{f}(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2 t}\right] \right) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \exp\left[-a^2 s^2 (t-\tau)\right] \tilde{\varphi}(s,\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau -$$

$$- \int_0^t \exp\left[-a^2 s^2 (t-\tau)\right] \tilde{\phi}(s,\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^l \frac{\exp\left[-a^2 s^2 t\right] \tilde{F}(\xi,s,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right) d\xi. \tag{13}$$

Застосуємо обернене перетворення Фур’є. Оскільки оригіналом зображення $\exp\left[-a^2 s^2 t\right]$ є функція $\frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left[-\frac{y^2}{4a^2 t}\right]$, то застосовуючи формулу згортки, знайдемо оригінал функції (13), тобто формальний розв’язок першої неоднорідної задачі теплопровідності:

$$u(x,y,t) = \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\eta)}{4a^2 \pi t} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}\right] \right) d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta,\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(x+2kl)^2+(y-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\eta -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta,\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x-l+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(x-l+2kl)^2+(y-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right) d\eta. \quad (14)$$

Якщо функції $f(x,y)$, $\varphi(y,t)$, $\phi(y,t)$, $F(x,y,t)$ неперервні і обмежені і, крім того, функція $F(x,y,t)$ задовольняє умові Гьольдера за першими двома аргументами, то легко довести, що розв'язок (14) задовольняє рівнянню (1), початковій умові (2) і граничним умовам першого роду:

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = \varphi(y,t), \quad u(x,y,t)\big|_{x=l} = \phi(y,t).$$

Друга неоднорідна гранична задача теплопровідності

Покладаємо: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 0.$ Тоді задача (1)-(4) у зображеннях прийме вид:

$$\frac{\partial \tilde{v}(x,s,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{F}(x,s,t), \quad (15)$$

$$\tilde{v}(x,s,t)\big|_{t=0} = \tilde{f}(x,s), \quad (16)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{v}(x,s,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{\varphi}(s,t), \quad (17)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{v}(x,s,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \exp\left[a^2 s^2 t\right] \tilde{\phi}(s,t). \quad (18)$$

У цьому випадку, з урахуванням (5^*), зображення $\tilde{u}(x,s,t)$ буде мати вид:

$$\tilde{u}(x,t) = \int_0^l \frac{\exp(-a^2 s^2 t)\, \tilde{f}(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2 t}\right] \right) d\xi -$$

$$-\int_0^t \frac{a\cdot\exp\left[-a^2s^2t\right]\tilde{\varphi}(s,\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t \frac{a\cdot\exp\left[-a^2s^2t\right]\tilde{\phi}(s,\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{\exp\left[-a^2s^2t\right]\tilde{F}(\xi,s,\tau)}{4a^2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\xi. \quad (19)$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур’є, одержимо шуканий розв’язок:

$$u(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right]\right)d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x+2kl)^2+(y-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-l+2kl)^2+(y-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\eta. \quad (20)$$

Умови, які накладаються на функції $f(x,y)$, $\varphi(y,t)$, $\phi(y,t)$, $F(x,y,t)$, залишаються такі ж самі, що і для першої граничної задачі.

Отже, оскільки курс методів математичної фізики не сповна розкриває матеріал щодо вивчення неоднорідних задач параболічного типу, то постає потреба розглянути знаходження їх розв'язків, зокрема, для полоси. І тому в нашій роботі ми відновили той ланцюг умовиводів, який схований за записом умови і отриманого результату. Це дасть змогу узагальнити та систематизувати знання студентів з даної теми, спонукати їх виходити за рамки курсу, вести дослідницьку роботу.

Список літератури:

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 286 с.
2. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: 1964. – 208 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.