

**Информатика, математическое моделирование,
экономика: сб. науч. статей. - Смоленск, 2014. –
Т. 1. - С. 66-70.**

**Д.т.н., профессор Кириченко Л.О.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
E-mail: ludmila.kirichenko@gmail.com**

**ВЫБОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФРАКТАЛЬНОГО
СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ**

На основе численного анализа выборочных мультифрактальных характеристик, полученных методом детрендированного флуктуационного анализа, предложен статистический критерий для принятия гипотезы о наличии монофрактальных свойств временного ряда. Приведены результаты исследований по выявлению моно- и мультифрактальных свойств для временных реализаций разной природы.

В настоящее время стало общепризнанным, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Фрактальный анализ используется для моделирования, анализа и контроля сложных систем в различных областях науки и техники. В частности, в геологии – для прогнозирования сейсмической активности и цунами, определения возраста геологических пород; в биологии и медицине – для диагностики заболеваний и физиологического состояния по записям ЭКГ и ЭЭГ, при исследовании мутаций и изменений на генетическом уровне; в экономике – для прогнозирования кризисных ситуаций и оценивания риска по финансовым рядам; в физике – для исследования турбулентности и термодинамических процессов. Этот список далеко не полон.

Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: самоподобные (монофрактальные) и мультифрактальные. Монофрактальные процессы являются однородными в том смысле, что обладают одним показателем скейлинга: их скейлинговые характеристики остаются неизменными

на любом диапазоне масштабов. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами и характеризуются спектром скейлинговых показателей.

Все вышеуказанное привело к появлению ряда моделей фрактальных стохастических процессов. Следует отметить отсутствие универсальных моделей, которые могли бы использоваться для описания фрактальных процессов различной природы. И наоборот, один и тот же процесс, в зависимости от целей исследования, может описываться несколькими моделями. В общем случае выбор модели базируется на характеристиках исследуемого временного ряда.

Одним из важных этапов выбора и построения математических моделей является определение, имеет ли временной ряд монофрактальные или мультифрактальные свойства. В случае монофрактальности математическими моделями процесса могут выступать фрактальное броуновское движение, фрактальные точечные процессы, фрактальный процесс АРПСС и др. Для моделирования мультифрактальных процессов можно использовать фрактальное устойчивое движение Леви, стохастические мультипликативные каскады, фрактальное движение в мультифрактальном времени и т.д.

Стохастический процесс с непрерывным временем $X(t)$, $t \geq 0$, называется самоподобным с параметром H , $0 < H < 1$, если для любого значения $a > 0$ конечномерные распределения для $X(at)$ идентичны конечномерным распределениям $a^H X(t)$, т.е. $\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{a^H X(t)\}$. Параметр H , называемый параметром Херста, представляет собой меру самоподобия стохастического процесса. Начальные моменты самоподобного случайного процесса можно выразить как $M\left[|X(t)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qH}$, где величина $C(q) = M\left[|X(1)|^q\right]$. Мультифрактальные процессы обладают более разнообразным скейлинговым поведением: $\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{a^{H(a)} \cdot X(t)\}$, $a > 0$. Для мультифрактальных процессов выполняется отношение $M\left[|X(t)|^q\right] = c(q) \cdot t^{qh(q)}$, где $c(q)$ – некоторая детерминированная функция; $h(q)$ – обобщенный показатель Херста, являющийся в общем случае нелинейной функцией. Значение $h(q)$ при $q = 2$ совпадает со значением степени

самоподобия H . Для монофрак탈ных процессов обобщенный показатель Херста не зависит от параметра q : $h(q) = H$. [1]

Существует множество методов оценивания параметров самоподобных и мультифрак탈ных процессов по временным рядам. При оценивании мультифрак탈ных характеристик одним из наиболее востребованных является метод мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа (МФДФА). [2]

При использовании метода МФДФА для исходного исследуемого временного ряда $x(t)$ строится кумулятивный ряд

$y(t) = \sum_{i=1}^t x(i)$, который разбивается на N сегментов длиной s . Для

каждого сегмента $y(t)$ вычисляется флуктуационная функция

$$F^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s (y(t) - Y_m(t))^2, \text{ где } Y_m(t) - \text{локальный } m\text{-полиномиальный}$$

тренд в пределах данного сегмента длиной s . Изменяя временную шкалу s при фиксированном показателе q , находим зависимость

$$F_q(s): F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^2(s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}. \text{ Далее находится зависимость}$$

флуктуационной функции $F_q(s)$ от параметра q . Если исследуемый ряд обладает фрактальными свойствами, то флуктуационная функция $F_q(s)$ представляется степенной зависимостью $F_q(s) \propto s^{h(q)}$.

Таким образом, получив значения обобщенного показателя Херста $h(q)$, теоретически можно сделать вывод о монофрактальности процесса, если эта функция является константой. Однако, на практике это является непростой задачей. Оценка $\hat{h}(q)$, полученная по временному ряду, представляет собой кривую, стремящуюся к постоянному значению при увеличении длины ряда [3]. На рисунке 1 слева представлены выборочные значения $\hat{h}(q)$ для монофрактального процесса для разных длин реализаций. С другой стороны, сравнение с диапазоном значений Δh для мультифрактальных процессов (рисунок 1 справа), демонстрирует, что различие между моно- и мультифрактальными реализациями является довольно существенным.

Результаты мультифрактального анализа модельных временных рядов, позволили разработать и протестировать метод, предложенный в [4], который позволяет принимать или отвергать гипотезу о наличии монофрактальных свойств ряда на основе исследования выборочных

значений обобщенного показателя Херста, полученных методом МФДФА.

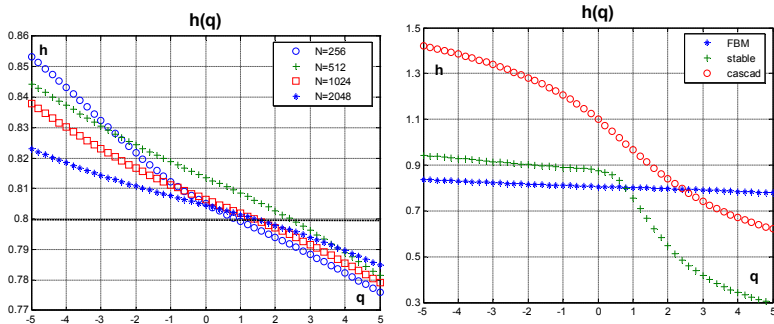


Рисунок 1 – Значения $\hat{h}(q)$ для монофрактальных рядов при разных длинах (слева) и для мультифрактальных (+, 0) и монофрактального (x) ряда длиной 1000 значений(справа)

Численный анализ показал, что случайная величина $\Delta h = h(q1) - h(q2)$ при $q > 0$ имеет нормальное распределение $N(m_h, s_h)$, параметры которого зависят от длины реализации и выбранных значений величины q . Предложенный критерий рассматривает величину $\Delta h = h(0.1) - h(5)$. Путем численного моделирования моно- и мультифрактальных процессов были получены выборочные значения m_h и S_h для временных рядов длины N . Значение случайной величины Δh можно использовать в качестве статистического критерия для принятия или отбрасывания гипотезы о наличии монофрактальных свойств временных рядов. В данном случае нулевой гипотезой является предположение о монофрактальности ряда. Получив оценку функции $\hat{h}(q)$ методом МФДФА, вычисляется наблюдаемая величина $\Delta \hat{h} = \hat{h}(0.1) - \hat{h}(5)$. Гипотеза принимается с уровнем значимости α , если полученное значение попадает в область допустимых значений

$$\Delta \hat{h} < m_h(N) + t_\alpha s_h(N),$$

где N – длина реализации, m_h и s_h – соответствующие значения, рассчитанные для монофрактального процесса, α – уровень значимости, t_α – квантиль стандартного нормального распределения.

В представленной работе проведен ряд исследований по выявлению моно- и мультифрактальных свойств для временных

реализаций разной природы. В таблице представлены результаты анализа выборочных значений обобщенного показателя Херста $\hat{h}(q)$ для электроэнцефалограмм лабораторных животных для разных фаз сна, финансовые ряды – индекса Доу-Джонса и цен на золото за 2004-2008 гг., и ряда средних ежедневных температур по Киеву за 2000-2006 гг. Критические значения Δh приведены на основе расчетных данных для уровня значимости $\alpha=0.05$ и соответствующей длины ряда.

Таблица. Проверка свойства монофрактальности.

Ряд	Дли на	Выборочное значение $\hat{h}$	Критическое значение Δh	
ЭЭГ (бодрств.)	1000	0.1743	0.0859	мульти
ЭЭГ (быстр. сон)		0.169		мульти
ЭЭГ (медлен. сон)		0.068		моно
Индекс Доу-Джонса	500	0.2416	0.1248	мульти
Цены на золото		0.0991		моно
Ряд температур	2000	0.0264	0.07312	моно

Результаты исследований свидетельствуют о том, что неоднородность фрактальной структуры определяется не только природой ряда, но и его локальными характеристиками. Выявив наличие или отсутствие мультифрактальных свойств, мы можем подобрать более эффективную математическую модель случайного процесса, генерирующего аналогичные временные реализации. Стоит также отметить, что обычно математические модели монофрактальных случайных процессов имеют менее громоздкий математический аппарат и являются более простыми в реализации, чем модели мультифрактальных процессов.

1. Riedi R.H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications: Birkhuser. -2002. -P. 625–715.

2. Kantelhardt J.W. Fractal and Multifractal Time Series. – 2008. <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.

3. Кириченко Л. О. Исследование выборочных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: зб. наук. пр. – 2011. – № 54. – С.101–111

4. Кириченко Л. О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендрованного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2011. – Вып. 157. – С.66–77.