

Д. И. Леховицкий

К ТЕОРИИ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ КАНАЛОВ ПРИЕМА

Вводится совместное распределение элементов максимально правдоподобной оценки персимметричной корреляционной матрицы многомерного гауссовского процесса. Обсуждаются некоторые свойства полученного распределения и его связь с известным распределением Уишарта. Приводятся примеры использования для решения задач адаптивной обработки сигналов в системах с центральной симметрией пространственно-временных каналов приема.

1. Введение

В многомерном статистическом анализе случайных процессов и полей важнейшую роль играет распределение Уишарта, описывающее распределение максимально правдоподобной (МП) оценки корреляционной матрицы (КМ) выборки из многомерного нормального распределения [1—3]. На основе этой оценки могут строиться, в частности, эффективные адаптивные системы пространственной и (или) временной обработки сигналов на фоне гауссовских помех различной природы [9—12].

В теоретических и практических задачах используются распределения Уишарта как действительных симметричных [1—5], так и комплексных эрмитовых [6—10] положительно определенных оценочных КМ общего вида соответствующих системам с произвольным расположением в общем случае различных каналов приема. В то же время для широкого класса систем обработки достаточно характерно построение, при котором (априори неизвестная) КМ обладает дополнительной спецификой структуры, создающей предпосылки для повышения эффективности обработки из-за уменьшения размерности вектора параметров, подлежащего оцениванию в процессе адаптации [13, 14].

Так, в адаптивных антенных решетках (АР) зачастую используется центрально-симметричное расположение в пространстве попарно одинаковых приемных элементов (модулей). В этом случае КМ выходных сигналов АР, принимаемых от точечных внешних источников шумовых излучений, является не только эрмитовой, но и персимметричной (симметричной относительно побочной диагонали) [15—22]. В импульсных РЛС такой же спе-

цифрой может обладать КМ междупериодных флюктуаций отражений на выходах временных каналов приема системы СДЦ. Частным случаем персимметричных являются блочно-теплицевы и теплицевы КМ, характерные для систем с регулярным расположением идентичных каналов приема [17].

В связи с этим для решения теоретических и практических задач адаптивной обработки, как и широкого круга других задач многомерного статистического анализа [2, 3, 23], важное значение приобретают распределения МП оценок действительных и комплексных персимметричных КМ, отсутствующие в литературе. Их получение составляет основную цель данной работы.

2. Некоторые свойства персимметричных корреляционных матриц

А. Действительная $M \times M$ матрица $D = \{d_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M$ является персимметричной, если она совпадает с матрицей, полученной после поворота D относительно побочной диагонали, то есть при выполнении равенств

$$D = \Pi_M D^T \Pi_M, \quad d_{i\ell} = d_{M+1-\ell, M+1-i}, \quad i, \ell \in \{1, M\}, \quad (1)$$

представляющих собой математическое определение персимметрии.

Если в роли D выступает корреляционная (симметричная) матрица, то справедливы дополнительные равенства

$$D = \Pi_M D^T \Pi_M = \Pi_M D \Pi_M = D^T, \quad (2)$$

$$d_{i\ell} = d_{M+1-\ell, M+1-i} = d_{M+1-i, M+1-\ell} = d_{\ell i}, \quad i, \ell \in \{1, M\}.$$

Здесь и далее T — символ транспонирования,

$$\Pi_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} e_i e_{M+1-i}^T = \Pi_\nu^T, \quad \Pi_\nu \Pi_\nu^T = I_\nu, \quad \Pi_\nu = \Pi_\nu^T - \quad (3)$$

$\nu \times \nu$ — ортогональная симметричная матрица перестановок с единицами на побочной диагонали, e_i — i -й ($i \in \{1, \nu\}$) — столбец единичной $\nu \times \nu$ матрицы I_ν .

При четных $M=2L$ матрица D , (2) допускает блочное представление

$$D = \left| \begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline \Pi_L D_{12} \Pi_L & \Pi_L D_{11} \Pi_L \end{array} \right|, \quad \begin{array}{l} D_{11} = D_{11}^T, \\ D_{12} = \Pi_L D_{12}^T \Pi_L, \end{array} \quad (4)$$

где $D_{11} = \{d_{i\ell}\} (i, \ell \in 1, L)$ и $D_{12} = \{d_{i\ell}\} (i \in 1, L; \ell \in L+1, M)$ — соответствующие $L \times L$ блоки матрицы D .

Введем $2\nu \times 2\nu$ матрицу $S_\nu = \{s_{i\ell}\}_{i, \ell=1}^{2\nu}$ вида

$$S_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{2\nu} + J_{2\nu} \Pi_{2\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} I_\nu & \Pi_\nu \\ -\Pi_\nu & I_\nu \end{vmatrix}, \quad J_{2\nu} = \begin{vmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & -I_\nu \end{vmatrix} \quad (5)$$

с легко проверяемыми свойствами:

$$S_\nu S_\nu^T = I_{2\nu}, \quad S_\nu \Pi_{2\nu} = J_{2\nu} S_\nu, \quad J_{2\nu} \Pi_{2\nu} = -\Pi_{2\nu} J_{2\nu}. \quad (6)$$

С ее помощью матрица D (4) может быть преобразована в блочно-диагональную матрицу

$$D_\nu = S_L D S_L^T = \begin{vmatrix} D_\Sigma & 0 \\ 0 & \Pi_L D_0 \Pi_L \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} D_\Sigma &= D_{11} + D_{12} \Pi_L, \\ D_0 &= D_{11} - D_{12} \Pi_L, \end{aligned} \quad (7)$$

с детерминантом

$$\det D_\nu = |D_\nu| = |D_\Sigma| |\Pi_L D_0 \Pi_L| = |D_\Sigma| |D_0| = |D|, \quad (8)$$

совпадающим с детерминантом $|D|$ исходной матрицы

$$D = S_L^T D_\nu S_L \quad (9)$$

в силу ортогональности (6) матрицы S_L (5).

Б. Комплексная $M \times M$ матрица $C = \{c_{i\ell}\}_{i, \ell=1}^M = C' + jC''$ является персимметричной, если выполняются равенства

$$C = \Pi_M C^T \Pi_M, \quad C' = \Pi_M C'^T \Pi_M, \quad C'' = \Pi_M C''^T \Pi_M. \quad (10)$$

Если в роли C выступает корреляционная (эрмитова) матрица, то справедливы дополнительные равенства

$$\begin{aligned} C &= \Pi_M C^T \Pi_M = \Pi_M \tilde{C} \Pi_M = C^*, \quad C^T = \tilde{C}, \\ C' &= \Pi_M C'^T \Pi_M = \Pi_M C' \Pi_M = C'^T, \\ C'' &= \Pi_M C''^T \Pi_M = -\Pi_M C'' \Pi_M = -C''^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь (\sim) и $(*)$ — символы, соответственно, комплексного сопряжения и эрмитового сопряжения (комплексного сопряжения и транспонирования).

Введем $M \times M$ матрицу [18, 22]

$$T = \{t_{ie}\}_{i,e=1}^M = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_M - j\Pi_M) \quad (12)$$

со свойствами

$$T = T^T = \Pi_M T \Pi_M = -j T^{-1} \Pi_M = -j \Pi_M T^*, \quad T T^* = I_M. \quad (13)$$

С ее помощью эрмитова персимметричная матрица C (11) преобразуется в действительную симметричную $M \times M$ матрицу

$$C_D = T C T^* = C_D^T = C' + C''^T \Pi_M \quad (14)$$

с детерминантом

$$|C_D| = |C' + C''^T \Pi_M| = |C|, \quad (15)$$

совпадающим с детерминантом $|C|$ исходной матрицы

$$C = T^* C_D T \quad (16)$$

в силу унитарности (13) преобразующей матрицы T (12).

3. Плотность распределения МП оценки действительной персимметричной корреляционной матрицы

Пусть случайные действительные гауссовские (нормальные) M -мерные векторы $Y_i = \{y_e^{(i)}\}_{e=1}^M$ K -мерной выборки $Y = \{Y_i\}_{i=1}^K$ взаимно независимы, имеют нулевое среднее и одинаковую неотрицательно определенную $M \times M$ КМ D , то есть

$$Y = \{Y_i\}_{i=1}^K, \quad Y_i = N(0, D), \quad \bar{Y}_i = 0, \quad \overline{Y_i Y_l^T} = D \delta(i-l), \quad i, l \in 1, K, \quad (17)$$

где $\delta(x)$ — символ Кронекера, черта сверху — знак статистического усреднения.

Совместное распределение $\rho(Y)$ элементов выборки Y в этом случае равно [3, 5, 12]

$$\rho(Y) = (2\pi)^{-\frac{KM}{2}} |D|^{-\frac{K}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (D^{-1} A) \right\}, \quad (18)$$

где $\text{tr} \varphi$ — след (сумма диагональных элементов) матрицы φ ,

$$A = \{a_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \sum_{i=1}^K Y_i Y_i^T = Y Y^T = A^T = K \hat{D} \quad (19)$$

$M \times M$, выборочная (случайная) KM . В условиях (17), (18) матрица $\hat{D} = K^{-1} A$ является МП оценкой действительной KM D общего вида [11—14], а матрица A “имеет распределение Уишарта $W_m^{(A)}(A, K, D)$ с K степенями свободы и параметрической матрицей D [5]” вида [2—5]:

$$\rho(A) = W_m^{(A)}(A, K, D) = F_m^{(A)}(A, K, D) / f_m^{(A)}(K, D), \quad (20a)$$

$$F_m^{(A)}(A, K, D) = |A|^{\frac{K-M-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (D^{-1} A) \right\}, \quad (20b)$$

$$f_m^{(A)}(K, D) = 2^{\frac{KM}{2}} \pi^{\frac{M(M-1)}{4}} |D|^{\frac{K}{2}} \prod_{i=1}^M \Gamma \left(\frac{K+1-i}{2} \right), \quad K \geq M, \quad (20b)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, для целых $x = n \geq 1$ равная $(n-1)!$.

Под распределением случайной матрицы понимается совместное распределение определяющих ее различных случайных элементов [3—10]. Тем самым (20) представляет собой “экономную” запись неотрицательной функции $M(M+1)/2$ скалярных переменных

$$\rho(A) = \rho \{ a_{i\ell} \}, \quad i \in 1, M; \ell \in i, M,$$

в роли которых выступают действительные диагональные и наддиагональные

элементы симметричной случайной матрицы $A(19)$, полностью ее определяющие.

Если KM D персимметрична, то в условиях (17) ее МП оценка может быть записана в виде

$$\hat{D}_n = \frac{1}{K} A_n, \quad A_n = \frac{1}{2} (Y Y^T + \Pi_M Y Y^T \Pi_M). \quad (21)^*$$

Решаемая в данном пункте задача заключается в отыскании плотности распределения матрицы A_n .

Эта матрица как сумма двух симметричных матриц, каждая из которых есть результат поворота другой относительно побочной диагонали, также симметрична и персимметрична, что сразу следует и из определения (2). В случае четных $M=2L$ (которым мы здесь ограничиваемся для упрощения обозначений) она определяется $L(L+1)$ случайными параметрами — своими элементами $a_{i\ell}$ при $i \in \{1, L\}$ и $\ell \in \{i, M+1-i\}$.

Из сравнения (21) с (19) следует, что первое слагаемое матрицы A_n имеет распределение Уишарта (20) с параметрической матрицей $D/2$. Такое же распределение имеет и второе слагаемое, поскольку в условиях (2) векторы $\Pi_M Y_i$, $i \in \{1, K\}$ “перевернутой” выборки $\Pi_M Y$ имеют те же свойства (17), что и исходные векторы Y_i . Если бы эти слагаемые были взаимно независимы, их сумма имела бы распределение Уишарта вида (20) с $2 \times K$ степенями свободы и матрицей $D/2 [3, 4, 5]$. Однако для слагаемых матрицы A_n (21) это условие не выполняется, поэтому ее распределение должно быть другим.

Для его отыскания разобьем исходную $2L \times K$ матрицу-выборку $Y = \{Y_i\}_{i=1}^K = \{y_{\ell}^{(i)}\}_{\ell=1}^{2L}$ на $L \times K$ “верхний” Y_B и “нижний” Y_H блоки, так что

$$Y = \begin{Bmatrix} Y_B \\ Y_H \end{Bmatrix}, \quad Y_B = \{Y_{Bi}\}_{i=1}^K, \quad Y_{Bi} = \{y_{\ell}^{(i)}\}_{\ell=1}^L, \\ Y_H = \{Y_{Hi}\}_{i=1}^K, \quad Y_{Hi} = \{y_{\ell}^{(i)}\}_{\ell=L+1}^{2L}. \quad (22)$$

Введем преобразованную с помощью матрицы $S_L(5)$ выборку

* Из-за ограниченности объема опускаем вывод формулы (21), которая может быть легко получена по методике, использованной в [15, 16] при выводе МП оценки эрмитовой персимметричной КМ.

$$V = \{V_i\}_{i=1}^K = S_L Y = \begin{cases} V_\Sigma \\ V_\Delta \end{cases}, \quad \begin{cases} V_\Sigma = \{V_{\Sigma i}\}_{i=1}^K = (Y_B + \Pi_L Y_H) / \sqrt{2}, \\ V_\Delta = \{V_{\Delta i}\}_{i=1}^K = (Y_H - \Pi_L Y_B) / \sqrt{2}, \end{cases} \quad (23)$$

позволяющую переписать (21) с учетом (6) в виде

$$A_\Pi = \frac{1}{2} (S_L^T V V^T S_L + \Pi_{2L} S_L^T V V^T S_L \Pi_{2L}) = \frac{1}{2} S_L^T (V V^T + J_{2L} V V^T J_{2L}) S_L.$$

Легко убедиться, что в силу специфики матрицы J_{2L} (5) слагаемые в скобках последнего равенства имеют одинаковые $L \times L$ диагональные и противоположные по знаку $L \times L$ внедиагональные блоки. Поэтому

$$A_\Pi = S_L^T B_V S_L, \quad B_V = \{b_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^{2L} = \begin{vmatrix} B_\Sigma & 0 \\ 0 & B_\Delta \end{vmatrix} = S_L A_\Pi S_L^T, \quad (24a)$$

$$|B_V| = |B_\Sigma| |B_\Delta| = |A_\Pi|, \quad (24b)$$

а $L \times L$ диагональные блоки B_Σ и B_Δ равны:

$$B_\Sigma = \{b_{i\ell}^{(\Sigma)}\}_{i,\ell=1}^L = V_\Sigma V_\Sigma^T, \quad B_\Delta = \{b_{i\ell}^{(\Delta)}\}_{i,\ell=1}^L = V_\Delta V_\Delta^T. \quad (25)$$

Взаимосвязи (24) позволяют свести решаемую задачу к отысканию распределения матрицы B_V . Заметим вначале, что в силу ортогональности матрицы S_L якобиан преобразования $Y = S_L^T V$ равен единице и, следовательно, плотность $p(V)$ преобразованной выборки V (23) в условиях (18) равна

$$p(V) = (2\pi)^{-\kappa L} |\Delta|^{-\frac{\kappa}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (\Delta^{-1} S_L^T V V^T S_L) \right\}.$$

Используя известное свойство следа произведения $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ и учитывая (7), (8), последнее равенство можно переписать в виде

$$p(V) = (2\pi)^{-\kappa L} |\Delta_\Sigma|^{-\frac{\kappa}{2}} |\Pi_L \Delta_\Delta \Pi_L|^{-\frac{\kappa}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (\Delta_V^{-1} V V^T) \right\}.$$

Но, в силу (7), (23) — (25),

$$\text{tr}(\underline{D}_V^{-1} V V^T) = \text{tr}(\underline{D}_\Sigma^{-1} V_\Sigma V_\Sigma^T) + \text{tr}(\Pi_L \underline{D}_\Delta^{-1} \Pi_L V_\Delta V_\Delta^T) = \text{tr}(\underline{D}_V^{-1} B_V), \quad (26a)$$

поэтому

$$\rho(V) = \rho(V_\Sigma) \cdot \rho(V_\Delta), \quad (26b)$$

$$\text{где } \rho(V_\Sigma) = (2\pi)^{-\frac{KL}{2}} |\underline{D}_\Sigma|^{-\frac{K}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\underline{D}_\Sigma^{-1} V_\Sigma V_\Sigma^T)\right\}, \quad (27a)$$

$$\rho(V_\Delta) = (2\pi)^{-\frac{KL}{2}} |\Pi_L \underline{D}_\Delta \Pi_L|^{-\frac{K}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}((\Pi_L \underline{D}_\Delta \Pi_L)^{-1} V_\Delta V_\Delta^T)\right\}. \quad (27b)$$

Поскольку в силу (17), (4) корреляционные матрицы

$$\overline{Y_{B_i} Y_{B_i}^T} = \underline{D}_{B_i}, \quad \overline{Y_{B_i} Y_{H_i}^T} = \underline{D}_{B_i H_i}, \quad \overline{Y_{H_i} Y_{B_i}^T} = \Pi_L \underline{D}_{B_i H_i} \Pi_L, \quad \overline{Y_{H_i} Y_{H_i}^T} = \Pi_L \underline{D}_{H_i} \Pi_L, \quad i \in 1, K,$$

то, используя определения (23), (22) и (7), нетрудно убедиться в том, что входящие в (27) матрицы \underline{D}_Σ и $\Pi_L \underline{D}_\Delta \Pi_L$ представляют собой KM

$$\underline{D}_\Sigma = V_{\Sigma_i} V_{\Sigma_i}^T, \quad \Pi_L \underline{D}_\Delta \Pi_L = V_{\Delta_i} V_{\Delta_i}^T, \quad i \in 1, K. \quad (28)$$

Тем самым K -мерные “суммарная” V_Σ и “разностная” V_Δ выборки (23) случайных $L=M/2$ -мерных векторов V_{Σ_i} и V_{Δ_i} ($i \in 1, K$) имеют такие (нормальные) распределения (27), при которых сформированные из них по (25) матрицы B_Σ и B_Δ имеют распределения Уишарта с K степенями свободы и параметрическими матрицами \underline{D}_Σ и $\Pi_L \underline{D}_\Delta \Pi_L$ соответственно:

$$\rho(B_\Sigma) = W_L^{(A)}(B_\Sigma, K, \underline{D}_\Sigma) \quad (29a), \quad \rho(B_\Delta) = W_L^{(A)}(B_\Delta, K, \Pi_L \underline{D}_\Delta \Pi_L). \quad (29b)$$

Кроме того, в силу следующей из (26) взаимной независимости выборок V_Σ и V_Δ матрицы B_Σ и B_Δ (25) также взаимно независимы, поэтому их совместная плотность $\rho(B_\Sigma, B_\Delta) = \rho(B_\Sigma) \cdot \rho(B_\Delta)$. Перемножая

плотности (29а) и (29б) и учитывая (26), (24), (8), получим плотность $\rho(B_V)$ матрицы B_V (24):

$$\rho(B_V) = \frac{|B_V|^{\frac{K-L-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(D_V^{-1} B_V)\right\}}{2^{KL} \pi^{\frac{L(L-1)}{2}} |D_V|^{\frac{K}{2}} \prod_{i=1}^L \Gamma^2\left(\frac{K+1-i}{2}\right)} \quad (30)$$

Каждая из образующих ее симметричных $L \times L$ матриц B_Z и B_Δ (25) определяется $L(L+1)/2$ параметрами, так что число таких параметров в матрице B_V (24), равно $L(L+1)$, в точности совпадает с числом параметров, определяющих матрицу A_n (21). Поэтому для получения на основе (30) искомой плотности $\rho(A_n)$ достаточно определить якобиан связывающего B_V и A_n преобразования (24).

Используя определение S_L (5) и (24), легко заметить, что $b_{ip} = a_{ip} + a_{i, 2L+1-p}$, $b_{2L+1-p, 2L+1-i} = a_{ip} - a_{i, 2L+1-p}$, $i \in \{1, L\}$; $p \in \{i, L\}$.

Поэтому матрица Якоби преобразования (24) может быть записана

в виде $I_{L(L+1)/2} \otimes \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, где \otimes — символ кронекеровского произведения, и, следовательно, искомый якобиан равен $2^{\frac{L(L+1)}{2}}$.

Заменяя в (30) матрицу B_V на ее представление (24а) и учитывая (24б), (9), (8), получим

$$\rho(A_n) = \frac{|A_n|^{\frac{K-L-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(D^{-1} A_n)\right\}}{2^{(K-\frac{L+1}{2})L} \pi^{\frac{L(L-1)}{2}} |D|^{\frac{K}{2}} \prod_{i=1}^L \Gamma^2\left(\frac{K+1-i}{2}\right)}, \quad K \geq L \quad (31)$$

Последняя формула описывает искомую плотность распределения действительной симметричной и персимметричной случайной матрицы A_n МП оценки \hat{D}_n (21) действительной персимметричной КМ Д (17), (2) четного порядка $M = 2L$.

4. Плотность распределения МП оценки комплексной персимметричной корреляционной матрицы

Пусть случайные комплексные нормальные M -мерные векторы $Y_i = \{y_p^{(i)}\}_{p=1}^M = Y_i' + jY_i''$ K -мерной выборки $Y = \{Y_i\}_{i=1}^K$ взаимно

независимы, имеют нулевое среднее и одинаковую неотрицательно определенную эрмитову $M \times M$ КМ $C = \{c_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = C' + jC''$, то есть

$$Y = \{Y_i\}_{i=1}^K, Y_i = N_c(0, C), \bar{Y}_i = 0, \overline{Y_i Y_\ell^*} = C \delta(i-\ell), i, \ell \in 1, K. \quad (32a)$$

Это означает [8, 12], что совместно нормальны реальные Y_i' и мнимые Y_i'' части векторов Y_i ($i \in 1, K$), то есть нормальны, имеют нулевое среднее и взаимно независимы составленные из них $2M$ -мерные действительные векторы

$$G_i^T = \{Y_i', Y_i''\}^T = N(0, Q), \bar{G}_i = 0, \overline{G_i G_\ell^T} = Q \delta(i-\ell), i, \ell \in 1, K \quad (32b)$$

с одинаковой $2M \times 2M$ корреляционной матрицей

$$Q = \overline{G_i G_i^T} = \begin{vmatrix} \overline{Y_i' Y_i'^T} & \overline{Y_i' Y_i''^T} \\ \overline{Y_i'' Y_i'^T} & \overline{Y_i'' Y_i''^T} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} C' - C'' \\ C'' & C' \end{vmatrix}, i \in 1, K. \quad (32b)$$

Совместное распределение элементов выборки в этом случае равно [8, 10, 12]

$$p(Y) = \pi^{-KM} |C|^{-K} \exp \{-tr(C^{-1} A_c)\}, \quad (33)$$

где

$$A_c = \{a_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \sum_{i=1}^K Y_i Y_i^* = Y Y^* = A_c^* = K \hat{C} \quad (34)$$

$M \times M$ выборочная (случайная) комплексная КМ. В условиях (32) матрица $\hat{C} = K^{-1} A_c$ является МП оценкой комплексной КМ C общего вида [6—12], а матрица A_c "имеет введенное в [6] комплексное распределение Уишарта $w_m^{(c)}(A_c, K, C)$ с K степенями свободы и матрицей C [8]" , имеющее вид [6—10]:

$$p(A_c) = w_m^{(c)}(A_c, K, C) = F_m^{(c)}(A_c, K, C) / f_m^{(c)}(K, C), \quad (35a)$$

$$F_M^{(c)}(A_c, K, C) = |A_c|^{K-M} \exp\{-\text{tr}(C^{-1}A_c)\}, \quad (35б)$$

$$f_M^{(c)}(K, C) = \pi^{\frac{M(M-1)}{2}} |C|^{-K} \prod_{i=1}^M \Gamma(K+1-i), \quad K \geq M. \quad (35в)$$

Под комплексным распределением матрицы A_c понимается совместное распределение реальных и мнимых частей определяющих ее случайных элементов [6—10]. Тем самым (35) является формой записи неотрицательной функции M^2 скалярных переменных

$$p(A_c) = p\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{MM}, a'_{i\ell}, a''_{i\ell}\}, \quad i \in \{1, M-1\}; \ell \in \{i+1, M\},$$

в роли которых выступают действительные диагональные элементы a_{ii} ($i \in \{1, M\}$) и $M(M-1)$ реальных ($a'_{i\ell}$) и мнимых ($a''_{i\ell}$) частей наддиагональных элементов $a_{i\ell} = a'_{i\ell} + ja''_{i\ell}$ ($i \in \{1, M-1\}; \ell \in \{i+1, M\}$) случайной эрмитовой матрицы A_c (34), полностью ее определяющие.

Если КМ C персимметрична, то в условиях (32) ее МП оценка может быть записана в виде [15—22]:

$$\hat{C}_\Pi = \frac{1}{K} A_{c\Pi}, \quad A_{c\Pi} = \frac{1}{2} (\Upsilon \Upsilon^* + \Pi_M \Upsilon \Upsilon^T \Pi_M) = A_{c\Pi}^* = \Pi_M A_{c\Pi} \Pi_M. \quad (36)$$

Цель данного пункта — отыскание плотности матрицы $A_{c\Pi}$.

Эта матрица как сумма двух эрмитовых матриц, каждая из которых есть результат поворота другой относительно побочной диагонали, эрмитова и персимметрична. Поэтому она полностью определяется $M(M+1)/2$ скалярными действительными параметрами, из которых

$$r = \begin{cases} L(L-1), & M = 2L-1; \\ L^2, & M = 2L, \quad L = \varepsilon[(M+1)/2] \end{cases} \quad (37)$$

представляют собой мнимые ($a''_{i\ell}$), а остальные $M(M+1)/2 - r$ — реальные ($a'_{i\ell}$) части элементов $a_{i\ell}$ ($i \in \{1, L\}; \ell \in \{i, M+1-i\}$), задающих всю матрицу $A_{c\Pi}$. В (37) $\varepsilon[x]$ — целая часть x .

Из сравнения (36) с (34) следует, что первое слагаемое этой матрицы имеет распределение $W_M^{(c)}(A_c, K, C/2)$. Такое же распределение имеет и второе слагаемое, поскольку в условиях (11) векторы $\Pi_M \Upsilon_i$ ($i \in \{1, K\}$) "перевернутой" и комплексно сопряженной выборки

$\Pi_M Y^{\sim}$ имеют те же свойства (36), что и исходные векторы Y_i . Выборки Y и $\Pi_M Y^{\sim}$, кроме того, взаимно некоррелированы ($Y(\Pi_M Y^{\sim})^* = 0$) [17], однако не являются совместно нормальными [21]. Поэтому из некоррелированности не следует их взаимная независимость, что не позволяет представить совместную плотность $\rho(Y, \Pi_M Y^{\sim})$ в виде произведения $\rho(Y) \cdot \rho(\Pi_M Y^{\sim})$, а для плотности их суммы — использовать распределение $W_m^{(0)}(A_c, 2K, C/2)$, справедливое только в условиях взаимной независимости слагаемых*.

Рассмотрим преобразованную унитарной матрицей $T(12)$ выборку

$$V = \{V_i\}_{i=1}^K = T Y = V_{\Sigma} + j V_{\Delta}, \quad (38a)$$

$$V_{\Sigma} = \{V_{\Sigma i}\}_{i=1}^K = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y + \Pi_M Y^{\sim}), \quad V_{\Delta} = \{V_{\Delta i}\}_{i=1}^K = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y - \Pi_M Y^{\sim}), \quad (38b)$$

позволяющую, используя (13), переписать матрицу $A_{c\Pi}$ (36) в виде

$$A_{c\Pi} = \frac{1}{2} T^* (V V^* + V^{\sim} V^T) T.$$

Очевидно, что слагаемые в скобках этого равенства взаимно комплексно сопряжены, поэтому

$$A_{c\Pi} = T^* B_V T, \quad (39)$$

где $B_V = \{b_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \text{Re}(V V^*) = B_{\Sigma} + B_{\Delta} = B_V^T, \quad (40a)$

$$B_{\Sigma} = \{b_{i\ell}^{(\Sigma)}\}_{i,\ell=1}^M = V_{\Sigma} V_{\Sigma}^T, \quad B_{\Delta} = \{b_{i\ell}^{(\Delta)}\}_{i,\ell=1}^M = V_{\Delta} V_{\Delta}^T. \quad (40b)$$

Следствием (39) является справедливость равенств

$$B_V = T A_{c\Pi} T^*, \quad |B_V| = |A_{c\Pi}|, \quad (41)$$

* Такая взаимная независимость предполагалась в [17, 19], что привело к некорректности ряда результатов, на это было указано в [21].

в силу которых решаемая задача сводится к отысканию плотности распределения действительной симметричной матрицы B_V .

Заметим, что в силу (32б, 32в) КМ "суммарных" $V_{\Sigma i}$ и "разностных" $V_{\Delta i}$ ($i \in 1, K$) векторов в выборках V_{Σ} и V_{Δ} (38б) совпадают и равны

$$\overline{V_{\Sigma i} V_{\Sigma \ell}^T} = \overline{V_{\Delta i} V_{\Delta \ell}^T} = C_{\Sigma} \delta(i-\ell), \quad C_{\Sigma} = \frac{1}{2} C_{\Delta}, \quad i, \ell \in 1, K, \quad (42)$$

а плотность $\rho(V)$ преобразованной выборки V (38а) вследствие унитарности T и (33), (9) есть

$$\rho(V) = (2\pi)^{-KM} |C_{\Sigma}|^{-K} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (C_{\Sigma}^{-1} V V^*) \right\}, \quad (43)$$

где матрица C_{Δ} определена в (14).

Учитывая симметрию матриц C_{Δ} и C_{Σ} и (40), легко проверить справедливость равенств

$$\text{tr} (C_{\Sigma}^{-1} V V^*) = \text{tr} (C_{\Sigma}^{-1} \text{Re} (V V^*)) = \text{tr} (C_{\Sigma}^{-1} V_{\Sigma} V_{\Sigma}^T) + \text{tr} (C_{\Sigma}^{-1} V_{\Delta} V_{\Delta}^T), \quad (44)$$

в силу которых (43) можно записать в виде

$$\rho(V) = \rho(V_{\Sigma}, V_{\Delta}) = \rho(V_{\Sigma}) \cdot \rho(V_{\Delta}), \quad (45)$$

где

$$\rho(V_{\Sigma}) = (2\pi)^{-\frac{KM}{2}} |C_{\Sigma}|^{-\frac{K}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (C_{\Sigma}^{-1} V_{\Sigma} V_{\Sigma}^T) \right\}, \quad (46a)$$

$$\rho(V_{\Delta}) = (2\pi)^{-\frac{KM}{2}} |C_{\Sigma}|^{-\frac{K}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (C_{\Sigma}^{-1} V_{\Delta} V_{\Delta}^T) \right\}. \quad (46b)$$

Отсюда и из (18), (20), (40) следует, что плотности распределения матриц B_{Σ} и B_{Δ} (40) равны

$$\rho(B_{\Sigma}) = W_M^{(A)}(B_{\Sigma}, K, C_{\Sigma}), \quad \rho(B_{\Delta}) = W_M^{(A)}(B_{\Delta}, K, C_{\Sigma}), \quad (47a)$$

а сами эти матрицы в силу (45) взаимно независимы. Поэтому их сумма (40) имеет распределение [18, 22]

$$p(B_V) = W_M^{(A)}(B_V, 2K, C_Z) = \frac{|B_V|^{\frac{2K-M-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(C_Z^{-1} B_V)\right\}}{2^{MK} \pi^{\frac{M(M-1)}{4}} |C_Z|^K \prod_{i=1}^M \Gamma\left(\frac{2K+1-i}{2}\right)}. \quad (476)$$

Симметричная $M \times M$ матрица B_V определяется $M(M+1)/2$ параметрами, что в точности совпадает с числом параметров, определяющих эрмитову персимметричную матрицу $A_{cп}$, для элементов которой в связи с этим справедливы равенства:

$$a_{il} = a_{i\ell} + j a_{i\ell}'' \quad a_{il} = a_{M_\ell M_i} = \tilde{a}_{M_i M_\ell} = \tilde{a}_{\ell i}, \quad M_i = M+1-i, \quad M_\ell = M+1-\ell, \\ a_{i\ell}' = a_{M_\ell M_i}' = a_{M_i M_\ell}' = a_{\ell i}', \quad a_{i\ell}'' = a_{M_\ell M_i}'' = -a_{M_i M_\ell}'' = -a_{\ell i}'', \quad i, \ell \in 1, M.$$

Поэтому, учитывая (12), для элементов матрицы B_V (41) получим $b_{i\ell} = a_{i\ell}' - a_{i, M_\ell}''$, $b_{M_\ell M_i} = a_{i\ell}' + a_{i, M_\ell}''$, $b_{i, M_i} = a_{i, M_i}'$, $i \in 1, M$; $\ell \in i, M$, что позволяет представить якобиан преобразования (41) в виде

$$\det \left| \begin{array}{c|cc|c} I_r \otimes & 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 1 & \\ \hline 0 & & & I_L \end{array} \right| = \det \left(I_r \otimes \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right) = 2^r. \quad (48)$$

Заменяя в (476) матрицу B_V на ее представление (41) и учитывая (48), (42), (16), (15), получим

$$p(A_{cп}) = \frac{|A_{cп}|^{\frac{2K-M-1}{2}} \exp\{-\text{tr}(C^{-1} A_{cп})\}}{2^{-r} \pi^{\frac{M(M-1)}{4}} |C|^K \prod_{i=1}^M \Gamma\left(\frac{2K+1-i}{2}\right)}, \quad K \geq L = \epsilon \left[\frac{(M+1)}{2} \right], \quad (49)$$

$$r = L(L-1) \quad \text{при } M=2L-1 \quad \text{и} \quad r = L^2 \quad \text{при } M=2L.$$

Эта формула описывает искомое распределение комплексной эрмитовой персимметричной $M \times M$ матрицы A_{cn} МП оценки \hat{C}_n (36) эрмитовой персимметричной КМ C (32), (11).

Заметим, что в частном случае $M=1$, когда $L=1, r=0, |C|=C_{11} = \overline{|y_1^{(i)}|^2} = \sigma^2$, а $A_{cn} = a_{11} = \sum_{i=1}^K |y_1^{(i)}|^2 = A_c$, (49) преобразуется к виду

$$p(A_{cn}) = p(A_c) = p(a_{11}) = \frac{1}{\sigma^2 (K-1)!} \left(\frac{a_{11}}{\sigma^2} \right)^{K-1} \exp\left(-\frac{a_{11}}{\sigma^2}\right), \quad (50)$$

то есть переходит в распределение Эрланга с параметрами формы K и масштаба σ^2 , описывающее плотность суммы K квадратов модулей независимых комплексных нормальных случайных величин с нулевым средним и одинаковой дисперсией σ^2 [24].

5. Некоторые свойства полученных распределений и примеры их использования

Распределения (31), (49) персимметричных оценочных КМ (21), (36) имеют тот же вид, что и распределения (20), (35) оценочных КМ (19), (34) общего вида, но с увеличенным числом степеней свободы. В связи с этим на полученные распределения переносятся (с соответствующими корректировками) все хорошо известные свойства действительного [1—5] и комплексного [6—10] распределений Уишарта. Здесь отметим только некоторые из них.

А. Невырожденное преобразование

$$B_n = U A_n U \quad (51)$$

действительной персимметричной оценочной $2L \times 2L$ матрицы A_n (21), имеющей распределение (31), с неслучайной действительной симметричной и персимметричной $2L \times 2L$ матрицей $U = U^T = \Pi_{2L} U \Pi_{2L}$ порождает случайную симметричную и персимметричную матрицу B_n (51) с тем же распределением (31), но с параметрической матрицей

$$D = U D U. \quad (52) *$$

* Применительно к распределению (35) это свойство в [9] названо теоремой Гудмена.

Действительно, в условиях (21) матрица B_n (51) может быть представлена в виде

$$B_n = \frac{1}{2} (U Y Y^T U + U \Pi_{2L} Y Y^T \Pi_{2L} U) = \frac{1}{2} (V V^T + \Pi_{2L} V V^T \Pi_{2L}), \quad (53)$$

где $V = U Y = \{V_i\}_{i=1}^K$ — преобразованная K -мерная выборка, составленная из $2L$ -мерных случайных векторов

$$V_i = N(0, D), \quad \bar{V}_i = 0, \quad \overline{V_i V_\ell^T} = D \delta(i - \ell), \quad i, \ell \in 1, K. \quad (54)$$

Поэтому плотность матрицы B_n (51) можно записать в виде

$$P_{B_n}(G) = \frac{|G|^{\frac{K-L-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(D^{-1} G)\right\}}{2^{\frac{(K-L+1)L}{2}} \pi^{\frac{L(L-1)}{2}} |D|^{\frac{K}{2}} \prod_{i=1}^L \Gamma^2\left(\frac{K+1-i}{2}\right)}, \quad K \geq L. \quad (55)$$

Последняя формула позволяет, в частности, легко вычислить якобиан $|\partial(B_n)/\partial(A_n)| = \rho(A_n)/\rho_{B_n}(U A_n U)$ преобразования (51). Используя (31) и учитывая (52), получим, что $|\partial(B_n)/\partial(A_n)| = |U|^{L+1}$.

Аналогичным образом нетрудно убедиться в том, что если в (51) вместо действительной матрицы A_n используется комплексная матрица A_{cn} (36) с распределением (49), а U — эрмитова и персимметрична, то преобразованная матрица $B_{cn} = U A_{cn} U$ имеет то же распределение (49), но с параметрической матрицей $C_U = U C U$. При этом якобиан преобразования оказывается равным $|\partial(B_{cn})/\partial(A_{cn})| = |U|^{M+1}$.

Без использования распределений (31), (49) вычисление этих якобианов представляет собой достаточно сложную задачу.

Б. В качестве второго примера найдем плотность распределения отношения двух квадратичных форм

$$v = \hat{S}/s, \quad s = (X^* C^{-1} X)^{-1}, \quad \hat{S} = (X^* \hat{C}_n^{-1} X)^{-1} = (K X^* A_{cn}^{-1} X)^{-1}, \quad (56)$$

где $X = X' + jX''$ — неслучайный комплексный M -мерный вектор, C и \hat{C}_n — $M \times M$ комплексная персимметричная КМ векторов Y_i выборки Y (32) и ее МП оценка (36) соответственно, A_{cn} — определяемая по (36) случайная матрица с распределением (49).

Рассматриваемая задача возникает, в частности, при анализе эффективности адаптивной обработки в связных системах с ФАР [10], "сверхразрешающих" алгоритмов спектрального оценивания [7] и т. д. В условиях, когда C является КМ общего вида, а вместо матрицы $A_{сн}$ используется матрица A_c (34) с распределением Уишарта (35), для отношения (56) справедлива формула [7, 10]

$$\nu = K^{-1} d, \quad (57a)$$

где d — случайная величина с плотностью

$$p_d(x) = ((K-M)!)^{-1} x^{K-M} \exp\{-x\}, \quad (57b)$$

представляющей собой распределение Эрланга с параметром формы $K-M+1$ и единичным параметром масштаба [24].

Для отыскания плотности ν (56) в рассматриваемых условиях воспользуемся для матрицы $A_{сн}$ ее представлением (39). Тогда, учитывая свойства (13) матрицы T (12), для \hat{S} получим

$$\hat{S} = (K Z^* B_V^{-1} Z)^{-1}, \quad Z = TX, \quad (58)$$

где B_V — действительная симметричная матрица (40) с плотностью (47).

Для практических задач адаптивной обработки в системах с центральной симметрией каналов приема основной интерес представляет случай, когда вектор X удовлетворяет условию $X = \Pi_M X^*$. При этом преобразованный вектор $Z = (1-j) X_\Delta / \sqrt{2}$, а (58) преобразуется к виду

$$\hat{S} = (K X_\Delta^T B_V^{-1} X_\Delta)^{-1}, \quad X_\Delta = X' - X''.$$

Далее, воспользовавшись методикой [7, 10], можно показать, что искомое значение ν (56) в рассматриваемых условиях равно

$$\nu = K^{-1} d_1,$$

где d_1 — случайная величина с плотностью

$$p_{d_1}(x) = (\Gamma(K-(M-1)/2))^{-1} x^{K-(M-1)/2} \exp\{-x\}.$$

В частности, при нечетных $M=2L-1$ $p_{d_1}(x)$ переходит в распределение Эрланга

$$p_{d_1}(x) = ((K-L)!)^{-1} x^{K-L} \exp\{-x\}.$$

с параметром формы $K-L+1$, на $L-1$, превосходящим соответствующий параметр распределения (576).

6. Заключение

Основной результат данной работы — распределения (31), (49), которые по аналогии с [6—10] могут быть названы, соответственно, действительным и комплексным распределениями Уишарта случайных персимметричных КМ вида (21), (36) гауссовских процессов (полей). Их использование позволяет распространить большинство результатов многомерного статистического анализа [3, 23] и на класс таких матриц, имеющих многочисленные приложения, в частности, в задачах адаптивной пространственно-временной обработки сигналов в системах с центральной симметрией каналов приема [15—22]. Практическим аспектам адаптации в таких системах, опирающимся на введенные распределения, планируется посвятить специальную публикацию.

Автор выражает глубокую признательность П. М. Флексер за многочисленные обсуждения работы, Ю. И. Абрамовичу, указавшему в [21] на ошибки [17, 19], В. М. Кошевому и В. В. Радионову, чья статья [22] “подсказала” возможное направление решения поставленной задачи, а также В. М. Пищухину и С. И. Бурковскому за большую помощь в оформлении рукописи.

Л и т е р а т у р а: 1. *Wishart I.* // *Biometrika* 20A (1928).— P. 32—52. 2. Уишарта распределение // *Мат. энциклопедия.*— М., 1985.— Т. 5.— С. 493. 3. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ.— М.: Физматгиз, 1963.— 500 с. 4. *Крамер Г.* Математические методы статистики.— М.: Мир, 1976. 5. *de Groot M.* Оптимальные статистические решения.— М.: Мир, 1974. 6. *Goodman N. R.* // *Ann. Math. Statist.*— 1963.— V. 34.— P. 152—177. 7. *Capon I., Goodman N. R.* // *Proc. IEEE.*—1970.— V. AES-10.— N 6.— P. 853—863. 8. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория.— М., 1990. 9. *Reed I. S., Mallet I. D., Brennan L. E.* // *IEEE Trans. on Aerosp. and Electr. syst.*— 1974.— V. AES-10.— N. 6.— P. 853—863. 10. *Brennan L. E., Reed I. S.* // *IEEE Trans on Aerosp. and Electr. System.*— 1982.— N 1.— V. AES-18. 11. *Шурман Я. Д., Манжос В. Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех.— М.: Радио и связь, 1981.— 416 с. 12. *Монзинго Р. А., Миллер Т. У.* Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию / Пер. с англ.— М.: Радио и связь, 1986.— 448 с. 13. *Стратонович Р. Л.* Принципы адаптивного приема.— М.: Сов. радио, 1973. 14. *Репин В. Г.,*

Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем.— М.: Сов. радио, 1977.

15. **Nitzberd R.** // IEEE Trans. Aerosp and Electr Syst.— 1980.— AES-16.— N. 1.

16. **Лифанов Е. И., Лухарев В. А.** // Радиотехника.— 1983.— № 5.— С. 53.

17. **Зарицкий В. И., Кокин В. Н., Леховицкий Д. И., Саламатин В. В.** // Радиофизика.— 1985.— Т. XXVIII.— № 7.— С. 863 (Изв. высш. учеб. заведений).

18. **Аверочкин В. А., Баранов П. Е., Токалов В. С.** // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1987.— Т. 30.— № 4.— С. 78.

19. **Кошевой В. М., Радионов В. В.** // Радиотехника.— 1991.— № 6.— С. 36.

20. **Свердлик М. Б., Шпатаковский В. Э.** // Радиотехника и электроника.— 1989.— Т. 34.— № 4.— С. 160.

21. **Абрамович Ю. И., Горохов А. Ю.** // Радиотехника и электроника.— 1993.— Т. 38.— № 1.— С. 101.

22. **Кошевой В. М., Радионов В. В.** // Радиотехника и электроника.— 1994.— № 11.— С. 1779—1788.

23. **Гурко В. Л.** Многомерный статистический анализ.— К.: Выща шк., 1988.

24. **Хастингс Н., Пикок Дж.** Справочник по статистическим распределениям.— М.: Статистика, 1980.