ОПТИМАЛЬНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С УЧЕТОМ ТРЕХ ВИДОВ ОТКАЗОВ

В. И. Сапрыкин

Киев

Рассмотрим задачу оптимального резервирования с учетом ограничений, накладываемых на вес и объем аппаратуры системы передачи данных, предполагая при этом возможность возникновения трех видов отказов элементов. Подобная задача рассмотрена в [1, 2].

При расчете вероятности безотказной работы резервированных систем успешно применяется алгебра логики (булева алгебра). При этом обычно считается, что элементы системы находятся в одном из двух возможных состояний: «исправно» и «неисправно». Предлагается использовать аппарат четырехзначной логики при расчете надежности систем с учетом трех видов отказов элементов системы: «обрыв», «короткое замыкание» и «нарушение пайки». Полагаем, что каждый элемент исследуемой системы может находиться в одном из четырех устойчивых состояний. «Исправно» и три вида неисправности, упомянутые выше, обозначим соответственно как 1, 0, 2 и 3. Допускается, что элементы системы могут одновременно характеризоваться несколькими видами неисправности.

Если в качестве функционально-полной системы четырехзначной логики выберем систему Россера — Тьюкетта [3], состоящую из характеристических функций:

$$g_i(x) = x^i = \begin{cases} 3, & \text{если } x = i, \\ 0, & \text{если } x \neq i, \end{cases}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

конъюнкции:

$$f_1(x_1,\ x_2) = x_1 x_2 = \min(x_1,\ x_2);$$

дизъюнкции:

$$f_2(x_1,\ x_2) = x_1 \vee x_2 = \max(x_1,\ x_2);$$

функции констант: 0, 1, 2, 3,

где $x_1 = \{0, 1, 2, 3\}$; $x_2 = \{0, 1, 2, 3\}$,

то, как показано в [5], можно перейти от логических соотношений для элементарных функций четырехзначной логики к вероятностным, если выполняются условия ортогональности (два набора функций $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ и $x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}, \ldots, x_n^{\beta_n}$ называются ортогональными, если выполняется условие $\alpha_j \neq \beta_j$, хотя бы для одного из $j = 1, 2, \ldots, n$). Формула перехода имеет следующий вид:

$$P[f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M] = \sum_{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M} p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n},$$

где $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $p_j^{\alpha_j} = p(x_j = \alpha_j)$, $\sum_j p_j^{\alpha_j} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $P[f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M]$ — вероятность того, что функция f примет значение из набора M; $p_j^{\alpha_j}$ — вероятность того, что функция x_j примет значение α_j.

Рассматриваемая функционально-полная система четырехзначной логики характеризуется рядом тождественных соотношений:

1) $x \wedge x = x$; 2) $x \wedge 3 = x$; 3) $x \wedge 0 = 0$; 4) $x \vee x = x$; 5) $x \vee 0 = x$; 6) $x \vee 3 = 3$; 7) $x^i \wedge x^j = 0$ $(i \neq j)$; 8) $g_0(x) \vee g_1(x) \vee g_2(x) \vee g_3(x) = x^0 \vee$

$\vee x^1 \vee x^2 \vee x^3 = 3$; 9) $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$; 10) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$; 11) $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3$; 12) $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$; 13) $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$; 14) $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$; 15) $x_1 \vee x_1 \wedge x_2 = x_1$; 16) $x_1 \wedge x_1 \vee x_2 = x_1$; 17) $x = [1 \wedge g_1(x)] \vee [2 \wedge g_2(x)] \vee [3 \wedge g_3(x)] = (1 \wedge x^1) \vee (2 \wedge x^2) \vee (3 \wedge x^3)$.

Можно записать [5] совершенную дизъюнктивную нормальную форму n-местной функции четырехзначной логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [0 \wedge f^{(0)}(x_1, \ldots, x_n)] \vee [1 \wedge f^{(1)}(x_1, \ldots, x_n)] \vee$$
$$\vee [2 \wedge f^{(2)}(x_1, \ldots, x_n)] \vee [3 \wedge f^{(3)}(x_1, \ldots, x_n)]$$

$$f^{(M)}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = M} x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}. \qquad (18)$$

Рассмотрим выполнение перехода от логических соотношений к вероятностным для функций четырехзначной логики.

Конъюнкция:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1, x_2 = \min(x_1, x_2).$$

Согласно (17) и (18) записываем логические соотношения:

$$f_1^{(0)}(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^0 x_2^2 \vee x_1^0 x_2^3 \vee x_1^1 x_2^0 \vee x_1^2 x_2^0 \vee x_1^3 x_2^0 =$$
$$= x_1^0 (x_2^0 \vee x_2^1 \vee x_2^2 \vee x_2^3) \vee x_2^0 (x_1^2 \vee x_1^3 \vee x_1^1) =$$
$$= x_1^0 3 \vee x_2^0 (x_1^1 \vee x_1^2 \vee x_1^3) = x_1^0 \vee x_2^0 (x_1^1 \vee x_1^2 \vee x_1^3); \qquad (19)$$
$$f_1^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^1 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^2 \vee x_1^1 x_2^3 \vee x_1^2 x_2^1 \vee x_1^3 x_2^1 =$$
$$= x_1^1 (x_2^1 \vee x_2^2 \vee x_2^3) \vee x_2^1 (x_1^2 \vee x_1^3);$$
$$f_1^{(2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 \vee x_1^2 x_2^3 \vee x_1^3 x_2^2 = x_1^2 (x_2^2 \vee x_2^3) \vee x_1^3 x_2^2;$$
$$f_1^{(3)}(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^3.$$

Вероятностные соотношения:

$$P[f_1(x_1, x_2) = 0] = p_1^{(0)} + p_2^{(0)}(p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + p_1^{(3)}) = p_1^{(0)} + p_2^{(0)}(1 - p_1^{(0)});$$
$$P[f_1(x_1, x_2) = 1] = p_1^{(1)}(p_2^{(1)} + p_2^{(2)} + p_2^{(3)}) + p_2^{(1)}(p_1^{(2)} + p_1^{(3)}) =$$
$$= p_1^{(1)}(1 - p_2^{(0)}) + p_2^{(1)}(p_1^{(2)} + p_1^{(3)}); \qquad (20)$$
$$P[f_1(x_1, x_2) = 2] = p_1^{(2)}(p_2^{(2)} + p_2^{(3)}) + p_1^{(3)} p_2^{(2)};$$
$$P[f_1(x_1, x_2) = 3] = p_1^{(3)} p_2^{(3)}.$$

Дизъюнкция: $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$.

Логические соотношения:

$$f_2^{(0)}(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^0;$$
$$f_2^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^0 \vee x_1^1 x_2^1 = x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 (x_2^0 \vee x_2^1);$$
$$f_2^{(2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^0 \vee x_1^2 x_2^1 \vee x_1^2 x_2^2 \vee x_1^0 x_2^2 \vee x_1^1 x_2^2 =$$
$$= x_1^2 (x_2^0 \vee x_2^1 \vee x_2^2) \vee x_2^2 (x_1^0 \vee x_1^1); \qquad (21)$$
$$f_2^{(3)}(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^0 \vee x_1^3 x_2^1 \vee x_1^3 x_2^2 \vee x_1^3 x_2^3 \vee x_1^0 x_2^3 \vee x_1^1 x_2^3 \vee x_1^2 x_2^3 =$$
$$= x_1^3 (x_2^0 \vee x_2^1 \vee x_2^2 \vee x_2^3) \vee x_2^3 (x_1^0 \vee x_1^1 \vee x_1^2) =$$
$$= x_1^3 \cdot 3 \vee x_2^3 (x_1^0 \vee x_1^1 \vee x_1^2) = x_1^3 \vee x_2^3 (x_1^0 \vee x_1^1 \vee x_1^2).$$

Вероятностные соотношения:

$$P[f_2(x_1, x_2) = 0] = p_1^{(0)} p_2^{(0)};$$

$$P[f_2(x_1, x_2) = 1] = p_1^{(0)} p_2^{(1)} + p_1^{(1)} (p_2^{(0)} + p_2^{(1)});$$

$$P[f_2(x_1, x_2) = 2] = p_1^{(2)} (p_2^{(0)} + p_2^{(1)} + p_2^{(2)}) + p_2^{(2)} (p_1^{(0)} + p_1^{(1)}) =$$

$$= p_1^{(2)} (1 - p_2^{(3)}) + p_2^{(2)} (p_1^{(0)} + p_1^{(1)}); \qquad (22)$$

$$P[f_2(x_1, x_2) = 3] = p_1^{(3)} + p_2^{(3)} (p_1^{(0)} + p_1^{(1)} + p_1^{(2)}) = p_1^{(3)} + p_2^{(3)} (1 - p_1^{(3)}).$$

Взяв за основу формулы для расчета надежности (19)—(22), выведенные для элементарных функций от двух аргументов (дизъюнкции и конъюнкции), используя операции наложения (суперпозиции) и подстановки, можно вычислить вероятность того, что некоторая n-местная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает одно из значений набора $M = \{0, 1, 2, 3\}$, т. е. подсчитать вероятность безотказной работы системы ($M = 1$) и вероятность отказов трех видов ($M = 0$, $M = 2$, $M = 3$). Подобная операция возможна в случае, когда исследуемая система передачи данных имеет параллельно-последовательное соединение элементов. Если же система имеет мостиковую структуру, то требуется предварительно привести ее к последовательно-параллельной, используя теорему разложения, которая применительно к четырехзначной логике записывается так:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1^0 \wedge f(0, x_2, \ldots, x_n)] \vee [x_1^1 \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n)] \vee$$
$$\vee [x_1^2 \wedge f(2, x_2, \ldots, x_n)] \vee [x_1^3 \wedge f(3, x_2, \ldots, x_n)].$$

При переходе к вероятностным соотношениям

$$P[f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M] = p_1^0 P[f(0, x_2, \ldots, x_n) = M] +$$
$$+ p_1^{(1)} P[f(1, x_2, \ldots, x_n) = M] + p_1^{(2)} P,$$
$$[f(2, x_2, \ldots, x_n) = M] + P_1^{(3)} P[f(3, x_2, \ldots, x_n) = M],$$
$$M = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Рассмотрим некоторые схемы поэлементного резервирования. Каждый из элементов системы характеризуется вероятностью пребывания его в одном из указанных четырех устойчивых состояний в течение некоторого времени t. Очевидно, что

$$p_i^0 + p_i^1 + p_i^{(2)} + p_i^{(3)} = 1,$$

где i — номер элемента.

Надежность резервированного элемента будем оценивать вероятностью его безотказной работы в течение времени t. Этому соответствует вероятность получения значения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Полагаем, что все элементы, входящие в резерв, одинаковы, т. е.

$$p_i^{(0)} = p_0, \; p_i^{(1)} = p_1, \; p_i^{(2)} = p_2, \; p_i^{(3)} = p_3.$$

Рассмотрим схему, представленную на рис. 1. Запишем логическую функцию, характеризующую данную структуру,

$$f_{2i}(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1} \vee x_{i2}.$$

На основании (22) получим вероятность безотказной работы

$$p[f_{2i}(x_{i1}, x_{i2}) = 1] = p_0 (1 - p_0 - p_2 - p_3) + (1 - p_0 - p_3 -$$
$$- p_3)(p_0 + 1 - p_0 - p_2 - p_3) = (1 - p_0 - p_2 - p_3)(p_0 + 1 - p_2 - p_3);$$

вероятность отказов

$$P[f_{2l}(x_{l1},\ x_{l2})=0]=p_0^2;$$

$$P[f_{2l}(x_{l1},\ x_{l2})=2]=p_2(1-p_3)+p_2(p_0+1-p_0-p_2-p_3)=$$
$$=p_2(2-p_2-2p_3);$$

$$P[f_{2l}(x_{l1},\ x_{l2})=3]=p_3+p_3(1-1+p_0+p_2+p_3)=$$
$$=p_3(1+p_0+p_2+p_3).$$

Найдем условие повышения надежности данной схемы по сравнению со схемой с одним элементом x_{l1}:

$$B_1=\frac{P[f_{2l}(x_{l1},\ x_{l2})=1]}{P[x_{l1}=1]}=\frac{(1-p_0-p_2-p_3)(p_0+1-p_2-p_3)}{1-p_0-p_2-p_3}>1.$$

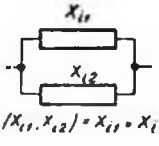


Рис. 1.

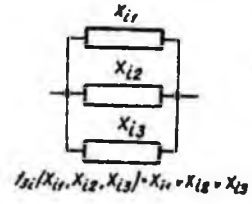


Рис. 2.

Таким образом, условие выигрыша в надежности можно записать так:

$$p_0>p_2+p_3.$$

Рассмотрим следующую схему резервирования (рис. 2). Логическая функция, описывающая данную схему, имеет вид

$$f_{3l}(x_{l1},\ x_{l2},\ x_{l3})=x_{l1}\vee x_{l2}\vee x_{l2}=f_{30}(x_{l1},\ x_{l2})\vee x_{l3},$$

где

$$f_{30}(x_{l1},\ x_{l2})=x_{l1}\vee x_{l2}.$$

Используя (21), получаем

$$f_{3l}^{(0)}(x_{l1},\ x_{l2},\ x_{l3})=f_{30}^{(0)}(x_{l1},\ x_{l2})\,x_{l3}^0=x_{l1}^0x_{l2}^0x_{l3}^0;$$

$$f_{3l}^{(1)}(x_{l1},\ x_{l2},\ x_{l3})=f_{30}^{(0)}(x_{l1},\ x_{l2})\,x_{l3}^1\vee f_{30}^{(1)}(x_{l3}^0\vee x_{l3}^1)=$$
$$=x_{l1}^0x_{l2}^0x_{l3}^1\vee\left[x_{l1}^0x_{l2}^1\vee x_{l1}^1(x_{l2}^0\vee x_{l2}^1)\right](x_{l3}^0\vee x_{l3}^1)=$$
$$=x_{l1}^0x_{l2}^0x_{l3}^1\vee(x_{l1}^0x_{l2}^1\vee x_{l1}^1x_{l2}^0\vee x_{l1}^1x_{l2}^1)(x_{l3}^0\vee x_{l3}^1);$$

$$f_{3l}^{(2)}(x_{l1},\ x_{l2},\ x_{l3})=f_{30}^{(2)}(x_{i1},\ x_{i2})(x_{l3}^0\vee x_{l3}^1\vee x_{l3}^2)\vee x_{l3}^2\left[f_{30}^{(0)}(x_{l1},\ x_{l2})\vee\right.$$
$$\left.\vee f_{30}^{(1)}(x_{l1},\ x_{l2})\right]=\left[x_{l1}^2(x_{l2}^0\vee x_{l2}^1\vee x_{l2}^2)\vee x_{l2}^2(x_{l1}^0\vee x_{l1}^1)\right](x_{l3}^0\vee x_{l3}^1\vee$$
$$\vee x_{l3}^2)\vee x_{l3}^2\left[x_{l1}^0x_{l2}^0\vee x_{l1}^0x_{l2}^1\vee x_{l1}^0(x_{l2}^0\vee x_{l2}^1)\right];$$

$$f_{3l}^{(3)}(x_{l1},\ x_{l2},\ x_{l3})=f_{30}^{(3)}(x_{l1},\ x_{l2})\vee x_{l3}^3\left[f_{30}^{(0)}(x_{l1},\ x_{i2})\vee f_{30}^{(1)}(x_{l1},\right.$$
$$\left.x_{i2})\vee f_{30}^{(2)}(x_{l1},\ x_{l2})\right]=\left[x_{l1}^3\vee x_{l2}^3(x_{l1}^0\vee x_{l1}^1\vee x_{l1}^2)\right]\vee x_{l3}^3\left[x_{l1}^0x_{l2}^0\vee x_{l1}^0x_{l2}^1\vee\right.$$
$$\left.\vee x_{l1}^1(x_{l2}^0\vee x_{l2}^1)\vee x_{l1}^2(x_{l2}^0\vee x_{l2}^1\vee x_{l2}^2)\vee x_{l2}^2(x_{l1}^0\vee x_{l1}^1)\right].$$

Переходя к вероятностным соотношениям, определяем (рис. 2) вероятность безотказной работы:

$$P[f_{3l}(x_{l1},\ x_{i2},\ x_{i3})=1]=p_0^2p_1+(p_0p_1+p_1p_0+p_1^2)(p_0+p_1)=$$
$$=(1-p_0-p_2-p_3)(1+p_0^2+p_2^2+p_3^2+p_0-p_0p_2-p_0p_3+2p_2p_3);$$

вероятности отказов трех видов:

$$P[f_{3i}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = 0] = p_0^3;$$

$$P[f_{3i}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = 2] = [p_2(p_0 + p_1 + p_2) + p_2(p_0 + p_1)](p_0 + p_1 + p_2) +$$

$$+ p_2[p_0^2 + p_0p_1 + p_1(p_0 + p_1)] = p_2(3 - 2p_2 + 2p_2p_3 - 4p_3 + p_2^2 + 3p_3^2);$$

$$p[f_{3i}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = 3] = [p_3 + p_3(p_0 + p_1 + p_2)] + p_3[p_0^2 + p_0p_1 +$$

$$+ p_1(p_0 + p_1) + p_2(p_0 + p_1 + p_2) + p_2(p_0 + p_1)] = p_3(3 - p_2 - 3p_3 + p_3^2).$$

Условие, при выполнении которого данная схема резервирования обеспечивает выигрыш по надежности по сравнению со схемой, включающей только один элемент x_{i1}:

$$B_2 = \frac{(1 - p_0 - p_2 - p_3)(1 + p_0^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_0 - p_0p_2 - p_0p_3 + 2p_2p_3)}{1 - p_0 - p_2 - p_3} > 1,$$

т. е.

$$p_0 > \frac{p_3 - 2 + \sqrt{(2 - p_3)^2 - 4(p_2 + p_3)(p_2 + p_3 + 1)}}{2}.$$

Рассмотрим непосредственно задачу оптимального резервирования. Допустим, что исследуемая система состоит из последовательно включенных разнотипных элементов. Введем обозначения:

$p_i^{(0)}$, $p_i^{(2)}$, $p_i^{(3)}$ — вероятности отказов трех видов для i-го элемента; G_i — вес i-го элемента; V_i — объем i-го элемента.

Резервированная система имеет следующие основные параметры:

$P_{\text{рез}}^{(1)}$ — вероятность безотказной работы; $G_{\text{рез}}$ — вес; $V_{\text{рез}}$ — объем, причем на вес и объем накладываются ограничения вида

$$G_{\text{рез}} \leqslant G_{\text{доп}}; \quad V_{\text{рез}} \leqslant V_{\text{доп}}.$$

Постановка задачи: для каждого из основных N элементов системы требуется найти оптимальный набор резервных элементов, включаемых параллельно рассматриваемому элементу, чтобы получить максимально возможное значение вероятности безотказной работы системы $p_{\text{рез}}^{(1)} = \max(p_k^{(1)})$, $k = 1, \ldots, R$, где k — номер варианта резервирования элементов системы, удовлетворяя ограничениям, наложенным на вес и объем системы.

В процессе решения задачи приходится определять характеристики надежности все более усложняющейся схемы. При этом применяется рекуррентный способ вычислений с использованием выведенных соотношений — различных типов соединения элементов. Для каждого участка схемы определяется значение $P(f = M)$ по всем $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Так как более двух резервных элементов на каждый основной элемент (двойное резервирование) на практике не используется, в памяти ЭВМ достаточно хранить предварительно вычисленные по приведенным формулам значения

$$P[f_{2i}(x_{i1}, x_{i2}) = M], \quad P[f_{3i}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = M],$$

$$M = \{0, 1, 2, 3\}, \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

причем $f_{2i}(x_{i1}, x_{i2})$, $f_{3i}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ описывают схемы резервирования, предствленные на рис. 1 и рис. 2.

Задача с двумя ограничениями может быть сведена к задаче с одним ограничением [1, 2] при помощи введения коэффициента Ξ, учитывающего возможность резервирования по каждому из ограничений:

$$\Xi_k = \frac{a_G\left(G_{k-1} + \sum_{i=S+2}^{N} G_i\right)G_k}{G_{\text{доп}}} + \frac{a_V\left(V_{k-1} + \sum_{i=S+2}^{N} V_i\right)V_k}{V_{\text{доп}}},$$

где $S = 1, 2, \ldots, N-1$ — номер последовательностей решений;
$K = 1, 2, \ldots, R$ — номер шага в рассматриваемой последовательности решений;
α_G, α_V — масштабные множители для приведения единиц измерения веса и объема к одному масштабу;
G_k, V_k — вес и объем системы на k-ом шаге оптимальной последовательности. При $k = 0$ значения $G_0 V_0$ соответствуют значениям параметров исходной нерезервированной системы.

Различные варианты структуры резервированной системы сравниваются по значению вероятности безотказной работы P_k^1 и коэффициента Ξ_k. По сути, задача сводится к поиску оптимальной последовательности вариантов структуры каждой части системы:

причем $$\{P_1^{(1)}, \Xi_1; P_2^{(1)}, \Xi_2; \ldots; P_R^{(1)}, \Xi_R\},$$

$$P_k^{(1)} > P_{k-1}^{(1)}; \quad \Xi_k > \Xi_{k-1}.$$

Используется многошаговый вычислительный процесс. На каждом шаге рассматриваются возможные варианты схем резервирования и среди них выбирается такой, для которого значение Ξ минимально. Шагом называется добавление к системе одного резервного элемента. Решение задачи достигается за несколько циклов, причем в первом рассматривается пара, состоящая из первого и второго узла системы, во втором первая пара рассматривается как некоторый эквивалентный узел, к которому присоединяется третий узел системы и т. д. Узел исходной системы состоит из одного или нескольких элементов. В процессе решения узел может либо «наращиваться» за счет введения резервных элементов, параллельных основному, либо оставаться без изменения.

Вычислительный процесс считается законченным, если удовлетворяется одно из неравенств:

$$G_{R-1} < G_{\text{доп}} < G_R; \quad V_{R-1} < V_{\text{доп}} < V_R.$$

В качестве примера рассчитывалось оптимальное количество резервных элементов для системы из трех последовательно включенных элементов, имеющих следующие характеристики:

$p_1^{(1)} = 0{,}77$; $p_1^{(0)} = 0{,}2$; $p_1^{(2)} = 0{,}02$; $p_1^{(3)} = 0{,}01$; $G_1 = 2$; $V_1 = 3$;
$p_2^{(1)} = 0{,}65$; $p_2^{(0)} = 0{,}3$; $p_2^{(2)} = 0{,}03$; $p_2^{(3)} = 0{,}02$; $G_2 = 3$; $V_2 = 2$;
$p_3^{(1)} = 0{,}83$; $p_3^{(0)} = 0{,}15$; $p_3^{(2)} = 0{,}01$; $p_3^{(3)} = 0{,}01$; $G_3 = 1$; $V_3 = 4$.

Параметры исходной нерезервированной системы

$$p_0^{(1)} = 0{,}504; \quad G_0 = \sum_{i=1}^{3} G_i = 6; \quad V_0 = \sum_{i=1}^{3} V_i = 9.$$

Задача состоит в построении оптимальной резервированной системы с учетом ограничений: $G_{\text{доп}} = 12$; $V_{\text{доп}} = 16$.

Ход вычислений представлен на табл. 1 и 2. В результате расчета получена такая последовательность вариантов:

$n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $p_0^{(1)} = 0{,}636$; $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $p_1^{(1)} = 0{,}825$, $\Xi_1 = 14{,}15$; $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $p_2^{(1)} = 0{,}813$, $\Xi_2 = 14{,}9$; $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $p_3^{(1)} = 0{,}848$, $\Xi_3 = 18{,}93$.

Здесь n_1, n_2, n_3 — количество элементов в первом, втором и третьем узлах схемы, содержится один основной и один резервный элемент.

Таким образом, для оптимальной резервированной системы характерны $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $p_{\text{рез}}^{(1)} = 0{,}848$, $G_{\text{рез}} = 10$, $V_{\text{рез}} = 15$.

Таблица 1

$n_1 = 1$ $G = 2$ $V = 3$	$n_1 = 2$ $G = 4$ $V = 6$	$n_1 = 3$ $G = 6$ $V = 9$
$n_2 = 1$ $G = 3$ $V = 2$ $P_{11}^{(1)} = 0{,}636$ $G_{11} = 5$ $V_{11} = 5$	$P_{12}^{(1)} = 0{,}652$ $G_{12} = 7$ $V_{12} = 8$ $\Xi_1^* = \Xi_{12} = 7.29$	
$n_2 = 2$ $G = 6$ $V = 4$ $k = 1$ $P_{21}^{(1)} = 0{,}794$ $G_{21} = 8$ $V_{21} = 7$ $\Xi_1 = \Xi_{21} = 6.95$	$k = 2$ $P_{22}^{(1)} = 0{,}825$ $G_{22} = 10$ $V_{22} = 10$ $\Xi_2^* = \Xi_{22} = 14.15$	$G_{23} = 12 > G_{1\text{доп}}$ $V_{23} = 13 > V_{1\text{доп}}$
$n_2 = 3$ $G = 9$ $V = 6$ $P_{31}^{(1)} = 0{,}875$ $G_{31} = 11$ $V_{31} = 9$ $\Xi_2 = \Xi_{31} = 12.89$	$G_{32} = 13 > G_{1\text{доп}}$ $V_{32} = 12$	

Таблица 2

$(n_1 = 1,\ n_2 = 1)$ $P^{(1)} = 0{,}636$ $G = 5$ $V = 5$	$(n_1 = 1,\ n_2 = 2)$ $P^{(1)} = 0{,}794$ $G = 8$ $V = 7$	$(n_1 = 1,\ n_2 = 3)$ $P^{(1)} = 0{,}875$ $G = 11$ $V = 9$
$n_3 = 1$ $G = 1$ $V = 4$ $P_{11}^{(1)} = 0{,}504$ $G_{11} = 6$ $V_{11} = 9$	$k = 1$ $P_{12}^{(1)} = 0{,}546$ $G_{12} = 9$ $V_{12} = 11$ $\Xi_1^* = \Xi_{12} = 9.14$	$k = 3$ $P_{13}^{(1)} = 0{,}813$ $G_{13} = 12$ $V_{13} = 13$ $\Xi_2^* = \Xi_{13} = 14.9$ $\Xi_3 = \Xi_{13} = 14.9$
$n_3 = 2$ $G = 2$ $V = 8$ $k = 2$ $P_{21}^{(1)} = 0.524$ $G_{21} = 7$ $V_{21} = 13$ $\Xi_1 = \Xi_{21} = 8.97$ $\Xi_2 = \Xi_{21} = 11.98$	$k = 4$ $P_{22}^{(1)} = 0.848$ $G_{22} = 10$ $V_{22} = 15$ $\Xi_3^* = \Xi_{22} = 14.96$ $\Xi_4 = \Xi_{22} = 18.93$	$G_{23} = 13$ $V_{23} = 17 > V_{\text{доп}}$
$n_3 = 3$ $G = 3$ $V = 12$ $G_{31} = 8$ $V_{31} = 17 > V_{\text{доп}}$		

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Г. Алексеев, В. И. Якушев. Об одном алгоритме оптимизации резервирования аппаратуры. «Изв. АН СССР, Техническая кибернетика», 1964, № 4.

2. Б. П. Крединцер и др. Решение задач эксплуатации и надежности на универсальных ЭЦВМ. Изд-во «Сов. радио», 1967.

3. B. Rosser, Terquette. Many-valued logic, Amsterdam, 1952.

4. В. И. Сапрыкин. О применении четырехзначной логики для расчета надежности систем с резервированием. Тезисы докладов I республиканской конференции по надежности средств вычислительной техники. Северодонецк, 1969.

5. А. М. Романкевич. Методы минимизации функций многозначной логики. «Кибернетика», 1965, № 4.