УДК 62.506.2

В. М. БОНДАРЕВ

О ТЕОРЕМЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В АЛГЕБРЕ ПРЕДИКАТОВ

Неизбежным следствием машинного моделирования интеллек-уальных процессов является конечность, детерминированность однозначность создаваемых моделей. Успехи на пути модели-ования во многом определяются возможностью математически писать интеллектуальные процессы, подвергаемые исследованию. качестве аппарата такого описания может рассматриваться гебраическая система, предложенная в работах [1, 2].

В настоящей статье формулируется и доказывается одна тео-ма в рамках упомянутой алгебраической системы, приводится имер использования теоремы для описания морфологической работки имен существительных русского языка. Теорема пред-авляет собой аналог известной в алгебре логики теоремы о дизъ-нктивном разложении. В ходе изложения мы будем пользо-аться определениями [1], повторяя их в данной работе.

Теорема. *Любой конечный предикат $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно редставить в виде*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_k} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n), \tag{1}$$

е $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ *пробегает все значения из алфавита* $A_p =$ $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.

Символ $\bigvee$ означает логическую сумму. Выражение $\sigma_1, \sigma_2, \ldots,$ показывает, что логическое суммирование проводится по всем зможным комбинациям значений индексов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. Знаки ерации конъюнкции опущены.

Для доказательства теоремы воспользуемся математической дукцией по следующей схеме: 1) докажем утверждение теоре-ы для $n = k = p = 1$; 2) предположив справедливость (1) для $= k = 1$ и $p = t$, докажем его справедливость для $n = k = 1$ $p = t + 1$; 3) предположив справедливость (1) для $k = 1$, про-звольно фиксированного p и $n = t$, докажем справедливость его я тех же k и p и $n = t + 1$; 4) произвольно зафиксировав и p, докажем, что из справедливости (1) при $k = t$ $(t < n)$ едует его справедливость при $k = t + 1$.

Доказательство. 1. Пусть $k = n = p = 1$. Утверждение теоремы примет вид

$$f(x) = \bigvee_{\sigma = a_1} x^{\sigma} f(\sigma) = x^{a_1} f(a_1). \quad (2)$$

Поскольку вся область изменения x состоит лишь из a_1, подставим a_1 в (2) и убедимся, что равенство выполняется:

$$f(a_1) = a_1^{a_1} f(a_1) = f(a_1). \quad (3)$$

2. Предположим, что при $p = t$ $(k = n = 1)$ справедливо равенство

$$f(x) = \bigvee_{\sigma = a_1}^{a_t} x^{\sigma} f(\sigma). \quad (4)$$

Докажем, что всякую функцию $\varphi(y)$, определенную на множестве $A_{t+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_t, a_{t+1}\}$ можно представить в виде

$$\varphi(y) = \bigvee_{\sigma = a_1}^{a_{t+1}} y^{\sigma} \varphi(\sigma). \quad (5)$$

Применение новых обозначений φ и y вызвано тем, что в данном случае речь идет об иных математических объектах, чем в равенстве (4).

Для любой функции $\varphi(y)$ $(y \in A_{t+1})$ можно отыскать такую $f(x)$ $(x \in A_t)$, чтобы для всякой константы $c \in A_t$ выполнялось равенство $\varphi(c) = f(c)$. Действительно, график $f(x)$ всегда может быть получен путем удаления пары $\langle a_{t+1}, \varphi(a_{t+1}) \rangle$ из графика $\varphi(y)$. Поэтому справедливо

$$\varphi(c) = \begin{cases} f(c), & \text{если } c \neq a_{t+1}; \\ \varphi(a_{t+1}), & \text{если } c = a_{t+1}. \end{cases} \quad (6)$$

Покажем, что разложение (5) при $x = c$ $(c \in A_{t+1})$ эквивалентно (6). При $x = c$ (5) примет вид

$$\varphi(c) = \bigvee_{\sigma = a_1}^{a_{t+1}} c^{\sigma} \varphi(\sigma) = \bigvee_{\sigma = a_1}^{a_t} c^{\sigma} \varphi(\sigma) \vee c^{a_{t+1}} \varphi(a_{t+1}). \quad (7)$$

Пусть $c \neq a_{t+1}$, тогда $c^{a_{t+1}} = 0$. Кроме того, все $\varphi(\sigma)$ в правой части (7) равны $f(\sigma)$, так как σ не выходит за пределы. Равенство (7) преобразуем в

$$\varphi(c) = \bigvee_{\sigma = a_1}^{a_t} c^{\sigma} f(\sigma) = f(c), \quad (8)$$

поскольку $f(x)$ допускает разложение (4).

Пусть $c = a_{t+1}$. Подставим его в (7):

$$\varphi(c) = \bigvee_{\sigma = a_1}^{a_t} a_{t+1}^{\sigma} \varphi(\sigma) \vee a_{t+1}^{a_{t+1}} \varphi(a_{t+1}) = \varphi(a_{t+1}). \quad (9)$$

Равенства (8) и (9), взятые совместно, выражают то же, что и (6), поэтому можно говорить, что разложение (5) справедливо пр фиксированном $y=c\,(c \in A_{t+1})$. Поскольку на выбор c не накладывалось никаких ограничений, (5) справедливо при любом $y \in A_{t+1}$.

3. Пусть по предположению для $n=t$ (p фиксировано, $k=1$) справедливо равенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_t) = \bigvee_{\sigma_1=a_1}^{a_p} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2, \ldots, x_t). \tag{10}$$

Докажем возможность аналогичного разложения функции φ, зависящей от $t+1$ переменной:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_t, x_{t+1}) = \bigvee_{\sigma_1=a_1}^{a_t} x_1^{\sigma_1} \varphi(\sigma_1, x_2, \ldots, x_t, x_{t+1}). \tag{11}$$

Пусть x_{t+1} принимает одно из возможных значений, например, $c\,(c \in A_p)$. Тогда (11) примет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_t, c) = \bigvee_{\sigma_1=a_1}^{a_p} x_1^{\sigma_1} \varphi(\sigma_1, x_2, \ldots, x_t, c). \tag{12}$$

Зафиксировав значение переменной x_{t+1}, мы фактически получили новую функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_t, c)$, зависящую от t переменных. Но разложение такой функции по формуле (12) возможно в силу предположения (10). Поскольку мы фиксировали значение x_{t+1} произвольно, (12) справедливо при любом $x_{t+1} \in A_p$, другими словами, имеет место равенство (11).

4. Предположим, что при $k=t$ (n и p фиксированы) возможно разложение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)} x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t, x_{t+1}, \ldots, x_n). \tag{13}$$

Докажем, что при $k=t+1$ возможно такое же разложение, т. е. справедливо

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{t+1})} x_1^{\sigma_1} \ldots x_t^{\sigma_t} x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_n). \tag{14}$$

Зафиксируем некоторую комбинацию значений индексов $\sigma_1 = c_1, \sigma_2 = c_2, \ldots, \sigma_t = c_t$. Выражение $f(c_1, c_2, \ldots, c_t, x_{t+1}, \ldots, x_n)$ является функцией от $n-t$ переменных и, согласно пункту 3 данного доказательства, допускает разложение по переменной x_{t+1}:

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_t, x_{t+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_{t+1}=a_1}^{a_p} x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(c_1, c_2, \ldots, c_t, \sigma_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_n). \tag{15}$$

Так как константы $c_1, c_2, \ldots, c_t$ были произвольно выбраны, разложения типа (15) могут быть получены для любой комбинации значений индексов. Подставим их в (13):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_t^{\sigma_t} \left(\bigvee_{\sigma_{t+1}=a_1}^{a_p} x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_t, \sigma_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_n) \right) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Утверждение (14), а вместе с ним и утверждение теоремы (1) доказаны.

Следствие 1. При $k = 1$, тождество (1) принимает следующий вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1=a_1}^{a_t} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{17}$$

Справедливость следствия 1 очевидна, кроме того, его прямым доказательством могут служить п. 1, 2, 3 доказательства теоремы.

Следствие 2. При $k = n$ тождество (1) приобретает вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}. \tag{18}$$

Равенство $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$ под знаком дизъюнкции показывает, что логическое суммирование ведется только при наборах значений $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, которые обращают $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ в единицу. Остальные наборы значений обращают эту функцию в нуль, а с нею и соответствующие дизъюнктивные члены обращаются в нуль, и их можно не учитывать. Выражение, стоящее в правой части тождества (18), представляет собой аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы функций алгебры логики.

Теорема о дизъюнктивном разложении может быть использована при создании математической модели морфологии русского языка. Проиллюстрируем это положение на примере имен существительных среднего рода. Как и в работах [2, 3], представим модель в виде так называемой морфологической функции $L(x, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$. Переменная x — лексическое значение слова, y_1 — основа словоформы, y_2 — окончание словоформы, z_1, z_2, z_3 — грамматические категории одушевленности, числа и падежа. Возможные значения переменной x — лексемы существительных среднего рода, значениями переменной y_1 — основы, а y_2 — окончания существительных среднего рода. Значениями z_1 являются одушевленность или неодушевленность, z_2 — единственное или множественное число, z_3 — падежи существительных.

Значения каждой переменной можно закодировать с помощью цепочек символов русского алфавита, длина которых не превышает m. Для основ и окончаний таким кодом может служить их обычная запись, кодом лексемы можно считать словоформу единственного числа именительного падежа, а значения z_1, z_2 и z_3 закодировать начальными буквами определенных слов, например, одушевленность — о, именительный падеж — и. Общей областью изменения переменных можно считать все множество буквенных цепочек, длина которых не больше m. Обозначим это множество через A.

Морфологическая функция равна 0, когда значения ее аргументов несовместимы ни в одном контексте, соответствующем нормам русского языка, и равна 1 в противном случае [2].

Хотя мы унифицировали область изменения аргументов морфологической функции, будем помнить, что в русском языке объективно существует множество основ словоформ, множество окончаний, множество падежей и т. д. Обозначим эти множества теми же латинскими буквами, что и соответствующие переменные, но прописными, например, множество лексем — X, множество основ — Y_1 и т. д. При соответствующем кодировании их всех можно считать подмножествами A. Заметим, что необходимым условием совместимости значений аргументов является принадлежность их упомянутым множествам.

Морфологическая функция $L(x, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ является конечным предикатом, поэтому, согласно следствию 1 теоремы о разложении, можно записать

$$L(x, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = \bigvee_{\sigma_4 \in A} z_1^{\sigma_4} L(x, y_1, y_2, \sigma_4, z_2, z_3). \tag{19}$$

Учитывая, что $L(x, y_1, y_2, \sigma_4, z_2, z_3) = 0$, если $\sigma_4 \notin Z_1$, перепишем (19) в виде

$$L(x, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = \bigvee_{\sigma_4 \in Z_1} z_1^{\sigma_4} L(x, y_1, y_2, \sigma_4, z_2, z_3). \tag{20}$$

В дальнейшем будем заменять область изменения A индекса логического суммирования более узкой областью без дополнительных оговорок.

Смысл разложения (20) в том, что мы выражаем морфологическую функцию через две более простые функции меньшего числа переменных. Одна из них описывает зависимость между лексемами, основами, окончаниями, числами и падежами одушевленных существительных среднего рода, а другая — неодушевленных.

В свою очередь, каждую из них можно разложить по переменной x:

$$L(x, y_1, y_2, \sigma_4, z_2, z_3) = \bigvee_{\sigma_1 \in X} x_1^{\sigma_1} L(\sigma_1, y_1, y_2, \sigma_4, z_2, z_3). \tag{21}$$

Функции вида $L(\sigma_1, y_1, y_2, \sigma_4, z_2, z_3)$ задают отношения совместимости основ, окончаний, числа и падежей для определенной лексемы и допускают разложение по y_1:

$$L(\sigma_1, y_1, y_2, \sigma_4, z_2, z_3) = \bigvee_{\sigma_2 \in Y_1} y_1^{\sigma_2} L(\sigma_1, \sigma_2, y_2, \sigma_4, z_2, z_3). \qquad (22)$$

Следующим этапом может быть разложение по z_2:

$$L(\sigma_1, \sigma_2. y_2, \sigma_4, z_2, z_3) = \bigvee_{\sigma_5 \in Z_2} z_2^{\sigma_5} L(\sigma_1, \sigma_2, y_2, \sigma_4, \sigma_5, z_3), \qquad (23)$$

затем по y_2:

$$L(\sigma_1, \sigma_2, y_2, \sigma_4, \sigma_5, z_3) = \bigvee_{\sigma_3 \in Y_2} y_2^{\sigma_3} L(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, z_3) \qquad (24)$$

и, наконец, по z_3:

$$L(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, z_3) = \bigvee_{\sigma_6 \in Z_3} z_3^{\sigma_6} L(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6). \qquad (25)$$

Выражение $L(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ является константой и по определению функции L может быть равно 1 или 0.

Систему равенств вида (19) — (25) можно считать математической моделью морфологии имен существительных среднего рода. Порядок разложения функции L по ее аргументам продиктован тем, что на практике приводит к достаточно компактной модели. Кроме того, можно установить, что число различных функций типа $L(\sigma_1, \sigma_2, y_2, \sigma_4. z_2, z_3) = \varphi(y_2, z_2, z_3)$ относительно невелико; для существительных среднего рода их около шестидесяти. Поэтому, заменив в (22) все $L(\sigma_1, \sigma_2, y_2, \sigma_4, z_2, z_3)$ соответствующими φ_i ($1 \leqslant i \leqslant l$, где l — число функций $\varphi(y_2, z_2, z_3)$), мы можем ограничить нашу модель равенствами (19) — (22) и выражениями для φ_i.

Примером такого выражения может служить функция, связующая окончания, число и падеж тех словоформ лексемы «кружево», основа которых «кружев»:

$$\varphi(y_2, z_2, z_3) = z_2^{\text{е}} (y_2^{0} (z_3^{\text{и}} \vee z_3^{\text{в}}) \vee y_2^{\text{а}} z_3^{\text{р}} \vee y_2^{\text{у}} z_3^{\text{д}} \vee$$
$$\vee\, y_2^{0\text{м}} z_3^{\text{т}} \vee y_2^{\text{е}} z_3^{\text{п}}) \vee z_2^{\text{м}} y_2^{\varnothing} z_3^{\text{р}}.$$

Это же выражение связывает окончания, число и падеж словоформ лексемы «место» с основой «мест», лексемы «войско» с основой «войск» и многих других.

Последовательное применение теоремы о разложении приводит к такой структуре математической модели, которую можно определить как древовидную. Это позволяет построить относительно простые алгоритмы решения задач анализа, синтеза, отыскания лексического значения слова, хотя и снижает компактность модели.