Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Математичні моделі та методи виявлення фінансових аномалій через спектральні властивості операторів Лапласа–Бельтрамі на графових структурах
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання, групи ПМм-24-1
Максим ПІДВАЛЬНИЙ
(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Валентин ЄСІЛЕВСЬКИЙ
(посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ПМ ____________ Максим СИДОРОВ
(підпис) (Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри ____________
(підпис)
“_10_” _листопада_ 2025 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _Підвальному Максиму Вікторовичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Математичні моделі та методи виявлення фінансових аномалій через спектральні властивості операторів Лапласа–Бельтрамі на графових структурах

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1028 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи часові ряди цін фінансових активів, похідні ряди дохідностей, кореляційні матриці та зважені графи фінансових взаємозалежностей

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі

   1. Аналіз предметної області
   2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
   3. Програмна реалізація
   4. Результати обчислювального експерименту
   5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _10_ листопада 2025 р.

Здобувач ____________________________________
(підпис)

Керівник роботи __________________ доц. Валентин ЄСІЛЕВСЬКИЙ
(підпис) (посада, Власне ім’я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 88 с., 14 рис., 3 дод., 30 джерел.

ФІНАНСОВІ АНОМАЛІЇ, СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ, ГРАФОВІ МОДЕЛІ, ЛАПЛАС–БЕЛЬТРАМІ ОПЕРАТОР, КОРЕЛЯЦІЙНІ МЕРЕЖІ, СИСТЕМНИЙ РИЗИК, ФІНАНСОВІ РИНКИ, СПЕКТР ЛАПЛАСІАНА, МОНІТОРИНГ РИЗИКІВ, CMRM.

Об’єкт дослідження – фінансові системи та процеси, представлені у вигляді динамічних кореляційних мереж фінансових активів.

Мета роботи – розроблення та дослідження математичних моделей і методів виявлення фінансових аномалій на основі спектральних властивостей оператора Лапласа-Бельтрамі, дискретизованого на графових структурах фінансових даних.

Методи дослідження – теорія графів, спектральна теорія операторів, математична статистика, кореляційний аналіз, чисельні методи лінійної алгебри, алгоритми спектрального аналізу, програмне моделювання.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу виявлення фінансових аномалій у складних фінансових системах на основі спектрального аналізу графових моделей. Показано, що традиційні методи аналізу фінансових часових рядів не завжди здатні виявляти приховані структурні зміни та передкризові стани ринку, оскільки не враховують глобальну мережеву структуру взаємозв’язків між фінансовими активами.

Фінансова система у роботі моделюється у вигляді динамічного зваженого графа, вершинами якого є фінансові активи, а ребрами – кореляційні залежності між їх дохідностями у ковзних часових вікнах. Для аналізу структури таких мереж використано нормований оператор Лапласа–Бельтрамі як дискретний аналог відповідного диференціального оператора спектральної геометрії.

Основними результатами роботи є розроблення математичної моделі кореляційного графа фінансових активів, алгоритмічної процедури побудови оператора Лапласа-Бельтрамі та комплексу спектральних індикаторів для виявлення фінансових аномалій. До таких індикаторів належать друге власне значення лапласіана (алгебраїчна зв'язність), спектральна щілина, спектральна ентропія та відстань між спектральними підпросторами у послідовних часових вікнах. Запропоновано комбінований підхід до діагностики аномальних режимів, що дозволяє зменшити кількість хибних спрацювань та підвищити чутливість до структурних змін ринку.

Наукова новизна роботи полягає у застосуванні спектральних властивостей оператора Лапласа–Бельтрамі для аналізу фінансових аномалій у межах графових моделей, а також у запропонованій інтерпретації змін спектра лапласіана як індикаторів системного фінансового ризику.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання розроблених методів у системах фінансового моніторингу, управління ризиками, аналітичних платформах та інформаційно-аналітичних системах підтримки прийняття рішень. Реалізація запропонованого підходу виконана у вигляді веб-системи Correlation Manifold Regime Monitor (CMRM), що забезпечує автоматизований розрахунок спектральних показників, збереження результатів та візуалізацію динаміки фінансових аномалій.

Результати роботи підтверджують доцільність використання спектральних методів аналізу графових моделей для раннього виявлення нестабільних режимів фінансових ринків та можуть бути використані як основа для подальших наукових досліджень і розвитку інтелектуальних систем фінансового ризик-менеджменту.

ABSTRACT

Introductory note: 88 pages, 14 figures, 3 appendixes, 30 references.

FINANCIAL ANOMALIES, SPECTRAL ANALYSIS, GRAPH MODELS, LAPLACE–BELTRAMI OPERATOR, CORRELATION NETWORKS, SYSTEMIC RISK, FINANCIAL MARKETS, LAPLACIAN SPECTRUM, RISK MONITORING, CMRM.

Object of research – financial systems and processes represented as dynamic correlation networks of financial assets.

Purpose of the work – development and investigation of mathematical models and methods for detecting financial anomalies based on the spectral properties of the Laplace–Beltrami operator discretized on graph structures of financial data.

Research methods – graph theory, spectral operator theory, mathematical statistics, correlation analysis, numerical methods of linear algebra, spectral analysis algorithms, and software modeling.

The diploma thesis addresses the problem of detecting financial anomalies in complex financial systems using spectral analysis of graph-based models. It is shown that traditional methods of financial time series analysis are not always capable of identifying hidden structural changes and pre-crisis market states, since they do not take into account the global network structure of interdependencies between financial assets.

In this work, the financial system is modeled as a dynamic weighted graph, where vertices represent financial assets and edges correspond to correlation relationships between their returns within sliding time windows. To analyze the structure of such networks, the normalized Laplace-Beltrami operator is employed as a discrete analogue of the corresponding differential operator of spectral geometry.

The main results of the work include the development of a mathematical model of a financial asset correlation graph, an algorithmic procedure for constructing the

Laplace-Beltrami operator, and a set of spectral indicators for detecting financial anomalies. These indicators include the second eigenvalue of the Laplacian (algebraic connectivity), the spectral gap, spectral entropy, and the distance between spectral subspaces in successive time windows. A combined approach to diagnosing anomalous regimes is proposed, which reduces the number of false detections and increases sensitivity to structural market changes.

The scientific novelty of the work lies in the application of the spectral properties of the Laplace-Beltrami operator to the analysis of financial anomalies within graph-based models, as well as in the proposed interpretation of changes in the Laplacian spectrum as indicators of systemic financial risk.

The practical significance of the obtained results consists in the possibility of applying the developed methods in financial monitoring systems, risk management, analytical platforms, and information-analytical decision support systems. The proposed approach is implemented in the form of a web-based system, Correlation Manifold Regime Monitor (CMRM), which provides automated computation of spectral indicators, storage of results, and visualization of the dynamics of financial anomalies.

The results of the study confirm the feasibility of using spectral methods of graph model analysis for early detection of unstable regimes in financial markets and may serve as a basis for further scientific research and the development of intelligent financial risk management systems.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

CMRM (Correlation Manifold Regime Monitor) – система моніторингу режимів фінансових ринків на основі кореляційних багатовидів;

LB-оператор – оператор Лапласа-Бельтрамі;

LBO (Laplace–Beltrami Operator) – оператор Лапласа–Бельтрамі;

PDF (Probability Density Function) – функція густини ймовірності;

API (Application Programming Interface) – прикладний програмний інтерфейс;

SQL (Structured Query Language) – мова структурованих запитів;

CSV (Comma-Separated Values) – текстовий формат табличних даних;

UI (User Interface) – інтерфейс користувача;

DB (Database) – база даних;

IT (Information Technology) – інформаційні технології;

$G=(V,E)$ – граф, де V – множина вершин, E – множина ребер;

A – матриця суміжності графа;

D – діагональна матриця степенів вершин;

L – лапласіан графа;

L_{norm} – нормований лапласіан графа;

λ_i – власні значення лапласіана;

λ_2 – друге власне значення лапласіана (алгебраїчна зв’язність);

Δ – оператор Лапласа–Бельтрамі;

H_S – спектральна ентропія;

W – ковзне часове вікно;

r_{ij} – коефіцієнт кореляції між активами *i* та *j*;

n – кількість вершин графа;

с – секунда;

хв – хвилина;

день – доба;

% – відсоток;

од. – умовна одиниця;

Фінансова аномалія – відхилення поведінки фінансової системи від нормального або очікуваного режиму, що може свідчити про підвищений системний ризик або передкризовий стан;

Кореляційна мережа – графова модель, у якій вершини відповідають фінансовим активам, а ребра – кореляційним зв'язкам між ними;

Спектральний аналіз графа – метод дослідження властивостей графа на основі спектра його лапласіана;

Оператор Лапласа–Бельтрамі – диференціальний оператор на ріманових многовидах, дискретним аналогом якого є лапласіан графа;

Алгебраїчна зв'язність – показник зв'язаності графа, що визначається другим власним значенням лапласіана;

Спектральна щілина – різниця між сусідніми власними значеннями спектра лапласіана, яка характеризує структурні властивості мережі;

Системний ризик – ризик колапсу або нестабільності фінансової системи внаслідок взаємозалежності її елементів;

Ковзне часове вікно – метод аналізу часових рядів, за якого обчислення виконуються на послідовних підінтервалах фіксованої довжини.

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасні фінансові системи характеризуються високим рівнем складності, динамічності та взаємозалежності між їх елементами. Процеси глобалізації, цифровізації фінансових ринків, зростання обсягів фінансових даних і швидкості їх обробки суттєво ускладнюють завдання аналізу фінансової інформації та підвищують ризик виникнення нетипових, аномальних явищ. Такі фінансові аномалії можуть проявлятися у вигляді різких змін ринкової поведінки, нетипових кореляцій між фінансовими інструментами, кризових збоїв або спекулятивних процесів і часто передують системним фінансовим кризам.

Традиційні методи фінансового аналізу, що ґрунтуються переважно на статистичних показниках та аналізі часових рядів, не завжди дозволяють ефективно виявляти складні структурні зміни у фінансових системах. Це зумовлює необхідність застосування нових підходів, здатних враховувати мережеву природу фінансових взаємодій, багатовимірність даних та нелінійні зв'язки між їх елементами. У цьому контексті перспективним напрямом досліджень є використання апарату теорії графів, спектрального аналізу та диференціальної геометрії для побудови математичних моделей фінансових систем.

Особливу увагу в сучасних наукових дослідженнях привертають методи, що базуються на спектральних властивостях операторів, асоційованих із графовими структурами. Представлення фінансових даних у вигляді графів, де вузлами є фінансові інструменти, компанії або транзакції, а ребрами – взаємозв'язки між ними, дозволяє досліджувати глобальні структурні властивості фінансової системи. У такому підході оператор Лапласа-Бельтрамі та його дискретні аналоги відіграють ключову роль, оскільки їх спектральні характеристики відображають геометричні та топологічні особливості мережі.

Застосування спектральних властивостей оператора Лапласа-Бельтрамі до аналізу фінансових мереж відкриває можливість виявлення прихованих закономірностей та аномальних режимів, які не проявляються безпосередньо у класичних фінансових показниках. Зокрема, зміни у спектрі оператора, поява спектральних розривів або локалізованих власних мод можуть свідчити про порушення структурної цілісності фінансової системи та зростання системного ризику. Саме тому поєднання методів спектральної геометрії з графовими моделями є актуальним і перспективним напрямом наукових досліджень у сфері фінансової аналітики.

Актуальність кваліфікаційної роботи зумовлена потребою у розробленні ефективних математичних методів виявлення фінансових аномалій, здатних працювати з великими обсягами даних і враховувати складну мережеву структуру фінансових ринків. Використання спектральних властивостей операторів Лапласа-Бельтрамі на графових структурах дозволяє сформувати універсальний інструментарій для аналізу фінансових систем різної природи та масштабу, що відповідає сучасним тенденціям розвитку фінансової науки і прикладної математики.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розроблення та дослідження математичних моделей і методів виявлення фінансових аномалій на основі спектральних властивостей операторів Лапласа-Бельтрамі, дискретизованих на графових структурах фінансових даних. Для досягнення поставленої мети у роботі передбачається розв'язання таких основних завдань:

– аналіз існуючих підходів до виявлення фінансових ризиків і аномалій;

– дослідження графових моделей представлення фінансових даних;

– вивчення спектральних властивостей оператора Лапласа-Бельтрамі та методів його дискретизації на графах;

– розроблення методів аналізу фінансових аномалій на основі спектральних характеристик графових структур;

– експериментальна апробація запропонованих підходів на фінансових даних.

Об'єктом дослідження є фінансові системи та процеси, представлені у вигляді графових структур.

Предметом дослідження є математичні моделі та спектральні методи аналізу операторів Лапласа–Бельтрамі для виявлення фінансових аномалій.

Інноваційність отриманих результатів полягає у наступному:

– застосуванні спектральних властивостей оператора Лапласа-Бельтрамі до аналізу фінансових аномалій у межах графових моделей;

– поєднанні методів спектральної геометрії та теорії графів для виявлення структурних змін у фінансових мережах;

– запропонованому підході до інтерпретації змін спектра лапласіана як індикаторів фінансових аномалій і системного ризику.

Практичне значення роботи полягає у можливості використання розроблених методів для аналізу фінансових ринків, систем управління ризиками та інформаційно-аналітичних систем фінансового моніторингу.

У межах даної роботи фінансова система розглядається як складна динамічна мережа, структура якої змінюється у часі під впливом внутрішніх та зовнішніх факторів. Такий підхід дозволяє перейти від аналізу окремих фінансових інструментів до дослідження колективної поведінки ринку в цілому. Представлення фінансових даних у вигляді графових структур створює передумови для застосування сучасних методів спектрального аналізу, що є особливо ефективними для виявлення глобальних структурних змін і прихованих аномалій.

Методологічною основою дослідження є апарат теорії графів, спектральної теорії операторів, методи математичної статистики та чисельного аналізу. У роботі використовується концепція нормованого графового лапласіана як дискретного аналога оператора Лапласа-Бельтрамі, що дозволяє досліджувати топологічні та геометричні властивості фінансових мереж. Аналіз спектральних характеристик цього оператора дає змогу оцінювати ступінь зв'язності ринку, стабільність його структури, рівень впорядкованості взаємозв'язків між активами та динаміку змін у часовому вимірі.

Особливістю запропонованого підходу є використання сукупності спектральних показників, що дозволяє здійснювати комплексну оцінку стану фінансової системи. Замість опори на один індикатор аналіз проводиться з урахуванням змін кількох характеристик, що підвищує надійність виявлення аномальних режимів і зменшує ймовірність хибних спрацювань. Такий підхід є особливо актуальним для аналізу великих фінансових мереж, де локальні зміни можуть не відображати реального рівня системного ризику.

Інформаційну базу дослідження становлять фінансові часові ряди, що характеризують динаміку цін фінансових інструментів, а також похідні від них показники взаємозалежності. У процесі роботи використовуються методи попередньої обробки даних, формування ковзних часових вікон та побудови послідовності графів кореляцій, що дозволяє аналізувати еволюцію структури фінансової системи у часі. Для реалізації обчислювальних процедур застосовуються сучасні програмні засоби та інформаційні технології, що забезпечують масштабованість і практичну придатність запропонованих методів.

Структура кваліфікаційної роботи зумовлена логікою дослідження та поставленими завданнями. У першому розділі здійснюється системний аналіз предметної області та розглядаються основні підходи до виявлення фінансових аномалій. У другому розділі викладаються математичні основи побудови графових моделей фінансових даних і методи спектрального аналізу, зокрема обчислення ключових спектральних характеристик оператора Лапласа-Бельтрамі. Третій розділ присвячено програмній реалізації запропонованих методів, експериментальним дослідженням та аналізу отриманих результатів. У висновках узагальнюються основні результати роботи та визначаються напрями подальших досліджень.

Таким чином, виконане дослідження спрямоване на розвиток математичного апарату аналізу фінансових систем і може слугувати основою для створення інтелектуальних систем фінансового моніторингу, раннього попередження кризових явищ та підтримки прийняття рішень у сфері управління фінансовими ризиками.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи теорії графів, спектральної теорії операторів, математичної статистики, кореляційного аналізу, чисельні методи лінійної алгебри, алгоритми спектрального аналізу, програмне моделювання.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Сутність та особливості фінансових аномалій

Фінансові ринки традиційно розглядаються в межах гіпотези ефективного ринку, згідно з якою ринкові ціни фінансових активів у будь-який момент часу повністю відображають усю доступну інформацію. У такій системі передбачається раціональна поведінка учасників ринку, швидке реагування на нову інформацію та відсутність можливостей для систематичного отримання надприбутків без прийняття додаткового ризику. Проте численні емпіричні дослідження свідчать про існування стійких відхилень від цієї моделі, які отримали назву фінансових аномалій.

Фінансові аномалії визначаються як емпірично зафіксовані закономірності в динаміці цін, доходностей або обсягів торгів, що не узгоджуються з класичними фінансовими теоріями та не можуть бути пояснені виключно випадковими коливаннями. Згідно з підходом Т. Куна, аномалії є фактами, які суперечать панівній теоретичній парадигмі, а за визначенням Г. Шверта – це результати, що не узгоджуються з моделями ринкової ефективності. На рисунку 1.1 показано приклад аномалії, що відбувається у природі. Таку ж аналогію можна привести і по відношенню до фінансів.

Однією з ключових причин виникнення фінансових аномалій є ірраціональна поведінка інвесторів, яка зумовлена психологічними, когнітивними та поведінковими чинниками. На відміну від припущень класичних моделей, інвестори не завжди прагнуть максимізувати очікувану корисність, часто використовують спрощені евристики при прийнятті рішень та демонструють систематичні помилки у сприйнятті ризику й інформації. Такі відхилення породжують так званий «шум» на фінансовому ринку, що проявляється у вигляді короткострокових дисбалансів, підвищеної волатильності та аномальних цінових рухів.

У межах поведінкових фінансів фінансові аномалії тісно пов’язуються з теорією перспектив Д. Канемана та А. Тверскі, відповідно до якої економічні агенти оцінюють виграші та втрати асиметрично, а їхні рішення залежать від контексту, попереднього досвіду та емоційного стану. Використання евристик доступності, репрезентативності та прив’язки призводить до недостатньої або надмірної реакції ринку на інформаційні сигнали, що, у свою чергу, формує стійкі аномальні ефекти в динаміці фінансових активів.

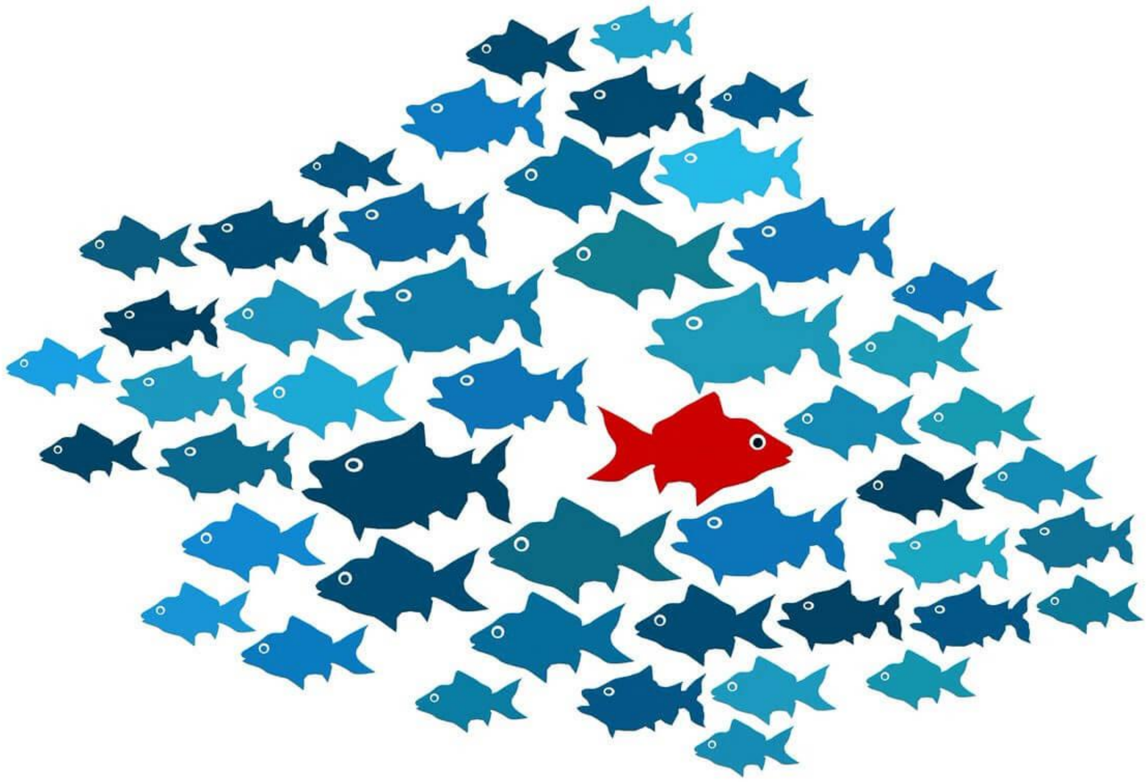

Рисунок 1.1 – Ілюстрація аномального елемента у фінансовій мережі

Наукові дослідження дозволяють класифікувати фінансові аномалії за кількома основними групами. Найбільш поширеними є календарні аномалії, до яких належать ефект кінця тижня, ефект кінця місяця та ефект кінця року. Зокрема, емпірично встановлено, що в окремі календарні періоди середні доходності фінансових активів статистично відрізняються від середньоринкових значень, що суперечить гіпотезі ефективного ринку.

Окрім календарних, значну роль відіграють вартісні аномалії, пов’язані з характеристиками компаній, такими як розмір, капіталізація або фінансові мультиплікатори. Дослідження свідчать, що акції малих компаній або компаній із низьким коефіцієнтом ціна/прибуток у довгостроковій перспективі можуть демонструвати підвищену дохідність порівняно з великими корпораціями, що не повністю пояснюється рівнем ризику.

Особливістю фінансових аномалій є їх динамічний та нестійкий характер. Аномалії можуть послаблюватися або зникати внаслідок адаптації ринку, розвитку інформаційних технологій та зростання ролі алгоритмічної торгівлі. Водночас у кризові періоди або під час структурних змін фінансової системи вони знову набувають вираженого характеру, що свідчить про складну нелінійну природу фінансових ринків як багатокомпонентних систем.

Таким чином, фінансові аномалії є важливим об’єктом системного аналізу, оскільки вони відображають глибинні структурні та поведінкові процеси, що відбуваються у фінансових мережах. Їх дослідження створює теоретичне підґрунтя для розроблення сучасних методів моніторингу ризиків, зокрема спектральних і графових підходів, які дозволяють виявляти приховані режими нестабільності та аномальні стани фінансових ринків.

1.2 Математичне моделювання фінансових мереж

Сучасні фінансові ринки характеризуються високим рівнем складності, динамічності та взаємозалежності між їх елементами, що зумовлює необхідність використання формалізованих математичних моделей для аналізу їх функціонування. Традиційні економетричні підходи, орієнтовані на ізольований аналіз окремих фінансових інструментів, не завжди дозволяють адекватно описати колективну поведінку ринкових агентів та системні ефекти, зокрема поширення фінансових шоків і формування аномальних режимів. У зв’язку з цим дедалі більшого поширення набуває математичне моделювання фінансових систем у вигляді мереж.

Фінансова мережа розглядається як сукупність взаємопов'язаних елементів, де вузлами є фінансові інструменти, інститути або економічні агенти, а ребра відображають різні типи взаємодій між ними: кореляційні залежності, грошові потоки, кредитні зобов'язання або інформаційні зв'язки. Такий підхід дозволяє представити фінансовий ринок як складну систему з багаторівневою структурою, властивості якої визначаються не лише характеристиками окремих елементів, а й топологією зв'язків між ними. Подібну топологію ми можемо побачити на рисунку 1.2.

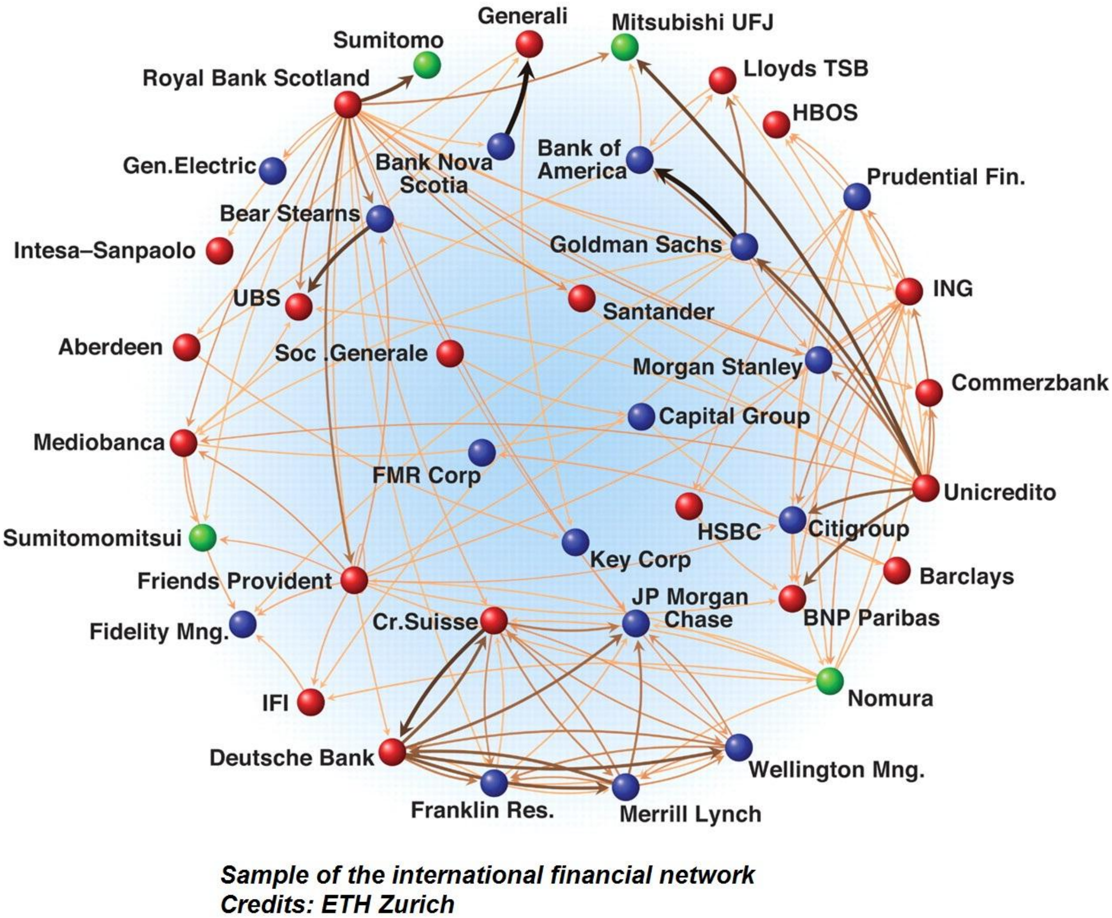

Рисунок 1.2 – Спрямований граф, що відображає грошовий обіг між банками, які формують валютний ринок

У межах економіко-математичного підходу мережеві моделі належать до класу системних моделей, що використовуються для аналізу складних процесів із великою кількістю взаємозалежних параметрів. Як зазначається в працях з математичного моделювання економічних систем, такі моделі дозволяють формалізувати процеси розподілу ресурсів, взаємодії суб'єктів господарювання та прийняття управлінських рішень на основі кількісних критеріїв оптимальності.

Побудова математичної моделі фінансової мережі передбачає визначення структури графа, набору змінних та параметрів, а також правил взаємодії між елементами системи. Найчастіше використовується апарат теорії графів, у межах якого фінансова система описується орієнтованим або неорієнтованим графом. Вибір типу графа залежить від характеру досліджуваних зв'язків: симетричні залежності, такі як кореляція між активами, подаються неорієнтованими ребрами, тоді як причинно-наслідкові або потокові взаємодії моделюються орієнтованими структурами.

Особливістю мережевого підходу є можливість аналізу як локальних, так і глобальних властивостей фінансової системи. До локальних характеристик належать показники окремих вузлів і ребер, тоді як глобальні властивості відображають загальну стійкість та структурну цілісність мережі. У працях з мережевого економіко-математичного моделювання підкреслюється, що зміни в структурі мережі можуть істотно впливати на ефективність функціонування системи в цілому, а також на її здатність протистояти зовнішнім збуренням.

Застосування мережевих моделей у фінансовому аналізі дозволяє формалізувати процеси оптимізації, планування та оцінювання ризиків. Аналогічно до мережевого моделювання інвестиційних процесів, де кожен етап представлено у вигляді взаємопов'язаних блоків робіт, фінансові мережі можуть використовуватися для аналізу динаміки ринкових процесів, виявлення критичних вузлів та потенційних точок нестабільності системи.

Таким чином, математичне моделювання фінансових мереж є ефективним інструментом дослідження складних фінансово-економічних систем. Воно забезпечує можливість інтегрованого аналізу взаємозв'язків між елементами ринку, створює основу для кількісного оцінювання системних ризиків і формує теоретичне підґрунтя для подальшого використання спектральних та графових методів у задачах виявлення фінансових аномалій.

1.3 Графові структури та спектральні методи аналізу

Фінансові системи характеризуються високим рівнем взаємозалежності між їх елементами, що робить доцільним використання графових моделей для їх формалізованого опису. У межах такого підходу фінансовий ринок подається у вигляді мережі, де вершини відповідають фінансовим активам або економічним агентам, а ребра – взаємозв'язкам між ними, зокрема кореляційним залежностям. Це дозволяє перейти від аналізу окремих часових рядів до дослідження глобальної структури ринку.

Графові моделі широко застосовуються для аналізу складних систем, оскільки їх властивості визначаються не лише характеристиками окремих вузлів, а й топологією всієї мережі. У фінансовому аналізі це дає змогу досліджувати поширення ризиків, кластеризацію активів та системні ефекти, які не виявляються при локальному аналізі.

Ключовим інструментом дослідження графових моделей є спектральні методи, що ґрунтуються на аналізі спектра операторів, асоційованих із графом, зокрема матриці суміжності та оператора Лапласа. Спектр цих операторів – множина власних значень – відображає фундаментальні топологічні властивості мережі, такі як зв'язність, наявність кластерів та характер поширення збурень.

Особливе значення має оператор Лапласа графа, який є дискретним аналогом класичного оператора Лапласа. Його спектральні характеристики чутливі до змін топології графа, що дозволяє використовувати їх для аналізу структурної динаміки фінансових мереж. Низькочастотна частина спектра пов'язана з глобальною узгодженою поведінкою активів, тоді як високочастотні компоненти відображають локальні флуктуації та менш значущі зв'язки.

Таким чином, поєднання графових структур і спектральних методів аналізу створює ефективну математичну основу для дослідження фінансових систем, забезпечуючи перехід від локальних статистичних залежностей до глобального аналізу структури ринку та передумов виникнення системних ризиків.

1.4 Оператор Лапласа-Бельтрамі та його дискретизація на графах

Оператор Лапласа-Бельтрамі є узагальненням класичного оператора Лапласа на риманових многовидах і визначається геометрією простору. У спектральній геометрії він відіграє ключову роль, оскільки його спектр відображає глобальні геометричні та топологічні властивості об’єкта.

Для гладкого компактного риманового многовида оператор Лапласа-Бельтрамі є самоспряженим і має дискретний спектр невід’ємних власних значень. Власні функції оператора утворюють ортонормований базис, що дозволяє використовувати спектральний розклад для аналізу складних систем.

У прикладних задачах, зокрема при аналізі фінансових мереж, безпосереднє використання неперервного оператора є неможливим через дискретну природу даних. Тому застосовується дискретизація оператора Лапласа-Бельтрамі на графах, у результаті чого будується графовий лапласіан, який зберігає основні властивості неперервного аналога.

Дискретний оператор Лапласа визначається через різницю значень функції у вершині та її сусідах і є аналогом оператора другої похідної. Його спектральні характеристики визначають динаміку процесів на мережі, зокрема дифузію та поширення збурень, що має принципове значення для аналізу фінансових взаємозалежностей і системних ризиків.

Таким чином, оператор Лапласа-Бельтрамі та його дискретизація на графах формують теоретичну основу спектрального аналізу фінансових мереж і слугують базою для розроблення методів виявлення аномальних та кризових режимів у фінансових системах.

1.5 Змістовна та формальна постановка задачі

Сучасні фінансові ринки є складними системами, у яких велика кількість фінансових інструментів постійно взаємодіє між собою. Зміни цін одного активу часто пов’язані зі змінами інших, утворюючи складну мережу взаємозалежностей. У звичайних умовах ця мережа є відносно стабільною, однак у періоди нестабільності або перед кризами її структура може різко змінюватися.

Щоб інтуїтивно зрозуміти цю ідею, можна уявити фінансовий ринок як поверхню або павутину, де кожна точка – це окремий фінансовий актив, а нитки між ними – зв’язки, що відображають схожість їх поведінки. Якщо всі активи рухаються узгоджено, павутина натягнута рівномірно. Якщо ж з’являються зони напруження або розривів, це може сигналізувати про проблеми в системі. На рисунку 1.3 зображено фінансовий граф у вигляді павутини.

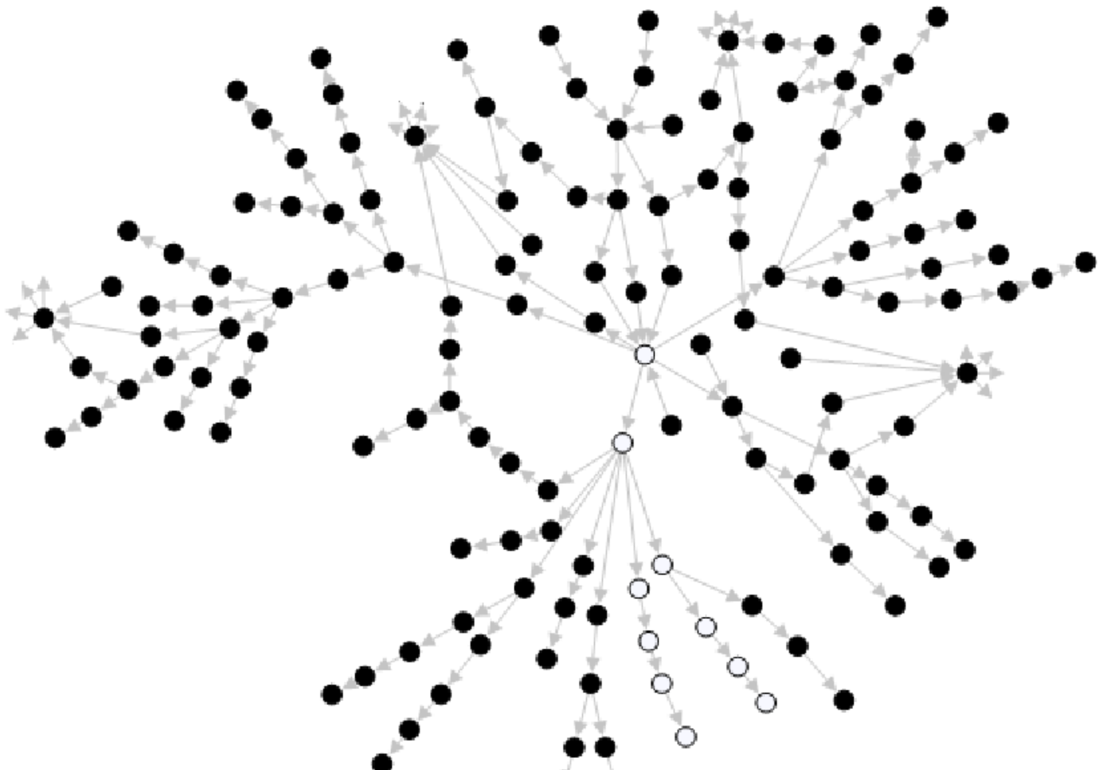

Рисунок 1.3 – Орієнтований граф взаємозв’язків фінансових активів

У математиці для аналізу таких поверхонь і структур використовується оператор Лапласа-Бельтрамі. У фізиці він описує, наприклад, поширення тепла або хвиль на вигнутих поверхнях. Інтуїтивно цей оператор показує, наскільки значення в певній точці відрізняється від середнього значення навколо неї. Якщо різниця велика – у цій точці відбувається щось нетипове.

У фінансовому контексті це означає таке: якщо поведінка окремого активу або групи активів починає суттєво відрізнятися від загальної ринкової картини, це може бути ознакою аномального режиму або передкризового стану.

Оскільки реальні фінансові дані є дискретними (ми маємо окремі активи та часові спостереження), безперервну поверхню замінюють графом. У такому графі:

– вершини відповідають фінансовим активам;

– ребра відображають силу взаємозв'язку між ними (наприклад, кореляцію доходностей);

– вага ребра показує, наскільки тісно пов'язані два активи.

Таким чином, фінансовий ринок перетворюється на дискретну геометричну структуру, на якій можна застосовувати аналог оператора Лапласа–Бельтрамі. Дія цього оператора дозволяє виявляти ділянки, де структура ринку змінюється найбільш інтенсивно. Приклад дії анізотропного оператора Лапласа–Бельтрамі на поверхні зображено на рисунку 1.4.

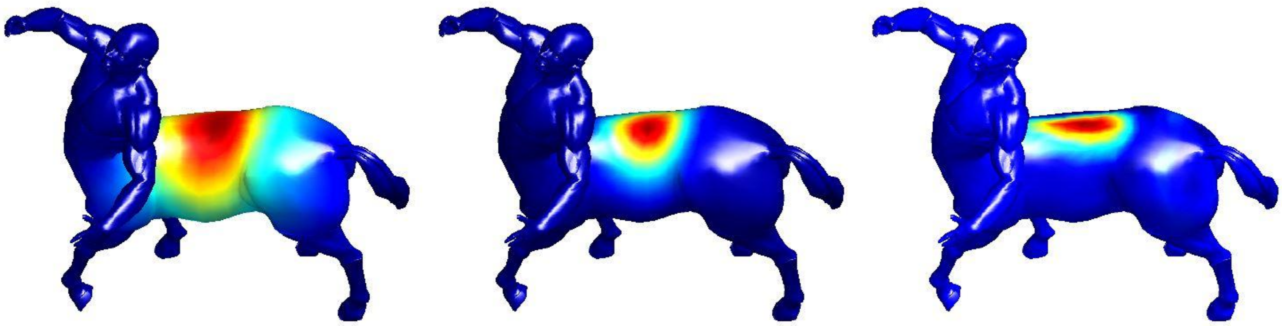

Рисунок 1.4 – Приклад дії анізотропного оператора Лапласа-Бельтрамі на поверхні

Змістовно задача полягає у тому, щоб перетворити фінансовий ринок на граф, побудувати для нього дискретний аналог оператора Лапласа-Бельтрамі та використати його властивості для виявлення аномальних станів, які можуть відповідати зростанню системного ризику або переходу ринку в нестабільний режим.

Нехай задано множину фінансових активів:

$$V = \{v_1, v_2, ..., v_n\},$$

для яких за часовими рядами доходностей у фіксованому часовому вікні побудовано зважений неорієнтований граф:

$$G = (V, E, W),$$

де $W = [w_{ij}]$ – матриця ваг, що відображає силу кореляційного зв’язку між активами v_i та v_j.

Визначимо:

– матрицю суміжності $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = w_{ij}$;

– діагональну матрицю ступенів:

$$D_{ij} = \sum_j a_{ij} .$$

Дискретний оператор Лапласа-Бельтрамі (графовий лапласіан) задається у вигляді:

$$L = D - A,$$

або у нормованій формі:

$$L_{norm} = I - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}.$$

Потрібно зробити наступне:

– побудувати оператор Лапласа-Бельтрамі L для графа фінансових взаємозалежностей;

– обчислити його спектральні характеристики (власні значення та власні вектори);

– проаналізувати зміни спектра у часі;

– виявити моменти часу, у яких відбуваються суттєві відхилення спектральних характеристик від типових значень.

Такі відхилення інтерпретуються як фінансові аномалії, що відповідають структурним змінам у графі та можуть свідчити про зростання системного ризику або перехід фінансового ринку в нестабільний режим.

1.6 Постановка задач дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є розроблення та дослідження математичних моделей і методів виявлення фінансових аномалій на основі спектральних властивостей операторів Лапласа-Бельтрамі, дискретизованих на графових структурах фінансових даних. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– аналіз існуючих підходів до виявлення фінансових ризиків і аномалій;

– дослідження графових моделей представлення фінансових даних;

– вивчення спектральних властивостей оператора Лапласа-Бельтрамі та методів його дискретизації на графах;

– розроблення методів аналізу фінансових аномалій на основі спектральних характеристик графових структур;

– експериментальна апробація запропонованих підходів на фінансових даних.

2 ВИБІР І ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗАННЯ

2.1 Математична модель графу кореляцій між активами

У межах роботи фінансова система розглядається як динамічна мережа взаємопов’язаних активів, де інтенсивність зв’язку між двома активами визначається статистичною подібністю їхніх дохідностей у ковзному часовому вікні. Такий підхід узгоджується з концепцією моделювання ринку у вигляді графа, де вершини – фінансові інструменти, а ребра – міра взаємозв’язку (кореляції) між ними.

Нехай задано множину активів:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Для кожного активу a_i відомий часовий ряд цін закриття $P_i(t)$, який у системі зберігається в таблиці prices (поля: asset_id, ts, close).

Аналіз здійснюється не на всьому інтервалі одразу, а у ковзному кореляційному вікні $[t-\Delta, t]$. В БД кожне таке вікно описується таблицею corr_windows, де фіксуються початок та кінець інтервалу (win_start, win_end), а також параметр розрідження графа k_neighbors.

Практично це відповідає робочому сценарію CMRM: спочатку формується вікно, далі для нього обчислюються кореляції та зберігаються у corr_entries.

Оскільки абсолютні значення цін можуть бути незіставними між різними активами, модель використовує ряд дохідностей (або лог-доходностей). У базовому варіанті застосовується стандартне відносне прирощення:

$$r_i(t) = \frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)}, \quad i = 1, ..., n.$$

Отже, для кожного активу a_i у межах вікна $\left[t-\Delta, t\right]$ отримується вектор дохідностей:

$$r_i^t = (r_i(t-\Delta+1), \ldots, r_i(t)).$$

Для кожної пари активів $\left(a_i, a_j\right)$ у вибраному вікні обчислюється коефіцієнт кореляції Пірсона:

$$\rho_{ij}(t) = corr\left(r_i^t, r_j^t\right),\ i, j = 1, \ldots, n.$$

У матричному вигляді формується кореляційна матриця:

$$R(t) = \left[\rho_{ij}(t)\right]_{i,j=1}^{n},$$

яка є симетричною та має $\rho_{ij}(t) = 1$.

Саме ця матриця відображає топологію фінансового ринку в межах поточного вікна: великі додатні значення означають синхронну поведінку активів, від'ємні – протилежну.

У реалізації CMRM обчислені значення кореляцій для конкретного вікна зберігаються в таблиці corr_entries у полях corr (кореляція) та w (вага ребра). Первинний ключ включає window_id, i_asset, j_asset, що відповідає зберіганню зв'язків для кожного вікна та кожної пари активів.

Після обчислення $R(t)$ вводиться зважений граф кореляцій (рис. 2.1):

$$G_t = \left(V, E, W_t\right),$$

де $V = A$ – множина вершин (активів);

E – множина ребер між активами;

$W_t = [w_{ij}(t)]$ – матриця ваг ребер.

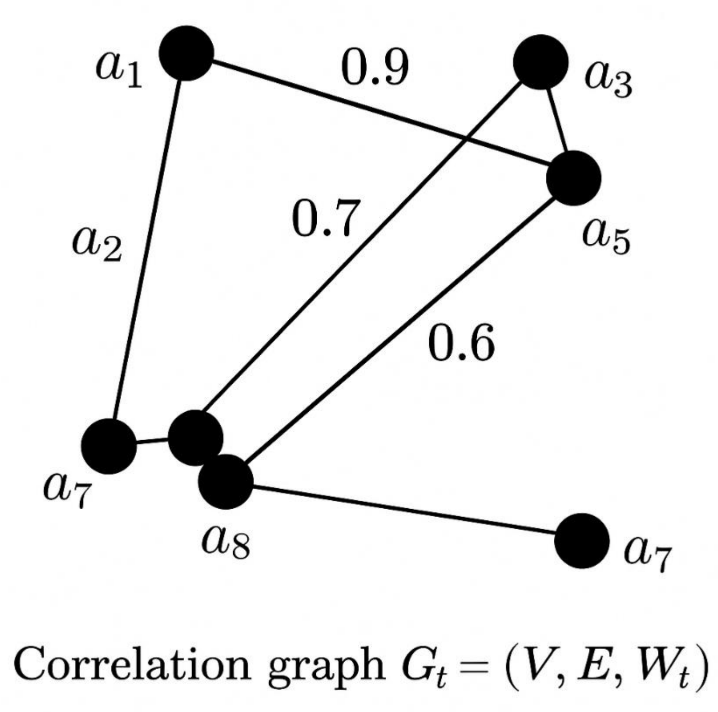

Рисунок 2.1 – Зважений граф кореляцій між фінансовими активами

Ключова частина моделі – визначення ваг $w_{ij}(t)$ як функції від кореляції. У роботі використовується монотонне перетворення, яке переводить кореляцію у невід'ємну вагу зв'язку:

$$w_{ij}(t) = e^{-\alpha(1-\rho_{ij}(t))},\ \alpha > 0.$$

Таке перетворення є зручним тим, що:

– при $\rho_{ij}(t) \to 1$ маємо $w_{ij}(t) \to 1$ (дуже сильний зв'язок);

– при менших кореляціях вага зменшується експоненційно, підкреслюючи віддаленість активів у графовому сенсі.

Подібна логіка перетворення кореляцій у ваги прямо відповідає опису математичної моделі графової фінансової системи в предметній області: вузли –

інструменти, ребра – сила взаємозв’язку (кореляція), далі – побудова зваженого графа та спектральний аналіз.

На практиці повний граф K_n (ребро між кожною парою активів) може бути надто щільним і зашумленим, особливо при великій кількості активів. Тому в системі передбачений параметр k_neighbors, що зберігається в corr_windows і визначає правило розрідження: для кожної вершини залишаються лише k найбільш сильних зв’язків за $\rho_{ij}(t)$ або $w_{ij}(t)$.

Формально це можна описати так, що для кожної вершини i визначається множина найближчих сусідів:

$$N_k(i,t) = \underset{S \subset (1,\dots,n)}{\arg\max}{}^{i} \underset{|S|=k}{} \sum_{j \in S} w_{ij}(t),$$

де ребра залишаються лише для $j \in N_k(i,t)$.

Це дає змогу:

– зменшити обчислювальну складність подальших кроків;

– зробити структуру графа більш інтерпретованою;

– підсилити відображення локальних кластерів ринку.

Факт наявності такого етапу в логіці CMRM підтверджується описом роботи додатку: кожне кореляційне вікно містить параметр k-neighbors для побудови графу, після чого система рахує кореляції та ваги і записує їх у corr_entries.

Математична модель напряму відображена у структурі БД CMRM:

– множина активів V – таблиця assets (ідентифікатор та тикер активу);

– часові ряди цін $P_i(t)$ – таблиця prices;

– ковзні вікна $[t-\Delta, t]$ – таблиця corr_windows з win_start, win_end, k_neighbors;

– кореляції $\rho_{ij}(t)$ та ваги $w_{ij}(t)$ – таблиця corr_entries (поля corr, w) із прив’язкою до window_id.

Таким чином, модель є не лише теоретичною, а й реалізованою на рівні даних: для кожного вікна формується власна мережа G_t, яка зберігається та може бути використана для подальших етапів (спектральні метрики, алерти, візуалізація), що узгоджується з загальною методикою системи.

Отже, математична модель графа кореляцій у момент часу (або для вікна) t задається такими кроками:

– вхід: $\{P_i(\tau)\}_{\tau=t-\Delta}^{t}$ для $i=1,\ldots,n$;

– обчислення дохідностей $r_i(\tau)$.

– обчислення кореляцій $\rho_{ij}(t) \to$ матриця $R(t)$;

– перетворення у ваги $w_{ij}(t) \to$ матриця W_t;

– опційно: розрідження за правилом k-neighbors.

Результат: зважений граф $G_t(V,E,W_t)$, що відображає структуру взаємозалежностей між активами.

Саме цей граф є базовим об’єктом для наступного підрозділу, де розглядаються спектральні характеристики оператора Лапласа-Бельтрамі та критерії виявлення аномалій за динамікою метрик $\lambda_2(t)$, spectral gap, entropy, subspace distance.

2.2 Обчислення спектральних характеристик фінансового графа

Побудований у попередньому підрозділі зважений граф кореляцій

$$G_t(V,E,W_t)$$

є основним об’єктом подальшого аналізу.

Однак сам по собі граф у момент часу t не дозволяє безпосередньо робити висновки щодо стабільності або аномальності фінансової системи. Для цього необхідно дослідити його спектральні властивості, які відображають глобальну структуру взаємозв'язків між активами.

Ключову роль у спектральному аналізі відіграє нормований оператор Лапласа-Бельтрамі, побудований на графі G_t:

$$L_t = I - D_t^{-\frac{1}{2}} W_t D_t^{-\frac{1}{2}},$$

де W_t – матриця ваг ребер;

D_t – діагональна матриця ступенів вершин.

Оператор L_t є симетричним та додатно напівозначеним, що гарантує дійсність його спектра та ортогональність власних векторів.

Спектр оператора має вигляд:

$$0 = \lambda_1(t) \le \lambda_2(t) \le \ldots \le \lambda_n(t),$$

де $\lambda_1(t) = 0$ відповідає тривіальній власній функції для зв'язного графа.

У даній роботі для виявлення фінансових аномалій використовуються чотири ключові спектральні характеристики:

– друге власне значення $\lambda_2(t)$;

– спектральна щілина (spectral gap);

– спектральна ентропія;

– відстань між спектральними підпросторами (subspace distance).

Друге власне значення лапласіана $\lambda_2(t)$, відоме також як алгебраїчна зв'язність графа або значення Фідлера, є однією з найважливіших спектральних характеристик.

З математичної точки зору:

– $\lambda_2(t) > 0 \Leftrightarrow$ граф є зв'язним;

– чим більше $\lambda_2(t)$, тим більш щільно інтегрована структура графа.

У фінансовій інтерпретації:

– великі значення $\lambda_2(t)$ відповідають високій синхронізації активів, що часто спостерігається в умовах системного ризику;

– зменшення $\lambda_2(t)$ може свідчити про фрагментацію ринку, появу ізольованих кластерів або зміну режиму кореляцій.

Таким чином, різка динаміка $\lambda_2(t)$ у часі є важливим маркером нестандартної поведінки фінансової системи та використовується як базовий індикатор аномалій.

Спектральна щілина визначається як різниця між двома сусідніми власними значеннями лапласіана.

Найчастіше використовується перший спектральний розрив:

$$gap(t) = \lambda_3(t) - \lambda_2(t).$$

З точки зору теорії графів спектральна щілина характеризує стійкість глобальної структури мережі:

– велике значення gap означає чітко виражену глобальну структуру;

– мале значення gap вказує на наявність декількох конкурентних кластерів.

У фінансовому контексті це означає, що:

– зменшення spectral gap часто передує перерозподілу капіталу між секторами;

– різкі коливання щілини можуть сигналізувати про перехід ринку між режимами (regime shift).

Таким чином, spectral gap доповнює інформацію, яку дає $\lambda_2(t)$, і дозволяє оцінити глибину структурних змін.

Для кількісної оцінки впорядкованості або хаотичності структури графа вводиться спектральна ентропія. Вона базується на нормованому спектрі лапласіана:

$$p_i(t) = \frac{\lambda_i(t)}{\sum_{j=1} \lambda_j(t)},$$

та визначається за формулою Шеннона:

$$H(t) = -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \log p_i(t).$$

Інтерпретація цієї величини:

– висока ентропія означає рівномірний розподіл спектра, тобто відсутність домінуючої структури;

– низька ентропія вказує на структурну концентрацію, наприклад, домінування кількох кластерів.

У фінансових системах це дозволяє:

– виявляти періоди надмірної синхронізації активів;

– фіксувати зниження різноманіття кореляцій, що часто передує кризовим явищам.

Окремі спектральні показники не завжди здатні повністю зафіксувати зміну структури графа.

Тому додатково використовується субпросторова відстань між власними підпросторами лапласіана у двох послідовних часових вікнах.

Нехай $U_k(t)$ – матриця, стовпці якої є першими k власними векторами оператора L_t. Тоді відстань між підпросторами визначається, наприклад, як:

$$d(t) = \left\| U_k(t) U_k(t)^{\mathrm{T}} - U_k(t-1) U_k(t-1)^{\mathrm{T}} \right\|_F,$$

де $\|\ldots\|_F$ – норма Фробеніуса.

Ця метрика:

– фіксує повороти спектральних підпросторів, навіть якщо власні значення змінюються незначно;

– є чутливою до швидких структурних зрушень.

У фінансовому аналізі subspace distance дозволяє виявляти раптові переходи між режимами ринку, які не завжди помітні на рівні окремих активів або кореляцій.

У межах даної роботи виявлення фінансових аномалій ґрунтується на комбінованому аналізі спектральних характеристик:

$$\lambda_2(t),\ gap(t),\ H(t),\ d(t).$$

Аномальний стан фіксується у разі перевищення порогових значень:

$$\begin{cases} |\lambda_2(t) - \lambda_2(t-1)| > \delta_1, \\ |H(t) - H(t-1)| > \delta_2, \\ d(t) > \delta_3. \end{cases}$$

Такий підхід дозволяє:

– зменшити кількість хибних спрацювань;

– підвищити стійкість до шуму;

– забезпечити раннє виявлення системних ризиків.

Спектральні характеристики оператора Лапласа-Бельтрамі є потужним інструментом аналізу фінансових мереж.

Вони дозволяють перейти від локальних показників до глобального опису структури ринку та її еволюції у часі.

Саме на цій основі у наступному розділі реалізується програмна система CMRM, яка здійснює автоматизований моніторинг спектральних показників та генерацію алертів про потенційні фінансові аномалії.

2.3 Алгоритмічне забезпечення: побудова Лапласа-Бельтрамі оператора на графі

Побудова оператора Лапласа-Бельтрамі на графових структурах фінансових даних є ключовим етапом реалізації запропонованого методу аналізу фінансових аномалій. На відміну від теоретичного формулювання, алгоритмічне забезпечення зосереджене на практичних аспектах реалізації цього оператора з урахуванням обмежень обчислювальних ресурсів, масштабованості та стійкості до шуму у фінансових даних.

Основною метою алгоритмічного етапу є побудова коректного, чисельно стійкого та обчислювально ефективного представлення лапласіана для кожного часово́го вікна фінансових даних, що дозволяє надалі здійснювати спектральний аналіз і моніторинг змін структури фінансової мережі.

Алгоритмічна побудова Лапласа-Бельтрамі оператора виконується для кожного сформованого зваженого графа кореляцій. Вхідними даними на цьому етапі є матриця ваг ребер графа, що вже відображає структуру взаємозв’язків між активами у відповідному часовому вікні. Подальші кроки алгоритму не залежать від способу отримання ваг і можуть бути застосовані до будь-якого зваженого неорієнтованого графа.

Алгоритм побудови лапласіана включає такі основні етапи (рис. 2.2):

– обчислення ступенів вершин графа;

– формування діагональної матриці ступенів;

– нормалізація матриці ваг;

– побудова нормованого оператора Лапласа-Бельтрамі.

Такий поділ дозволяє модульно реалізувати алгоритм і забезпечує його гнучкість у разі зміни параметрів або структури графа.

На практиці побудова лапласіана починається з обчислення ступенів вершин, що визначають локальну важливість кожного активу в межах фінансової мережі. Для зваженого графа ступінь вершини визначається як сумарна вага всіх інцидентних ребер. Отримані значення формують діагональну матрицю ступенів, яка відіграє ключову роль у нормалізації графа.

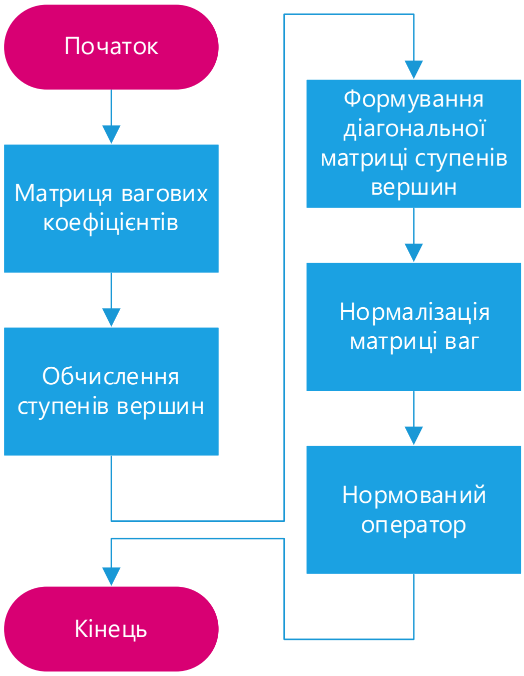

Рисунок 2.2 – Блок-схема алгоритму побудови оператора Лапласа-Бельтрамі на графі

Нормалізація є принципово важливою для фінансових застосувань, оскільки дозволяє усунути вплив різної щільності зв'язків між активами та зробити спектральні характеристики порівнюваними між різними часовими вікнами. З алгоритмічної точки зору нормалізація реалізується через масштабування матриці ваг із використанням обернених квадратних коренів ступенів вершин, що забезпечує симетричність і чисельну стійкість оператора.

Після виконання нормалізації формується нормований оператор Лапласа-Бельтрамі, який використовується як основний об'єкт спектрального аналізу. З алгоритмічної точки зору цей оператор реалізується у вигляді симетричної матриці, що має низку важливих властивостей:

– додатна напівозначеність;

– обмеженість спектра;

– ортогональність власних векторів.

Ці властивості гарантують коректність подальших обчислень спектральних характеристик і дозволяють застосовувати стандартні чисельні методи лінійної алгебри для знаходження власних значень і власних векторів.

Особливу увагу в алгоритмічній реалізації приділено збереженню симетрії оператора та уникненню накопичення чисельних похибок, що є критичним при роботі з великими графами фінансових активів.

З огляду на те, що кількість фінансових активів може бути значною, алгоритмічне забезпечення повинно враховувати питання обчислювальної складності. Побудова лапласіана для одного часового вікна має квадратичну складність від кількості вершин у разі повного графа. Тому важливим елементом алгоритму є використання розріджених структур даних, які дозволяють зменшити обсяг пам’яті та прискорити обчислення.

Крім того, у практичній реалізації доцільним є:

– використання розріджених матриць для зберігання ваг і лапласіана;

– обмеження спектрального аналізу лише кількома найменшими власними значеннями;

– кешування проміжних результатів для послідовних часових вікон.

Такі підходи забезпечують можливість застосування алгоритму в режимі майже реального часу для задач фінансового моніторингу.

Побудований оператор Лапласа-Бельтрамі є проміжною, але критично важливою ланкою між графовим представленням фінансових даних і процедурою виявлення аномалій. В алгоритмічному ланцюжку системи аналізу він виконує роль стандартного математичного інтерфейсу, через який графова структура перетворюється у спектральні характеристики.

Алгоритмічна реалізація лапласіана забезпечує:

– уніфіковане представлення фінансових мереж незалежно від їх розміру;

– стабільність спектральних показників у часі;

– можливість автоматизованого моніторингу структурних змін.

Саме завдяки цьому етапу стає можливим практичне застосування теоретичних положень спектральної геометрії для аналізу фінансових аномалій у реальних даних.

Висновки за розділом 2

У другому розділі кваліфікаційної роботи було здійснено вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі виявлення фінансових аномалій на основі графових і спектральних підходів. Запропонований метод ґрунтується на представленні фінансової системи у вигляді динамічної мережі взаємопов'язаних активів, що дозволяє перейти від аналізу окремих часових рядів до дослідження глобальної структури фінансового ринку.

Розроблено математичну модель графа кореляцій між фінансовими активами, в якій вузлами є активи, а ребрами – міра статистичної залежності між їхніми дохідностями у ковзному часовому вікні. Обґрунтовано доцільність використання кореляційних коефіцієнтів як бази для побудови зваженого графа, а також введено монотонне перетворення кореляцій у невід'ємні ваги ребер, що забезпечує коректну геометричну інтерпретацію структури ринку. Запропонований механізм розрідження графа на основі параметра k-neighbors дозволяє зменшити обчислювальну складність та підвищити інтерпретованість отриманих мереж.

Досліджено спектральні характеристики нормованого оператора Лапласа-Бельтрамі, побудованого на графі фінансових взаємозалежностей. Показано, що спектр цього оператора містить важливу інформацію про глобальні топологічні властивості фінансової мережі та її еволюцію у часі. Обґрунтовано використання таких ключових індикаторів, як друге власне значення $\lambda_2(t)$, спектральна щілина, спектральна ентропія та відстань між спектральними підпросторами, як чутливих маркерів структурних змін і потенційних аномальних режимів функціонування фінансової системи. Запропоновано комбінований підхід до виявлення аномалій, що базується на одночасному аналізі кількох спектральних показників, що підвищує надійність діагностики та зменшує ймовірність хибних спрацювань.

Розглянуто алгоритмічне забезпечення побудови оператора Лапласа-Бельтрамі на графах фінансових даних. Описано послідовність алгоритмічних кроків, що включає обчислення матриці ступенів, нормалізацію ваг і формування нормованого лапласіана. Проаналізовано обчислювальну складність алгоритму та запропоновано підходи до оптимізації, зокрема використання розріджених матриць і обмеження спектрального аналізу частиною спектра. Показано, що запропонований алгоритм є чисельно стійким і придатним для практичної реалізації в системах моніторингу фінансових ринків.

Таким чином, у другому розділі сформовано цілісну математичну та алгоритмічну основу для спектрального аналізу фінансових мереж. Запропонований підхід забезпечує формальний зв’язок між фінансовими часовими рядами, графовими структурами та спектральними характеристиками оператора Лапласа–Бельтрамі. Отримані результати створюють теоретичне та методичне підґрунтя для подальшої програмної реалізації системи Correlation Manifold Regime Monitor (CMRM) та експериментального дослідження ефективності розроблених методів, що здійснюється у наступному розділі кваліфікаційної роботи.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ CMRM

3.1 Архітектура веб-додатку Correlation Manifold Regime Monitor

Система Correlation Manifold Regime Monitor (CMRM) реалізована як багаторівневий веб-додаток аналітичного типу, призначений для моніторингу фінансових ринків на основі графових та спектральних методів аналізу. Архітектура системи побудована за принципом логічного розділення функціональних компонентів, що забезпечує масштабованість, гнучкість налаштування та зручність подальшого розвитку.

Загальна архітектура CMRM складається з трьох основних рівнів: рівня даних, обчислювального рівня та веб-рівня представлення.

Рівень даних реалізований на основі реляційної бази даних MySQL і виконує функцію централізованого сховища як вхідної фінансової інформації, так і результатів аналітичної обробки. Такий підхід забезпечує відтворюваність експериментів та накопичення історії розрахунків.

База даних CMRM логічно поділяється на кілька функціональних груп таблиць:

– таблиця assets зберігає перелік фінансових активів, що беруть участь в аналізі (ідентифікатор, тикер, додаткові атрибути);

– таблиця prices містить часові ряди цін активів і є джерелом первинних даних для формування ковзних кореляційних вікон;

– таблиця corr_windows описує параметри ковзних часових вікон (початок, кінець, параметр розрідження графа);

– таблиця corr_entries зберігає попарні кореляції між активами та відповідні ваги ребер графа;

– таблиця spectral_metrics акумулює результати спектрального аналізу для кожного вікна;

– таблиця alerts призначена для збереження згенерованих системою повідомлень про аномальні режими.

Така структура дозволяє чітко розмежувати етапи обробки даних та спростити доступ до результатів аналізу з боку веб-інтерфейсу.

Обчислювальний рівень реалізований мовою Python і є ядром системи CMRM. Саме на цьому рівні виконуються всі математично складні операції, пов'язані з аналізом фінансових даних та побудовою графових моделей.

Основні функції обчислювального модуля включають:

– формування векторів дохідностей на основі часових рядів цін;

– побудову кореляційних матриць у межах ковзних вікон;

– перетворення кореляцій у зважені графи фінансових взаємозв'язків;

– побудову нормованого оператора Лапласа-Бельтрамі;

– обчислення спектральних характеристик графа;

– аналіз динаміки спектральних показників у часі;

– генерацію сигналів про аномальні режими.

Для реалізації цих задач використовуються бібліотеки SciPy (чисельні обчислення, лінійна алгебра) та NetworkX (робота з графами). Результати кожного етапу зберігаються у відповідних таблицях бази даних, що дозволяє ізолювати обчислення від візуалізації.

Веб-рівень реалізований мовою PHP та виконує функцію інтерфейсу взаємодії користувача із системою. Він забезпечує доступ до результатів аналізу без необхідності прямої роботи з обчислювальним кодом.

Основні функції веб-рівня:

– перегляд списку активів та часових вікон;

– відображення кореляційних структур і спектральних метрик;

– візуалізація динаміки ключових показників;

– перегляд активних та архівних алертів;

– адміністративне керування параметрами аналізу.

Веб-рівень взаємодіє виключно з базою даних, що забезпечує слабку зв'язаність компонентів системи та підвищує її надійність.

Узагальнена схема роботи CMRM має такий вигляд: дані $\rightarrow$ обчислення $\rightarrow$ збереження $\rightarrow$ візуалізація.

Первинні фінансові дані зберігаються в базі даних, після чого обчислювальний модуль Python періодично або за запитом виконує повний цикл аналізу. Результати обробки записуються у базу даних і стають доступними для перегляду через веб-інтерфейс. Така архітектура дозволяє незалежно масштабувати обчислювальний та користувацький рівні.

Запропонована архітектура веб-додатку CMRM має низку переваг:

– чітке розділення відповідальності між компонентами;

– можливість розширення функціоналу без зміни базової структури;

– зручність інтеграції з іншими інформаційно-аналітичними системами;

– придатність як для наукових досліджень, так і для прикладних задач фінансового моніторингу.

Таким чином, архітектура CMRM забезпечує надійну основу для реалізації спектральних методів аналізу фінансових аномалій та відповідає сучасним вимогам до інформаційно-аналітичних систем.

3.2 Вибір програмних засобів

Реалізація методів спектрального аналізу фінансових мереж потребує програмного середовища, яке одночасно забезпечує: коректні та швидкі чисельні обчислення, зручну роботу з графовими структурами, надійне збереження результатів, веб-інтерфейс для перегляду метрик і алертів.

З огляду на ці вимоги у роботі обрано стек Python + SciPy + NetworkX для обчислювального ядра, PHP для веб-рівня та MySQL для зберігання даних і результатів аналізу (рис. 3.1).

Python обрано як основну мову обчислювального модуля з таких причин:

– наявність зрілої екосистеми наукових бібліотек для лінійної алгебри, статистики, оптимізації та обробки даних;

– зручність реалізації дослідницьких прототипів і швидкого експериментування з параметрами моделі (розмір вікна, правила розрідження, пороги алертів тощо);

– можливість масштабування: від офлайн-обробки історичних даних до регулярного батч-аналізу у виробничому режимі.

Рисунок 3.1 – Програмні засоби та бібліотеки, використані для реалізації системи аналізу фінансових аномалій

У контексті кваліфікаційної роботи Python забезпечує швидке та прозоре впровадження спектральних алгоритмів з можливістю подальшого розширення (додавання нових метрик, альтернативних схем нормалізації, варіантів побудови графів).

Бібліотека SciPy є ключовою для реалізації чисельних методів (власні значення/вектори, норми, матричні перетворення). Її використання обґрунтовано тим, що:

– містить перевірені реалізації чисельної лінійної алгебри та методів роботи з (розрідженими) матрицями;

– дозволяє обчислювати лише потрібну частину спектра (наприклад, кілька найменших власних значень), що суттєво знижує обчислювальні витрати;

– підтримує стійкі алгоритми для задач, чутливих до похибок округлення, що важливо при аналізі реальних фінансових даних.

SciPy фактично виконує роль надійного математичного двигуна, який мінімізує ризик помилок, пов’язаних із ручною реалізацією складних чисельних процедур.

NetworkX обрано як бібліотеку для графового рівня, оскільки вона:

– надає зручні структури даних для побудови зважених графів, роботи з вершинами/ребрами та їх атрибутами;

– спрощує реалізацію етапів підготовки графа: фільтрацію, розрідження (k-neighbors), підрахунок ступенів, перевірку зв’язності, отримання матричних представлень графа;

– дозволяє швидко валідувати модель (візуалізація, базові метрики графа), що важливо для дослідницької частини та пояснення результатів.

Крім того, NetworkX добре інтегрується з NumPy/SciPy: граф можна перетворити в матричні форми для подальшого спектрального аналізу.

MySQL використовується як система керування базами даних для зберігання:

– вхідних фінансових даних (часові ряди цін/дохідностей),

– параметрів часових вікон та конфігурації аналізу,

– проміжних результатів (кореляцій, ваг ребер),

– підсумкових спектральних метрик та алертів.

Вибір MySQL обґрунтований такими чинниками:

– надійність і поширеність у веб-середовищі, простота адміністрування;

– підтримка індексів та ефективних запитів, необхідних для вибірок за часовими інтервалами і конкретними активами;

– зручність інтеграції з PHP-вебінтерфейсом та Python-обчислювальним модулем (через стандартні драйвери).

Таким чином, MySQL виступає як централізоване сховище, що забезпечує відтворюваність експериментів і можливість накопичення історії розрахунків по вікнах.

PHP обрано для реалізації веб-рівня (перегляд результатів, аналітичні панелі, адміністрування, керування статусами/налаштуваннями), оскільки:

– забезпечує швидку розробку серверної частини веб-додатку та інтеграцію з MySQL;

– підходить для реалізації ролей користувачів, авторизації, сторінок моніторингу та інтерфейсів керування;

– дозволяє створити практичний інструмент для демонстрації результатів кваліфікаційної роботи (дашборд метрик, лог алертів, перегляд даних по вікнах).

У запропонованій архітектурі PHP відповідає за presentation layer – зручну подачу результатів та взаємодію користувача із системою, тоді як Python виконує обчислювально інтенсивні задачі.

Обраний стек реалізує розподіл відповідальності:

– Python + SciPy + NetworkX: формування графа, побудова лапласіана, спектральні обчислення, формування метрик та правил алертів;

– MySQL: зберігання даних, параметрів, результатів і історії обчислень;

– PHP: веб-інтерфейс моніторингу, перегляд метрик/алертів, адміністрування та звітність.

Таке поєднання забезпечує баланс між науковою складовою (коректні чисельні методи й графовий аналіз) та практичною реалізацією (інформаційна система для спостереження за фінансовими аномаліями).

3.3 Опис бази даних

База даних системи Correlation Manifold Regime Monitor (CMRM) реалізована у вигляді реляційної структури на основі СУБД MySQL і призначена для зберігання як вхідних фінансових даних, так і результатів багатоступеневого графово-спектрального аналізу. Структура бази даних спроєктована таким чином, щоб відобразити логіку роботи системи та забезпечити чіткий поділ між різними етапами обробки даних: від зберігання часових рядів до генерації алертів про аномальні режими (рис. 3.2).

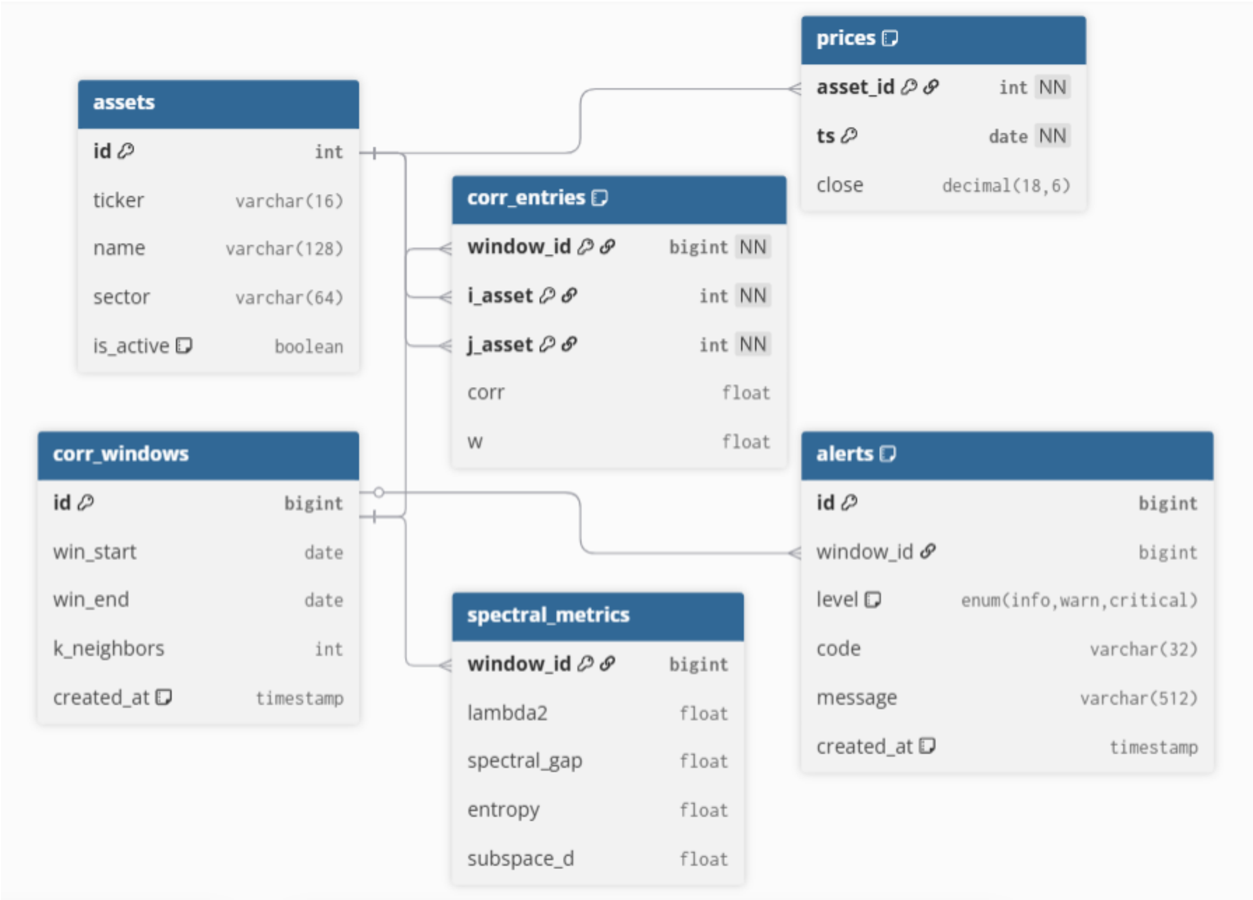

Рисунок 3.2 – ER-діаграма бази даних системи

Correlation Manifold Regime Monitor (CMRM)

Таблиця assets використовується для зберігання довідкової інформації про фінансові активи, що беруть участь в аналізі. Кожен запис у таблиці відповідає окремому активу (акції, індексу, синтетичному інструменту тощо) та ідентифікується унікальним ідентифікатором.

Основні поля таблиці:

– id – первинний ключ, унікальний ідентифікатор активу;

– ticker – символьне позначення активу (наприклад, AAPL, MSFT);

– name – розширена назва активу;

– sector – сектор економіки (за наявності);

– is_active – ознака участі активу в поточному аналізі.

Таблиця assets виконує роль базового довідника і використовується як точка прив'язки для всіх інших таблиць бази даних.

Таблиця prices призначена для зберігання часових рядів цін фінансових активів. Вона містить первинні дані, які використовуються для розрахунку дохідностей і подальшого формування кореляційних структур.

Основні поля таблиці:

– asset_id – зовнішній ключ, що посилається на таблицю assets;

– ts – дата спостереження;

– close – значення ціни закриття активу на відповідну дату.

Первинний ключ утворений комбінацією полів asset_id та ts, що забезпечує унікальність записів для кожного активу у кожен момент часу. Така структура дозволяє ефективно виконувати вибірки за часовими інтервалами, необхідні для побудови ковзних кореляційних вікон.

Таблиця corr_entries використовується для зберігання результатів розрахунку попарних кореляцій між активами у межах конкретного часово́го вікна. Фактично ця таблиця відображає зважений граф фінансових взаємозв'язків.

Основні поля таблиці:

– window_id – ідентифікатор кореляційного вікна;

– i_asset, j_asset – ідентифікатори пари активів;

– corr – значення коефіцієнта кореляції між активами;

– w – вага ребра графа, отримана в результаті перетворення кореляції.

Первинний ключ таблиці складається з трьох полів (window_id, i_asset, j_asset), що забезпечує унікальність кожного ребра графа в межах одного вікна. Таблиця corr_entries є ключовою для побудови матриці ваг і подальшого спектрального аналізу.

Таблиця spectral_metrics призначена для зберігання результатів спектрального аналізу графа кореляцій для кожного часово́го вікна. Саме ця таблиця містить узагальнені числові характеристики структури фінансової мережі.

Основні поля таблиці:

– window_id – ідентифікатор кореляційного вікна;

– lambda2 – друге власне значення нормованого лапласіана;

– spectral_gap – спектральна щілина;

– entropy – спектральна ентропія;

– subspace_d – відстань між спектральними підпросторами сусідніх вікон.

Первинний ключ window_id забезпечує однозначну відповідність між часовим вікном та набором спектральних характеристик. Дані з цієї таблиці використовуються як основа для виявлення аномальних режимів та побудови аналітичних візуалізацій.

Таблиця alerts використовується для зберігання повідомлень про виявлені аномальні стани фінансової системи. Вона виконує роль журналу подій та слугує основним інтерфейсом взаємодії між аналітичним ядром і користувачем.

Основні поля таблиці:

– id – первинний ключ повідомлення;

– window_id – ідентифікатор часовóго вікна, до якого відноситься алерт;

– level – рівень критичності (інформаційний, попереджувальний, критичний);

– code – унікальний код типу події;

– message – текстовий опис аномалії;

– created_at – час створення алерту.

Унікальний індекс за полями window_id і code запобігає дублюванню однотипних алертів для одного вікна.

Узагальнено, логіка взаємодії таблиць бази даних має такий вигляд:

– assets $\rightarrow$ prices (один-до-багатьох);

– prices $\rightarrow$ corr_entries (через формування кореляційних вікон);

– corr_entries $\rightarrow$ spectral_metrics (через побудову графа і спектральний аналіз);

– spectral_metrics $\rightarrow$ alerts (через правила виявлення аномалій).

Така структура забезпечує послідовний та відтворюваний процес аналізу фінансових даних.

Розроблена структура бази даних CMRM забезпечує логічну відповідність між теоретичною моделлю аналізу фінансових аномалій і її програмною реалізацією. Чіткий поділ даних за функціональними таблицями спрощує масштабування системи, підвищує надійність зберігання результатів та створює основу для подальшого розвитку аналітичних і візуалізаційних можливостей системи.

3.4 Серверна логіка

Серверна логіка інформаційної системи CMRM реалізована на основі мови програмування PHP та забезпечує інтеграцію процесів збору фінансових даних, їх аналітичної обробки із застосуванням методів спектрального аналізу, а також передачу результатів для подальшої візуалізації у веб-інтерфейсі. Архітектурно серверна частина виконує роль проміжної ланки між клієнтським інтерфейсом, базою даних MySQL та обчислювальними модулями, реалізованими мовою Python.

Основними функціональними задачами серверної логіки є:

– прийом та валідація вхідних фінансових даних;

– збереження даних у структурованій реляційній базі;

– ініціалізація процедур спектрального аналізу;

– агрегування та передача результатів аналітики у форматі, придатному для візуалізації.

Імпорт фінансових даних здійснюється через спеціалізований PHP-модуль, який приймає дані у вигляді CSV-файлів, що містять часові ряди цін або доходностей фінансових активів. Серверний модуль виконує попередню валідацію структури даних, перевірку форматів дат та числових значень, а також контроль цілісності набору.

Після перевірки дані автоматично зіставляються з довідником фінансових інструментів та зберігаються у відповідних таблицях бази даних. При повторному завантаженні інформації застосовується механізм оновлення записів, що дозволяє уникнути дублювання даних і забезпечує коректне доповнення часових рядів.

Таким чином, серверна логіка імпорту гарантує уніфікований формат фінансових даних, що є необхідною передумовою для подальшого коректного статистичного та спектрального аналізу.

Ключовою функцією серверної логіки є координація обчислювальних процедур спектрального аналізу, реалізованих у середовищі Python. Після формування чергового ковзного часовго вікна сервер створює відповідний запис у базі даних, який фіксує часові межі аналізу та параметри графової моделі.

Далі PHP-модуль ініціює виконання Python-скрипта, передаючи йому ідентифікатор сформованого вікна та параметри аналізу. Python-модуль здійснює:

– побудову кореляційної матриці між фінансовими активами;

– формування зваженого графа взаємозв’язків;

– обчислення нормованого оператора Лапласа-Бельтрамі;

– знаходження власних значень і власних векторів;

– розрахунок спектральних індикаторів (алгебраїчної зв’язності, спектрального розриву, ентропії спектра, відстаней між підпросторами).

Отримані значення автоматично зберігаються у базі даних та використовуються для формування сигналів про потенційні фінансові аномалії.

Для забезпечення інтерактивної візуалізації результатів спектрального аналізу серверна частина реалізує набір програмних інтерфейсів прикладного рівня (API), що надають доступ до аналітичних даних у форматі JSON.

Через відповідні API-запити клієнтська частина отримує:

– інформацію про сформовані кореляційні вікна;

– структуру графів взаємозв’язків між активами;

– часові ряди спектральних показників;

– список зафіксованих аномальних подій і попереджень.

Такий підхід дозволяє відокремити обчислювальну логіку від візуального представлення, забезпечуючи масштабованість системи та можливість подальшого розширення функціональності без зміни базової архітектури.

Для підвищення надійності роботи серверної частини в системі реалізовано централізовану обробку помилок, журналювання ключових операцій та контроль доступу до критичних функцій. Механізми автентифікації обмежують доступ до операцій імпорту даних і запуску аналітичних процедур, що зменшує ризик несанкціонованого втручання.

Використання чітко визначених форматів обміну даними та модульної структури серверної логіки забезпечує відтворюваність результатів аналізу та стабільність функціонування системи при зростанні обсягу фінансових даних.

Запропонована серверна логіка забезпечує повний цикл обробки фінансових даних – від імпорту та зберігання до складного спектрального аналізу та візуалізації результатів. Інтеграція PHP-API з Python-аналітикою дозволяє поєднати гнучкість веб-технологій з потужними чисельними методами аналізу графових структур, що є ключовою перевагою розробленої системи CMRM.

3.5 Python-модуль спектрального аналізу

Python-модуль спектрального аналізу є ключовим аналітичним компонентом системи CMRM та реалізує математичні методи дослідження структурних властивостей фінансових ринків на основі теорії графів і спектрального аналізу операторів Лапласа-Бельтрамі. Основне призначення модуля полягає у виявленні прихованих змін у кореляційній структурі між фінансовими активами, що можуть свідчити про перехід ринку в аномальний або кризовий режим.

Модуль реалізований мовою Python з використанням бібліотек чисельного аналізу та теорії графів і взаємодіє з серверною частиною через спільну базу даних MySQL, у якій зберігаються результати спектральних обчислень.

На першому етапі Python-модуль формує зважений неорієнтований граф

$$G = (V, E, W),$$

де множина вершин V відповідає фінансовим активам, а ребра E відображають кореляційні зв’язки між ними в межах заданого ковзного вікна спостережень.

Ваги ребер визначаються на основі коефіцієнтів кореляції Пірсона:

$$\rho_{ij} = corr(r_i, r_j),$$

де r_i, r_j – часові ряди доходностей активів i та j.

Для забезпечення коректності графової інтерпретації застосовується функція перетворення:

$$w_{ij} = \varphi(\rho_{ij}),$$

яка гарантує невід’ємність ваг та підсилює значущі зв’язки.

Отримана матриця ваг $W = \left[w_{ij} \right]$ є симетричною та відображає поточну структуру взаємозалежностей між активами.

На основі зваженого графа будується нормований оператор Лапласа-Бельтрамі:

$$L = I - D^{-\frac{1}{2}} W D^{-\frac{1}{2}},$$

де D – діагональна матриця степенів вершин:

$$D_{ij} = \sum_j w_{ij} .$$

Такий оператор дозволяє враховувати як локальні, так і глобальні властивості графа та є стійким до масштабування ваг. Спектральні властивості оператора L безпосередньо відображають топологічну структуру кореляційної мережі фінансового ринку.

Після побудови оператора Лапласа-Бельтрамі здійснюється обчислення його власних значень:

$$0 = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_n .$$

Друге власне значення λ_2, відоме як значення Фідлера, використовується як показник цілісності та зв'язності ринкової структури. Малі значення λ_2 свідчать про фрагментацію ринку на слабо пов'язані кластери, що часто відповідає кризовим або стресовим фінансовим режимам.

Спектральний розрив визначається як різниця між сусідніми власними значеннями:

$$\Delta\lambda = \lambda_3 - \lambda_2 .$$

Даний показник є чутливим до змін кластерної структури графа та використовується для виявлення фазових переходів у динаміці ринку.

Для оцінки ступеня структурної впорядкованості кореляційної мережі використовується спектральна ентропія:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i , \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} .$$

Зростання ентропії вказує на підвищення хаотичності та втрату домінуючих структурних зв'язків між активами.

Обчислені показники зберігаються у таблиці spectral_metrics, що забезпечує подальший аналіз їх динаміки в часі.

Спектральні метрики аналізуються як у статичному вигляді для окремого вікна, так і в динаміці шляхом порівняння послідовних кореляційних періодів. Різкі зміни значень λ_2, спектрального розриву або ентропії інтерпретуються як ознаки структурних зрушень на фінансовому ринку.

На основі наперед заданих порогових значень система автоматично формує сигнали попередження, які фіксуються у таблиці alerts та використовуються серверною частиною для інформування користувача про потенційні ризики.

Python-модуль спектрального аналізу забезпечує глибоке математичне дослідження кореляційної структури фінансових активів на основі теорії графів та спектральних методів. Використання показників λ_2, спектрального розриву та ентропії дозволяє не лише фіксувати поточний стан ринку, але й виявляти приховані аномальні режими та ранні ознаки фінансової нестабільності, що підтверджує доцільність застосування спектральних підходів у задачах фінансового моніторингу.

3.6 Інтерфейс користувача

Інтерфейс користувача системи CMRM спроєктовано як веб-орієнтовану аналітичну панель (dashboard), що забезпечує оперативний доступ до ключових показників спектрального моніторингу, візуалізацію кореляційної структури ринку та інформування користувача про критичні події. Основна мета UI – надати користувачу інтуїтивний інструмент спостереження за ризиковими режимами через узгоджене представлення числових метрик, часових трендів, теплокарт і сповіщень.

Архітектурно UI працює у зв’язці з серверним API: клієнтський інтерфейс ініціює запити на отримання метрик/вікон/алертів і відображає результати у вигляді інтерактивних компонентів. Такий підхід забезпечує розділення відповідальностей: PHP/Python виконують обчислення і формують дані, а веб-інтерфейс – їхню візуалізацію та інтерпретацію для користувача.

Головна сторінка системи реалізує концепцію дашборду – єдиного робочого простору, де користувач бачить (рис. 3.3):

– поточний стан ринку через агреговані спектральні показники;

– динаміку метрик у часі (трендовий графік);

– перелік сформованих вікон аналізу для швидкого переходу між періодами;

– активні попередження (alerts), що відображають аномальні режими.

Рисунок 3.3 – Дашборд спектрального моніторингу системних фінансових ризиків

Композиція дашборду побудована за принципом від загального до деталізації: зверху – ключові числові індикатори, далі – графічна динаміка, нижче – навігація за вікнами, а праворуч/окремим блоком – повідомлення про ризики. Це зменшує когнітивне навантаження і дозволяє швидко оцінити ситуацію без переходів між сторінками.

Панель метрик реалізовано у вигляді карток (KPI-cards), що виводять основні показники (рис. 3.4):

– λ_2 – індикатор зв’язності/цілісності ринку;

– spectral gap – маркер кластеризації та фазових переходів;

– entropy – міра структурної невпорядкованості кореляційної мережі;

– subspace drift – оцінка зсуву спектрального підпростору між послідовними вікнами.

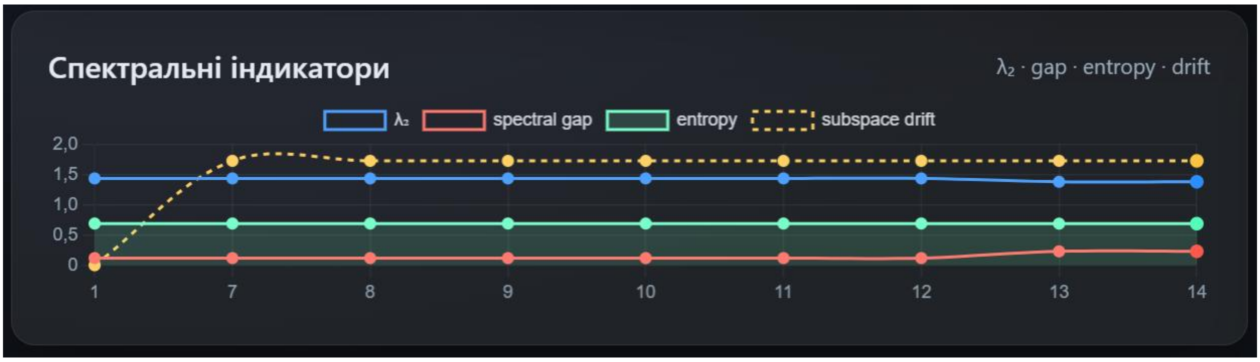

Рисунок 3.4 – Панель метрик

Таке подання дозволяє застосувати патерн single-glance analytics: користувач за кілька секунд бачить, чи є ознаки нестабільності (наприклад, значний дрейф або різка зміна λ_2). Панель метрик також виконує роль контексту для інтерпретації графіків і теплокарт: значення на картках відповідають обраному вікну аналізу.

Для аналізу тенденцій у системі передбачено графічний блок спектральні індикатори, який відображає часову еволюцію ключових метрик на послідовності вікон. Графік забезпечує:

– порівняння метрик на одній шкалі/в одному часовому контексті;

– виявлення різких стрибків (аномалій) як точок зламу тренду;

– візуальне підтвердження того, що алерт не є випадковим шумом, а корелює зі зміною структури ринку.

Механізм вибору вікна аналізу реалізовано як список/стрічку вікна аналізу, де кожне вікно має ідентифікатор та межі дат. Це забезпечує відтворюваність результатів: користувач завжди може повернутися до конкретного періоду й порівняти поведінку ринку в різні моменти часу.

Окремий інтерфейсний режим теплокарта кореляцій призначений для детального дослідження структури взаємозалежностей між активами в межах обраного вікна. Теплокарта наочно показує (рис. 3.5):

– ділянки високих позитивних/негативних кореляцій;

– групи активів, що формують кластери (блокова структура матриці);

– потенційне злипання кореляцій у кризові періоди (коли диверсифікація знижується).

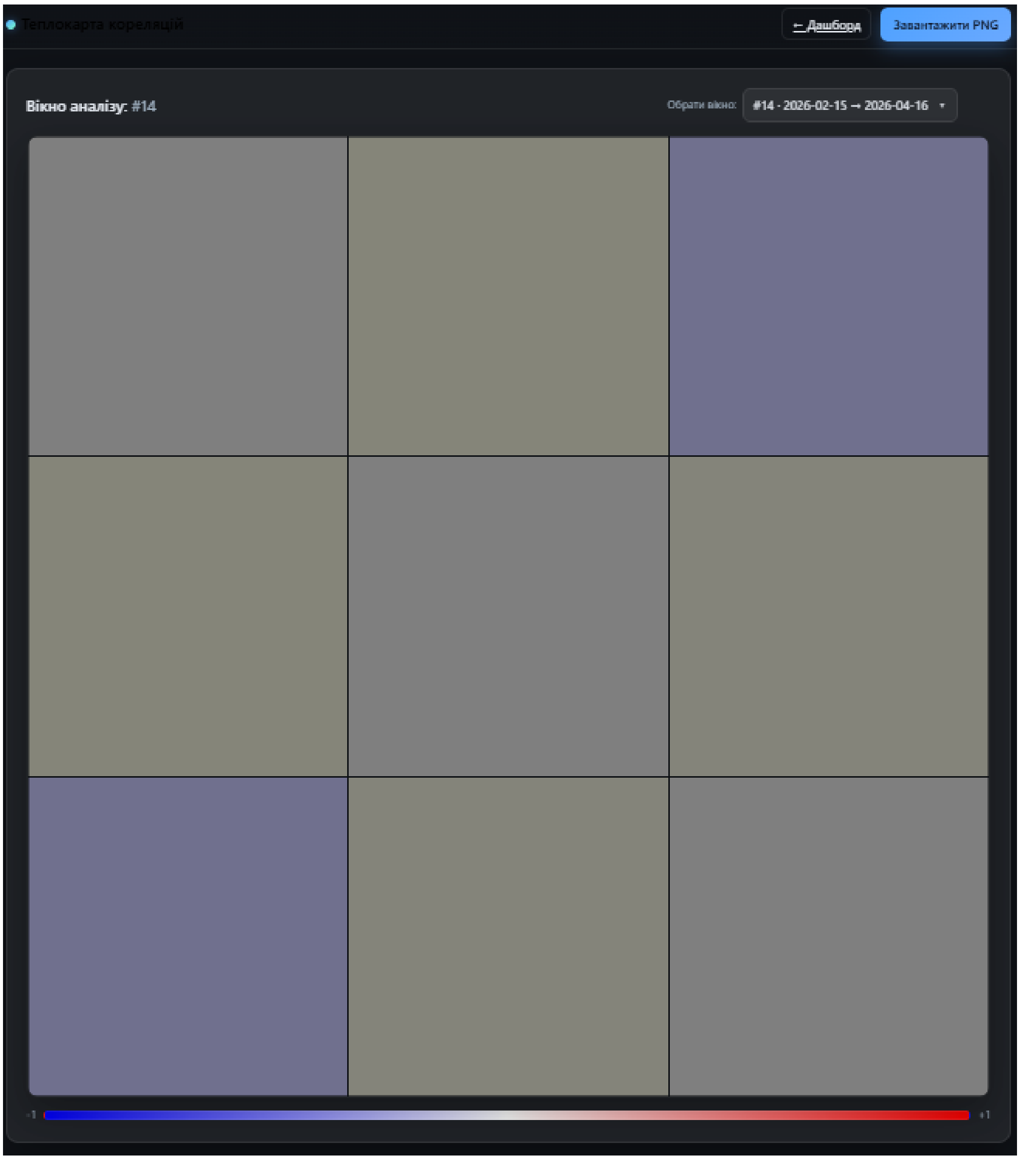

Рисунок 3.5 – Теплокарта кореляцій

Додатково передбачено функцію експорту теплокарти у графічний формат (наприклад, PNG), що є важливим для підготовки звітів, додатків до кваліфікаційної роботи та фіксації результатів експериментів.

Панель алертів реалізує механізм оперативного інформування користувача про події, що відповідають критеріям аномального режиму. Кожен алерт містить (рис. 3.6):

– ідентифікатор події та код (наприклад, підвищений дрейф підпростору);

– текстове пояснення з числовим обґрунтуванням (порівняння з порогом);

– часову мітку та прив'язку до конкретного вікна аналізу.

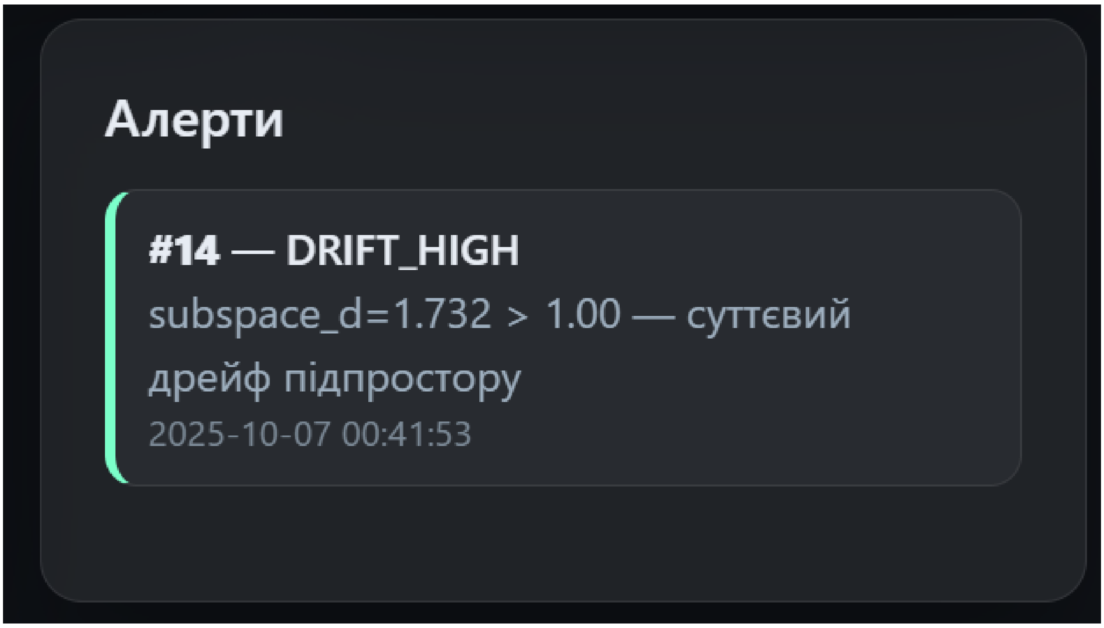

Рисунок 3.6 – Push-алерти

У контексті веб-застосунку push-логіка може бути реалізована двома типовими підходами:

– періодичне опитування (polling) API з малим інтервалом для оновлення алертів і метрик;

– подієвий канал (WebSocket / SSE) для миттєвого надсилання повідомлень при появі нового алерта.

Обидва підходи дозволяють досягти головної цілі: користувач не має самостійно відслідковувати зміни – система повідомляє про суттєві ризикові події автоматично, що підвищує практичну цінність CMRM як інструмента моніторингу.

Висновки за розділом 3

У третьому розділі кваліфікаційної роботи виконано програмну реалізацію системи Correlation Manifold Regime Monitor (CMRM), призначеної для виявлення фінансових аномалій на основі графово-спектрального аналізу. Реалізація підтверджує можливість практичного застосування математичних моделей і алгоритмів, розроблених у попередніх розділах, у вигляді повноцінної інформаційно-аналітичної системи.

У ході розробки сформовано багаторівневу архітектуру веб-додатку, що включає рівень даних, обчислювальний рівень та веб-рівень представлення. Такий підхід забезпечує чіткий розподіл відповідальності між компонентами системи, спрощує масштабування та дозволяє незалежно розвивати обчислювальне ядро і користувацький інтерфейс. Обрана архітектура є гнучкою та придатною як для дослідницьких задач, так і для прикладного фінансового моніторингу.

У межах розділу обґрунтовано вибір програмного стеку Python + SciPy + NetworkX + MySQL + PHP, який забезпечує ефективну реалізацію спектральних методів аналізу графів, надійне збереження результатів та зручний доступ до них через веб-інтерфейс. Python-модуль реалізує ключові етапи аналітичного процесу: побудову кореляційних графів, формування нормованого оператора Лапласа–Бельтрамі та обчислення спектральних характеристик, що є базою для виявлення аномальних режимів фінансового ринку.

Розроблена структура бази даних CMRM відображає логіку багатоступеневого аналізу фінансових даних – від зберігання часових рядів до фіксації спектральних метрик та генерації алертів. Чітке розмежування таблиць за функціональним призначенням забезпечує відтворюваність обчислень, накопичення історії аналізу та можливість подальшого розширення системи без зміни її базової структури.

Серверна логіка, реалізована з використанням PHP, забезпечує інтеграцію між базою даних, аналітичними Python-модулями та веб-інтерфейсом. Реалізований механізм імпорту фінансових даних, запуску спектрального аналізу та передачі результатів через API створює повний цикл обробки інформації – від надходження даних до їх інтерпретації користувачем. Особливу увагу приділено питанням надійності, обробки помилок та контролю доступу, що підвищує стабільність функціонування системи.

Python-модуль спектрального аналізу забезпечує реалізацію теоретичних положень спектральної геометрії у прикладному контексті фінансових ринків. Використання показників алгебраїчної зв’язності, спектрального розриву, спектральної ентропії та субпросторового дрейфу дозволяє виявляти структурні зміни кореляційної мережі, які можуть слугувати ранніми індикаторами фінансової нестабільності та системних ризиків.

Інтерфейс користувача реалізовано у вигляді аналітичного дашборду, який забезпечує інтуїтивне представлення результатів спектрального аналізу, візуалізацію динаміки метрик, теплокарт кореляцій та оперативне інформування про аномальні події. Такий підхід дозволяє користувачу швидко оцінювати стан фінансового ринку та інтерпретувати складні спектральні показники без необхідності безпосередньої роботи з математичними моделями.

Таким чином, у третьому розділі продемонстровано, що розроблена система CMRM є цілісним програмним рішенням, яке поєднує сучасні методи спектрального аналізу, графові моделі та веб-технології. Реалізований програмний комплекс створює практичну основу для експериментального дослідження ефективності запропонованого підходу та підтверджує його придатність для задач моніторингу фінансових аномалій, що буде розглянуто у наступному розділі кваліфікаційної роботи.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

4.1 Вхідні дані та сценарії тестування (портфель із N активів)

Обчислювальний експеримент у межах даного дослідження спрямований на перевірку ефективності запропонованого підходу до виявлення фінансових аномалій на основі спектрального аналізу оператора Лапласа-Бельтрамі, побудованого на кореляційній мережі фінансових активів. Для цього було сформовано набір вхідних даних, а також визначено декілька сценаріїв тестування, що імітують різні режими функціонування фінансового ринку.

Вхідними даними обчислювального експерименту є часові ряди цін фінансових активів, об’єднаних у портфель розмірності N, де N – кількість активів у портфелі. До аналізу залучаються як ліквідні інструменти (акції, індекси, валютні пари), так і активи з підвищеною волатильністю, що дозволяє оцінити стабільність роботи моделі в різних умовах.

Для кожного активу використовується дискретний часовий ряд цін закриття, на основі якого обчислюються логарифмічні прибутковості за формулою:

$$r_i(t) = \ln \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)},$$

де $P_i(t)$ – ціна i-го активу в момент часу t.

З метою уніфікації даних усі часові ряди проходять попередню обробку, що включає:

– синхронізацію за часовою шкалою;

– усунення пропусків або некоректних значень;

– нормалізацію прибутковостей.

Для кожного вікна спостереження довжиною T будується кореляційна матриця розмірності $N \times N$, елементи якої визначаються за допомогою коефіцієнта Пірсона. На основі отриманої матриці формується зважений неорієнтований граф, у якому вершини відповідають фінансовим активам, а ваги ребер відображають силу кореляційного зв'язку між ними.

Подальшим кроком є побудова нормалізованого оператора Лапласа-Бельтрамі для відповідного графа, спектральні характеристики якого (другий власний коефіцієнт λ_2, спектральний розрив та ентропія спектра) використовуються як індикатори структурних змін у фінансовій системі.

Для оцінювання працездатності та чутливості моделі було сформовано кілька сценаріїв тестування.

1. Стаціонарний сценарій.

Характеризується відносно стабільними кореляційними зв'язками між активами та відсутністю різких ринкових збурень. Даний сценарій використовується як базовий для визначення нормального режиму функціонування системи.

2. Сценарій підвищеної волатильності.

Передбачає зростання амплітуди коливань прибутковостей та посилення кореляцій між активами. Такий режим моделює кризові або передкризові стани фінансового ринку.

3. Аномальний сценарій.

Містить штучно або емпірично сформовані структурні збурення, зокрема різкі зміни кореляційної структури, поява домінуючих кластерів або порушення топології графа. Даний сценарій застосовується для перевірки здатності методу своєчасно виявляти аномалії.

4. Порівняльний сценарій для різних значень N.

Аналіз проводиться для портфелів різної розмірності з метою дослідження масштабованості алгоритму та його обчислювальної стійкості при зростанні кількості активів.

Таким чином, сформований набір вхідних даних і сценаріїв тестування забезпечує комплексну перевірку запропонованої методики в умовах, наближених до реальних фінансових процесів. Це створює основу для подальшого аналізу результатів обчислювального експерименту та інтерпретації спектральних показників у контексті виявлення фінансових аномалій.

4.2 Розрахунок кореляційних графів і побудова Лаплас-спектра

На даному етапі обчислювального експерименту здійснюється побудова кореляційних графів фінансових активів та подальший спектральний аналіз відповідних операторів Лапласа-Бельтрамі. Метою цього підрозділу є формалізація процедури переходу від часових рядів фінансових даних до спектральних характеристик графової структури, що використовуються для виявлення аномальних станів фінансової системи.

На основі попередньо оброблених логарифмічних прибутковостей активів формується кореляційна матриця

$$C = \left[c_{ij} \right], \ i, j = 1, \dots, N,$$

де елемент c_{ij} визначає ступінь лінійної залежності між i-м та j-м активами та обчислюється за коефіцієнтом кореляції Пірсона.

Для переходу до графового подання кореляційна матриця інтерпретується як матриця суміжності зваженого неорієнтованого графа

$$G = (V, E),$$

де множина вершин V відповідає фінансовим активам портфеля, а множина ребер E визначається на основі наявності та сили кореляційних зв’язків між ними.

З метою зменшення впливу шуму та випадкових кореляцій застосовується порогова фільтрація, відповідно до якої ребро між вершинами i та j зберігається лише за умови:

$$\left|c_{ij}\right| \geq \tau,$$

де τ – наперед заданий поріг кореляції.

Ваги ребер визначаються абсолютними значеннями коефіцієнтів кореляції, що дозволяє зберегти інформацію про інтенсивність взаємозв’язків між активами.

На основі зваженого кореляційного графа будується матриця ступені

$$D = diag(d_1, d_2, ..., d_N),$$

де $d_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}$ – зважений ступінь вершини i.

Далі визначається нормалізований оператор Лапласа-Бельтрамі у вигляді:

$$L = I - D^{-\frac{1}{2}} W D^{-\frac{1}{2}},$$

де W – матриця ваг ребер графа;

I – одинична матриця відповідної розмірності.

Застосування нормалізованого Лаплас-оператора дозволяє коректно порівнювати графи різної щільності та забезпечує чисельну стійкість спектральних обчислень.

Лаплас-спектр графа визначається множиною власних значень оператора L:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_N \leq 2.$$

Особливу увагу в межах даного дослідження приділено таким спектральним характеристикам:

– другому власному значенню λ_2, яке відоме як алгебраїчна зв'язність графа та характеризує рівень структурної інтегрованості фінансової системи;

– спектральному розриву $\lambda_2 - \lambda_1$, що відображає ступінь стабільності кореляційної структури;

– ентропії Лаплас-спектра, яка використовується як міра складності та різноманітності взаємозв'язків між активами.

Обчислення спектра здійснюється для кожного ковзного часового вікна, що дозволяє сформувати часові ряди спектральних показників та аналізувати їхню динаміку.

Зміни у Лаплас-спектрі інтерпретуються як індикатори структурних трансформацій фінансового ринку. Зокрема, зменшення значення λ_2 свідчить про фрагментацію графа та зростання ризику системної нестабільності, тоді як різкі коливання спектральної ентропії можуть вказувати на перехід системи в аномальний режим.

Отримані спектральні характеристики використовуються у наступних підрозділах для формування кількісних критеріїв виявлення фінансових аномалій та побудови системи попереджувальних сигналів.

4.3 Динаміка спектральних показників у ковзному вікні

Однією з ключових переваг запропонованого підходу є можливість аналізу еволюції стану фінансової системи в часі шляхом застосування механізму ковзного вікна. Такий підхід дозволяє перейти від статичного аналізу кореляційної структури портфеля активів до динамічного моніторингу її змін, що є принципово важливим для виявлення аномальних режимів функціонування ринку.

У межах обчислювального експерименту спектральні показники обчислювалися послідовно для кожного ковзного вікна фіксованої довжини. Кожне вікно відповідає окремому часовому інтервалу спостережень, для якого формувався кореляційний граф портфеля активів та визначалися його спектральні характеристики. У результаті було отримано часові ряди спектральних індикаторів (рис. 4.1), що відображають зміну топології та внутрішньої структури кореляційної мережі.

Рисунок 4.1 – Динаміка спектральних показників кореляційного графа портфеля активів у ковзному вікні

Аналіз динаміки показника зв’язності графа демонструє, що в умовах стабільного ринкового середовища його значення змінюються плавно та залишаються в обмеженому діапазоні. Це свідчить про збереження цілісності кореляційної структури та відсутність різких структурних перебудов між активами портфеля. Водночас у певні моменти часу фіксуються локальні відхилення, які можуть бути пов’язані зі зростанням узгодженості руху активів або, навпаки, з послабленням кореляційних зв’язків.

Спектральний розрив характеризує стійкість спектральної структури графа до малих збурень. У більшості ковзних вікон його значення залишаються відносно стабільними, однак у періоди підвищеної ринкової напруженості спостерігається зміна цього показника, що вказує на трансформацію внутрішньої організації кореляційної мережі.

Ентропійний показник відображає рівень складності та неоднорідності кореляційної структури. Зростання ентропії свідчить про ускладнення взаємозв’язків між активами та підвищення невизначеності у поведінці системи, тоді як її зниження може вказувати на домінування спільної динаміки активів. Динаміка ентропії у ковзному вікні дозволяє виявляти фази переходу між різними режимами ринку.

Окрему увагу в даному дослідженні приділено аналізу дрейфу спектрального підпростору, який характеризує ступінь відмінності між спектральними представленнями кореляційних графів у сусідніх часових вікнах. Значне зростання цього показника інтерпретується як ознака різкої перебудови кореляційної структури портфеля та розглядається як потенційний індикатор аномального стану фінансової системи.

Результати обчислювального експерименту показують, що спільний аналіз динаміки спектральних показників у ковзному вікні дозволяє не лише фіксувати факт наявності аномалій, а й оцінювати їхню тривалість та інтенсивність. Це створює основу для побудови системи раннього попередження про зростання системних ризиків та підтверджує практичну придатність запропонованого спектрального підходу для моніторингу фінансових ринків у реальному часі.

4.4 Інтерпретація аномалій і приклади алертів

У межах обчислювального експерименту спектральні показники, отримані для кореляційних графів у ковзному вікні, використовуються не лише для аналізу динаміки фінансової системи, але й для формування автоматизованих попереджувальних повідомлень – алертів. Метою таких алертів є своєчасне виявлення аномальних станів, що можуть свідчити про зростання системних ризиків або зміну ринкового режиму.

Формування алертів базується на аналізі відхилень спектральних індикаторів від їхніх характерних (базових) значень, визначених на попередніх часових інтервалах. Особливу увагу приділено показникам, які відображають структурні перебудови кореляційної мережі, оскільки саме вони є найбільш чутливими до нетипових ринкових подій.

Алерт типу «Drift High» фіксує ситуації, у яких спостерігається суттєвий дрейф спектрального підпростору між сусідніми ковзними вікнами. Такий дрейф означає, що власні простори, які описують домінуючу структуру кореляційного графа, зазнають різкої трансформації за короткий проміжок часу.

Практична інтерпретація цього алерту полягає в тому, що взаємозв'язки між активами портфеля істотно змінюються, навіть якщо окремі агреговані показники ринку ще не демонструють критичних відхилень. Таким чином, «Drift High» розглядається як ранній індикатор структурної нестабільності, що може передувати більш масштабним ринковим збуренням.

Приклад такого алерту наведено на рисунку 4.2, де зафіксовано перевищення порогового значення показника дрейфу підпростору. Це свідчить про перехід системи в нестабільний режим та потребує підвищеної уваги з боку аналітика або системи управління ризиками.

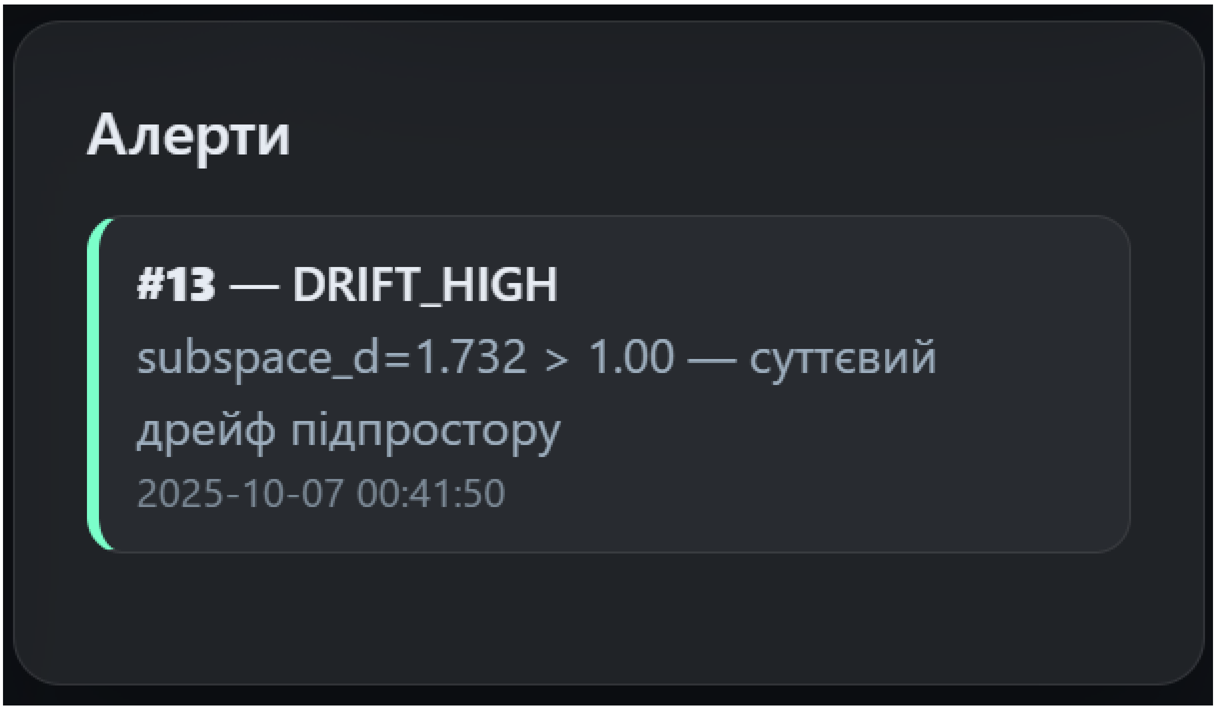

Рисунок 4.2 – Приклад алерту типу «Drift High» у системі спектрального моніторингу

Алерт «Regime Shift» відповідає більш глибоким та стійким змінам у структурі кореляційної мережі фінансових активів. На відміну від короткочасних збурень, які можуть бути викликані випадковими або локальними факторами, даний тип алерту сигналізує про зміну ринкового режиму.

З точки зору спектрального аналізу це проявляється у тривалій перебудові ключових характеристик графа, що відображає зміну характеру взаємодії між активами. Такі ситуації часто відповідають переходу від нормального стану ринку до кризового або високоволатильного режиму, а також до фаз підвищеної синхронізації руху активів.

Важливою особливістю алерту «Regime Shift» є його практична значущість для стратегічного прийняття рішень. Його поява може бути використана як сигнал для перегляду структури портфеля, коригування ризикових обмежень або активації захисних механізмів управління капіталом.

Застосування системи алертів у рамках спектрального моніторингу дозволяє автоматизувати процес виявлення аномальних станів та зменшити залежність від суб’єктивної інтерпретації даних. Поєднання різних типів алертів забезпечує багаторівневий контроль за станом фінансової системи: від раннього виявлення локальних збурень до фіксації стійких змін ринкових режимів.

Отримані результати підтверджують, що запропонований підхід є ефективним інструментом для практичного застосування у задачах аналізу фінансових ризиків та може бути використаний як основа для побудови інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень у фінансовій сфері.

4.5 Порівняльний аналіз ефективності методів виявлення ризику

Оцінювання ефективності методів виявлення фінансових ризиків є ключовим етапом дослідження, оскільки саме на цьому рівні визначається практична цінність запропонованого підходу порівняно з існуючими аналітичними інструментами. У даному підрозділі здійснено порівняльний аналіз спектрального методу, реалізованого в межах системи CMRM, з традиційними підходами до аналізу ризику, що широко застосовуються у фінансовій практиці.

Для порівняльного аналізу було розглянуто такі групи методів.

1. Статистичні методи ризик-аналізу, зокрема оцінювання волатильності, дисперсії прибутковостей та кореляційних коефіцієнтів у фіксованому часовому інтервалі. Дані методи є простими у реалізації та мають низькі обчислювальні витрати, однак характеризуються обмеженою чутливістю до структурних змін у системі.

2. Порогові індикатори, що базуються на перевищенні заздалегідь заданих рівнів ризику (наприклад, різкі зростання кореляцій або волатильності). Такі підходи дозволяють оперативно фіксувати екстремальні події, проте часто реагують лише на вже сформовані кризові стани.

3. Методи, засновані на аналізі кореляційних матриць, які дозволяють оцінювати взаємозалежності між активами, але, як правило, розглядають ці залежності у статичному вигляді, без урахування топологічної структури взаємозв’язків.

4. Спектральний метод на основі Лапласа–Бельтрамі оператора, запропонований у даній роботі, який інтерпретує фінансову систему як динамічну кореляційну мережу та аналізує її структурні властивості за допомогою спектральних показників.

Порівняльний аналіз здійснювався за такими критеріями:

– чутливість до структурних змін – здатність методу виявляти перебудови взаємозв’язків між активами;

– своєчасність сигналів – можливість фіксації ризикових станів на ранніх етапах;

– інтерпретованість результатів – зрозумілість отриманих показників для практичного використання;

– стійкість до шуму – здатність методу зберігати інформативність за наявності випадкових коливань даних;

– масштабованість – ефективність роботи при зростанні кількості активів у портфелі.

Результати аналізу показали, що традиційні статистичні методи добре відображають загальний рівень ризику в стабільних умовах, однак є недостатньо інформативними у випадках, коли ризик зумовлений не зростанням волатильності окремих активів, а зміною структури їх взаємозв’язків. У таких ситуаціях ризик може накопичуватися поступово та залишатися непоміченим до моменту різкого ринкового збурення.

Порогові індикатори забезпечують швидку реакцію на екстремальні події, проте часто демонструють запізнілі сигнали, оскільки спрацьовують уже після суттєвих змін ринкових параметрів. Крім того, вони чутливі до вибору порогових значень, що знижує їхню універсальність.

Методи, засновані на прямому аналізі кореляційних матриць, дозволяють фіксувати зростання узгодженості руху активів, однак не дають цілісного уявлення про глобальну структуру кореляційної мережі. Вони також не враховують динаміку переходів між різними структурними станами системи.

На відміну від зазначених підходів, спектральний метод, реалізований у даній роботі, продемонстрував високу чутливість до структурних перебудов кореляційної мережі, навіть у випадках, коли традиційні статистичні показники ще не вказували на зростання ризику. Аналіз динаміки спектральних індикаторів у ковзному вікні дозволив фіксувати аномальні стани на ранніх етапах, що підтверджується появою відповідних алертів типу «Drift High» та «Regime Shift».

Суттєвою перевагою спектрального підходу є його системний характер. Замість аналізу окремих активів або парних зв’язків між ними, фінансовий ринок розглядається як цілісна динамічна система. Це дозволяє виявляти приховані ризики, пов’язані з колективною поведінкою активів та зміною топології кореляційної мережі.

Крім того, спектральні показники мають добру інтерпретованість у контексті мережевого аналізу та можуть бути використані для побудови автоматизованих систем моніторингу ризиків. Реалізація відповідних алертів забезпечує інтеграцію даного підходу у практичні сценарії управління фінансовими портфелями.

Висновки за розділом 4

У четвертому розділі кваліфікаційної роботи проведено обчислювальний експеримент, спрямований на перевірку ефективності запропонованого спектрального підходу до виявлення фінансових аномалій на основі аналізу оператора Лапласа-Бельтрамі, побудованого на кореляційних графах фінансових активів. Отримані результати підтверджують практичну придатність розробленої методики для дослідження структурних змін у фінансових системах.

У ході експерименту було сформовано набір вхідних даних та сценаріїв тестування, що відображають різні режими функціонування фінансового ринку – від відносно стабільних станів до умов підвищеної волатильності та аномальних структурних збурень. Такий підхід дозволив комплексно оцінити поведінку спектральних показників у різних ринкових умовах та дослідити їхню чутливість до змін кореляційної структури між активами.

Побудова кореляційних графів і відповідних операторів Лапласа–Бельтрамі дала змогу перейти від аналізу окремих часових рядів до дослідження фінансового ринку як цілісної динамічної мережі. Аналіз Лаплас-спектра показав, що такі показники, як друге власне значення, спектральний розрив та ентропія спектра, є інформативними характеристиками, які відображають рівень зв'язності, стабільності та структурної складності кореляційної мережі.

Дослідження динаміки спектральних показників у ковзному часовому вікні продемонструвало, що у стабільних ринкових умовах значення цих індикаторів змінюються плавно та залишаються в обмежених діапазонах. Водночас у періоди підвищеної напруженості або структурних перебудов спостерігаються різкі відхилення, які можуть слугувати ранніми ознаками формування аномальних режимів фінансової системи. Особливо показовим виявився аналіз дрейфу спектрального підпростору, що дозволяє фіксувати швидкі трансформації структури кореляційної мережі.

Розроблений механізм інтерпретації спектральних аномалій та система алертів продемонстрували здатність автоматично виявляти як короткочасні структурні збурення, так і більш стійкі зміни ринкових режимів. Алерти типу «Drift High» і «Regime Shift» мають чітке практичне трактування та можуть бути використані як інструменти раннього попередження про зростання системних ризиків або зміну характеру взаємодії між фінансовими активами.

Порівняльний аналіз ефективності показав, що запропонований спектральний підхід перевершує традиційні статистичні та порогові методи за критеріями чутливості до структурних змін і своєчасності виявлення ризикових станів. На відміну від методів, які ґрунтуються переважно на локальних показниках (волатильність, окремі кореляції), спектральний аналіз дозволяє виявляти приховані ризики, пов’язані з колективною поведінкою активів та глобальною топологією фінансової мережі.

Таким чином, результати обчислювального експерименту підтверджують ефективність і практичну цінність спектрального аналізу графів для задач моніторингу фінансових аномалій. Запропонований підхід може бути використаний як основа для побудови систем раннього попередження про системні ризики та підтримки прийняття рішень у фінансовій сфері, що створює логічний перехід до узагальнюючих висновків кваліфікаційної роботи.

ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі було здійснено комплексне дослідження можливостей застосування спектрального аналізу кореляційних мереж для виявлення фінансових аномалій та моніторингу системних ризиків у складних фінансових системах. Актуальність обраної тематики зумовлена зростанням взаємозалежності фінансових активів, підвищенням динамічності ринкових процесів та обмеженістю традиційних методів ризик-аналізу у виявленні структурних змін фінансових ринків.

У ході дослідження було проаналізовано сучасні наукові підходи до трактування фінансових аномалій і системних ризиків, а також визначено їхні ключові характеристики в умовах функціонування глобалізованих фінансових ринків. На основі аналізу літературних джерел встановлено, що накопичення ризиків часто має структурний характер і пов'язане зі зміною топології взаємозв'язків між активами, що не завжди відображається у традиційних фінансових показниках.

У роботі запропоновано підхід до аналізу фінансових ринків, який базується на поданні портфеля активів у вигляді кореляційної мережі та подальшому спектральному аналізі відповідного оператора Лапласа–Бельтрамі. Було розроблено методику побудови кореляційних графів у ковзному часовому вікні, що дозволяє досліджувати динаміку структурних змін фінансової системи в часі.

У межах обчислювального експерименту реалізовано розрахунок спектральних показників, які характеризують зв'язність, стійкість та складність кореляційної мережі. Аналіз динаміки цих показників продемонстрував їхню чутливість до змін ринкового режиму та здатність фіксувати аномальні стани, що передують фазам підвищеної нестабільності. Отримані результати підтвердили, що спектральні індикатори можуть використовуватися як ефективні інструменти раннього виявлення системних ризиків.

На основі спектрального аналізу було реалізовано механізм формування автоматизованих попереджувальних сигналів (алертів), зокрема типів «Drift High» та «Regime Shift», які дозволяють інтерпретувати різні рівні та характер аномальних змін у фінансовій системі. Практичні приклади роботи системи показали, що поєднання кількох спектральних показників забезпечує більш надійне виявлення ризикових станів порівняно з використанням окремих індикаторів.

У роботі також здійснено порівняльний аналіз ефективності запропонованого спектрального підходу з традиційними методами оцінювання ризику. Встановлено, що класичні статистичні інструменти добре відображають поточний рівень ризику, проте часто виявляються запізнілими у фіксації структурних змін. Натомість спектральний підхід дозволяє виявляти приховані системні загрози на ранніх етапах їх формування.

Значну увагу приділено аналізу практичних застосувань отриманих результатів. Показано, що запропонований метод може бути використаний для моніторингу системних ризиків фінансових ринків, алгоритмічного управління інвестиційними портфелями, інтеграції у корпоративні risk-management системи, а також у навчальних і дослідницьких цілях. Окреслено перспективи розвитку підходу, зокрема шляхом використання інкрементних спектральних оновлень і методів машинного навчання.

Узагальнюючи результати проведеного дослідження, можна зробити висновок, що спектральний аналіз кореляційних мереж є перспективним інструментом дослідження складних фінансових систем. Запропонований у роботі підхід забезпечує системне бачення фінансових ризиків, доповнює традиційні методи аналізу та має практичну цінність для задач моніторингу, управління та прогнозування ризиків у сучасних фінансових ринках.

Однією з ключових переваг використання спектральних моделей у задачах моніторингу фінансових ринків є їхня здатність забезпечувати системний підхід до аналізу ризиків. На відміну від традиційних методів, які зосереджуються переважно на характеристиках окремих активів або локальних статистичних показниках, спектральні моделі дозволяють розглядати фінансовий ринок як цілісну динамічну систему взаємопов'язаних елементів. Це створює можливість виявлення ризиків, що формуються на рівні структури взаємозв'язків між активами.

Важливою перевагою спектрального підходу є чутливість до структурних змін, які не завжди супроводжуються миттєвими змінами цін або волатильності. Спектральні характеристики кореляційної мережі реагують на перебудову топології фінансових зв'язків, що дозволяє фіксувати накопичення системної нестабільності ще до появи явних кризових проявів. Завдяки цьому спектральні моделі можуть використовуватися як інструмент раннього попередження про зростання системних ризиків.

Ще однією суттєвою перевагою є динамічність аналізу, що реалізується через використання ковзного часового вікна. Такий підхід дозволяє відстежувати еволюцію стану фінансового ринку у часі та аналізувати переходи між різними ринковими режимами. У результаті моніторинг ризиків набуває не статичного, а процесного характеру, що відповідає реальній динаміці сучасних фінансових систем.

Спектральні моделі також відзначаються високим рівнем узагальнення інформації. Замість аналізу великої кількості парних кореляцій або індивідуальних показників, складна інформація про взаємозалежності між активами зводиться до компактного набору спектральних індикаторів. Це спрощує інтерпретацію результатів аналізу та підвищує зручність їх використання в аналітичних і управлінських цілях.

До переваг спектрального підходу належить і його універсальність. Запропоновані моделі можуть бути застосовані до різних сегментів фінансового ринку, включаючи ринки акцій, валют, облігацій та похідних фінансових інструментів. Крім того, вони не залежать від специфіки окремих активів і можуть бути використані для аналізу портфелів різної розмірності та структури.

Важливою характеристикою спектральних моделей є можливість їх інтеграції з автоматизованими системами моніторингу та управління ризиками. Спектральні індикатори можуть слугувати основою для формування формалізованих сигналів та алертів, що дозволяє реалізувати безперервний контроль за станом фінансового ринку та зменшити залежність від суб'єктивної оцінки аналітика.

Крім того, спектральні моделі мають значний потенціал для подальшого розвитку та поєднання з сучасними методами аналізу даних, зокрема з алгоритмами машинного навчання. Це відкриває можливості для побудови адаптивних та інтелектуальних систем фінансового моніторингу, здатних автоматично враховувати зміну ринкових умов.

Отже, використання спектральних моделей для моніторингу фінансових ринків забезпечує комплексний, гнучкий та інформативний підхід до аналізу ризиків. Їх застосування дозволяє підвищити ефективність виявлення системних загроз, доповнити традиційні методи фінансового аналізу та сприяє розвитку сучасних інструментів управління ризиками у складних фінансових системах.

З метою підвищення ефективності та практичної придатності розробленої системи спектрального моніторингу фінансових ринків доцільно врахувати низку рекомендацій, спрямованих на її подальший розвиток і вдосконалення.

1. Перспективним напрямом є оптимізація обчислювальних процедур шляхом впровадження інкрементних алгоритмів оновлення спектральних характеристик. Це дозволить суттєво зменшити обчислювальні витрати при роботі з великими портфелями активів і забезпечити масштабованість системи в умовах потокового надходження фінансових даних.

2. Доцільно розширити функціональні можливості системи за рахунок адаптивного налаштування параметрів аналізу, зокрема довжини ковзного вікна та критеріїв формування алертів. Використання автоматизованих процедур підбору параметрів підвищить універсальність системи та її стійкість до змін ринкового середовища.

3. Рекомендується інтегрувати спектральний аналіз з методами машинного навчання, які можуть бути використані для класифікації ринкових режимів, прогнозування ризикових станів та автоматичної інтерпретації спектральних

індикаторів. Такий підхід сприятиме переходу від експертно-орієнтованих правил до самонавчальних моделей аналізу фінансових даних.

4. Важливим напрямом розвитку є підвищення рівня візуалізації та інтерфейсної взаємодії з користувачем. Розширення набору інтерактивних графіків, теплових карт та часових діаграм дозволить покращити сприйняття результатів аналізу та зробити систему зручнішою для практичного використання аналітиками й менеджерами з ризиків.

5. Для підвищення прикладної цінності системи доцільно передбачити інтеграцію з зовнішніми інформаційними джерелами та корпоративними платформами, зокрема торговими системами, базами фінансової звітності та корпоративними risk-management системами. Це забезпечить комплексний підхід до аналізу ризиків та дозволить використовувати спектральні індикатори в реальних управлінських процесах.

6. Рекомендується розширити можливості системи шляхом тестування на різних типах фінансових ринків і даних, включаючи високочастотні часові ряди та багатофакторні економічні показники. Це дозволить оцінити універсальність запропонованого підходу та визначити межі його застосовності.

Отже, подальший розвиток системи спектрального моніторингу має бути спрямований на підвищення її обчислювальної ефективності, адаптивності та інтеграційної спроможності. Реалізація запропонованих рекомендацій створить передумови для практичного впровадження системи у сфері фінансового аналізу та управління ризиками, а також відкриє нові можливості для її наукового вдосконалення.

Обґрунтовано, що системний ризик формується через структуру взаємозв’язків між активами та інституціями, тому його ефективне виявлення потребує інструментів, які чутливі до топологічних змін мережі. Спектральний підхід дозволяє відстежувати перебудову кореляційної структури (посилення узгодженості, кластеризацію, зростання зв’язності) у режимі ковзного вікна та формувати ранні сигнали нестабільності ще до прояву криз у традиційних метриках. Зроблено висновок, що такий моніторинг є перспективним для застосування регуляторами, центральними банками й аналітичними центрами як доповнення до класичних методів оцінювання ризику.

Встановлено, що спектральні індикатори можуть використовуватися як керуючі сигнали для адаптивного портфельного управління, оскільки вони відображають зміну ринкових режимів (стабільний/перехідний/кризовий). У стабільних умовах можливе підтримання диверсифікованої структури, тоді як при ознаках зростання системного ризику алгоритм може автоматично переходити до консервативних рішень: зменшення частки високо корельованих активів, перерозподіл між секторами, підвищення ліквідності та захисних активів. Узагальнено, що інтеграція спектральних показників із існуючими підходами (ризик-паритет, ребалансування, динамічна диверсифікація) підвищує адаптивність і стійкість портфельних стратегій у періоди ринкових збурень.

Показано, що спектральний аналіз кореляційних мереж може бути інтегрований у корпоративні системи управління ризиками як інструмент раннього виявлення системної нестабільності. На відміну від традиційних підходів, орієнтованих на окремі види ризиків, запропонований метод дозволяє враховувати їхню взаємозалежність і кумулятивний ефект на рівні всієї організації. Використання динамічного аналізу кореляційної структури забезпечує безперервний моніторинг ризикового профілю та підвищує обґрунтованість управлінських рішень щодо коригування лімітів, фінансових стратегій і заходів з мінімізації ризиків.

Встановлено, що спектральний аналіз мереж має значний потенціал як навчальний і дослідницький інструмент. Його застосування дозволяє наочно продемонструвати зв’язок між математичними моделями, структурою фінансових взаємозв’язків і реальними ринковими процесами. Аналіз динаміки спектральних показників у ковзному часовому вікні сприяє формуванню системного мислення та кращому розумінню механізмів виникнення фінансових аномалій і кризових явищ. У дослідницькому контексті даний підхід відкриває можливості для аналізу еволюції ринкових режимів і перевірки гіпотез щодо поширення ризиків у складних фінансових системах.

Обґрунтовано, що подальший розвиток спектрального аналізу фінансових мереж пов’язаний з використанням інкрементних спектральних оновлень і методів машинного навчання. Інкрементні підходи дозволяють істотно зменшити обчислювальні витрати та забезпечити аналіз потокових даних у режимі, наближеному до реального часу. Інтеграція спектральних індикаторів із методами машинного навчання створює передумови для автоматизованого розпізнавання ринкових режимів, адаптивного налаштування порогів аномальності та побудови прогнозних моделей системного ризику. Зроблено висновок, що поєднання цих підходів є перспективним напрямом розвитку інтелектуальних систем моніторингу фінансових ринків.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Investopedia. Market anomaly: Definition, how it works, types, and example. URL: https://www.investopedia.com/articles/stocks/08/market-anomaly-efficient-market.asp (дата звернення: 18.11.2025).

2. An Y., del Castillo E. An AI Approach for Learning the Spectrum of the Laplace-Beltrami Operator. URL: https://arxiv.org/abs/2507.07073v1 (дата звернення: 16.11.2025).

3. Nasikun A., Brandt C., Hildebrandt K. Fast Approximation of Laplace-Beltrami Eigenproblems. *Computer Graphics Forum*. 2018. Vol. 37, № 5. P. 1–12.

4. Backman E. The Spectrum of the Laplace-Beltrami Operator on Noncompact Manifolds : Degree Project in Mathematics, Advanced Level. Linköping University, 2024. 36 p.

5. Дрінь С. С., Іщук В. П., Щестюк Н. Ю. Математичне моделювання фінансово-економічних процесів на базі логістичної послідовності детермінованого хаосу. 2016. *Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки*. Том 178. С. 10–15.

6. Бубнів Н. В. Формування моделі фінансового моніторингу в Україні : кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра. Львів : Львівський державний університет внутрішніх справ МВС України, 2024. 70 с.

7. Пашко А. О. Статистичний аналіз даних. Київ : КНУ, 2019. 55 с.

8. Стопакевич О. Л. Системний аналіз : конспект лекцій. Одеса : Одеський державний політехнічний університет, 2025. 142 с.

9. Kryazhych O., Kovalenko O. Some models of information processing in the field of technogenical safety management. *Mathematical Modeling in Economy*. 2018. № 1. P. 84–93.

10. Higuchi Y., Nomura Y. Spectral structure of the Laplacian on a covering graph. *European Journal of Combinatorics*. 2009. Vol. 30. P. 570–585.

11. Благун І. І. Аномалії на фінансових ринках як фактор ірраціональної поведінки інвесторів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія*

«Економіка». 2017. Вип. 2 (50). С. 239–246.

12. Зоріна О. А. Методи аналізу фінансових ризиків. *Міжнародний збірник наукових праць*. 2014. Вип. 2 (20). С. 221–228.

13. Ахновська І. О. Методичний підхід до аналізу фінансово-економічного стану великих, середніх, малих та мікропідприємств за даними статистичної звітності. *Економіка і організація управління*. 2014. № 1–2 (17–18). С. 27–36.

14. Стоянова А. В. Діагностика фінансової кризи на підприємстві : кваліфікаційна робота магістра за спеціальністю 072 «Фінанси, банківська справа та страхування». Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2023. 87 с.

15. Любохинець Л. С., Лабунець О. О. Світові фінансові ринки в умовах глобалізації. *Економіка і суспільство*. 2018. Вип. 15. С. 40–45.

16. Коленда Н. В. Поняття системи ризик-менеджменту підприємства. *Економіка та управління підприємствами*. 2018. Вип. 22. С. 398–404.

17. Управління ризиками: теоретичний аспект / Воловельська І. В., Данкова В., Мурза Я. В., Юращук Л. Б. *Вісник економіки транспорту і промисловості*. 2021. № 75. С. 76–77.

18. AIRMIC, ALARM, IRM. Стандарты управления рисками (Risk Management Standard). Пер. з англ. Федерація європейських асоціацій ризик-менеджерів (FERMA). 2003. 16 с.

19. Луцишин О. О. Фінансовий ринок : опорний конспект лекцій. Тернопіль : Тернопільський національний економічний університет, 2018. 173 с.

20. Еш С. М. Фінансовий ринок : навчальний посібник. 2-ге вид. Київ : Центр учбової літератури, 2011. 528 с.

21. Grokipedia. *Laplace–Beltrami operator*. URL: https://grokipedia.com/page/Laplace%E2%80%93Beltrami_operator (дата звернення: 25.12.2025).

22. ScienceDirect Topics. *Beltrami Operator – an overview*. URL: https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/beltrami-operator (дата звернен-

ня: 25.12.2025).

23. Python у профільному рівні (Google Sites). *Основи теорії графів*. URL: https://sites.google.com/view/python-11-profilniy/%D0%BE%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8-%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%97-%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D0%B2 (дата звернення: 25.12.2025).

24. Anisotropic Laplace-Beltrami Operators for Shape Analysis / Andreux M., Rodolà E., Aubry M., Cremers D. *Proceedings of the International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision (SSVM)*. 2015. P. 299–312. URL: https://arxiv.org/abs/1406.4758 (дата звернення: 25.12.2025).

25. Trinhammer O. L., Olafsson G. The Full Laplace-Beltrami Operator on U(N) and SU(N). URL: https://arxiv.org/abs/math-ph/9901002 (дата звернення: 25.12.2025).

26. Patanè G. Laplace-Beltrami Operator. An Introduction to Laplacian Spectral Distances and Kernels. *Springer*, 2017. P. 1–39.

27. Гече Ф., Коцовський В., Батюк А. Спектральні властивості булевих функцій, реалізовних одним нейронним елементом і суматорами за модулем 2. *Науковий вісник Ужгородського національного університету*. 2012. С. 69–76.

28. Ніколаєва К. В., Койбічук В. В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці : навчально-методичний посібник. Суми : Українська академія банківської справи НБУ, 2007. 84 с.

29. Основи дискретної математики. Розділ «Елементи теорії графів» / Кузьменко В. В., Швачич Г. Г., Рижанкова Г. І., Пасинков В. М. : конспект лекцій. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2004. 38 с.

30. Спектральні властивості координаційних сполук перехідних металів з гетероциклічними енамінонітрилами / Ковальська Н., Каряка Н., Ліціс О., Кулешова О., Хиля О., Слива Т., Аміrханов В. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Хімія*. 2015. № 1(51). С. 16–19.