

Міністерство освіти та науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інфокомунікацій  
(повна назва)

Кафедра інформаційно-мережної інженерії  
(повна назва)

## КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

«Дослідження представлення моделей випадкового процесу  
сукупністю підвекторів»

(тема)

Виконав: студент 2 курсу, групи ІМІм21-2

Спеціальність 172 "Телекомунікації та  
радіотехніка"

(код і повна назва спеціальності)

Освітньо-професійна програма \_\_\_\_\_

інформаційно-мережна інженерія

(повна назва освітньої програми)

Репечінський О.В.

(прізвище, ініціали)

Керівник проф. Тихонов В.А.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри \_\_\_\_\_

(підпис)

Безрук В.М

(прізвище, ініціали)

2023 р.

Не містить відомостей, заборонених  
до відкритого публікування

Керівник \_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_ / *В.А. Тихонов*

Студент \_\_\_\_\_ / *О.В. Репечінський*

Харківський національний університет радіоелектроніки

(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет інфокомунікацій

Кафедра інформаційно-мережної інженерії

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 172 "Телекомунікації та радіотехніка"

(код і назва)

Освітньо-професійна програма інформаційно-мережна інженерія

(назва)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Зав. кафедри «ІМІ»

\_\_\_\_\_ проф. Безрук В.М.

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 р

## **ЗАВДАННЯ**

### **НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ**

Репечінському Олександру Володимировичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Дослідження представлення моделей випадкового процесу сукупністю підвекторів

затверджена наказом ВНЗ від «27» \_\_\_\_\_ квітня \_\_\_\_\_ 2023 р. № \_\_\_398 Ст. \_\_\_\_

2. Термін подання студентом роботи 18.05.2023р.

3. Вихідні дані до роботи: Статистичні моделі складових векторних випадкових процесів (СВВП)

Моделі лінійного передбачення в представленні СВВП

Модель авторегресії в представленні СВВП

Модель ковзного середнього в представленні СВВП

Параметричні та непараметричні методи спектрального аналізу СВВП

Формуючий та відбілюючий фільтри в представленні СВВП

Акустичні сигнали електричних двигунів

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

Вступ

1. Аналітичний огляд методів представлення випадкових процесів лінійними різними стохастичними рівняннями

2. Моделі авторегресії-ковзного середнього і декомпозиції нестационарних даних

3. Оцінка тренду нестационарного процесу

4. Використання моделі декомпозиції для прогнозування часових рядів

5. Перелік графічного матеріалу (із зазначенням обов'язкових креслень, плакатів)

Слайди у форматі Power Point

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	<i>Отримання завдання</i>	<i>27.04.2023</i>	<i>Виконано</i>
2	<i>Огляд літературних джерел</i>	<i>27.04-29.03.2023</i>	<i>Виконано</i>
3	<i>Розробка теоретичної частини</i>	<i>29.03-01.04.2023</i>	<i>Виконано</i>
4	<i>Алгоритми моделювання АРПКС</i>	<i>01.04-03.04.2023</i>	<i>Виконано</i>
5	<i>Алгоритми моделювання декомпозиції</i>	<i>03.04-05.04.2023</i>	<i>Виконано</i>
7	<i>Оформлення пояснювальної записки</i>	<i>05.04-09.05.2023</i>	<i>Виконано</i>
8	<i>Перевірка роботи</i>	<i>09.05-13.05.2023</i>	<i>Виконано</i>
9	<i>Підготовка до захисту</i>	<i>13.05-18.05.2023</i>	<i>Виконано</i>

Дата видачі завдання 27.04.2023 року

Студент

\_\_\_\_\_ (підпис)

Репчінський О.В.

(Прізвище та ініціали)

Керівник роботи

\_\_\_\_\_ (підпис)

Тихонов В. А.

(Прізвище та ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка випускної кваліфікаційної роботи спеціаліста: 66 с., 33 рис., 2 табл., 21 посилання, 16 слайдів.

Об'єктом дослідження є векторні випадкові процеси та сигнали та їх статистична обробка.

Мета роботи – розробка нових класів моделей випадкових процесів, знаходження виразів для оцінок статистичних характеристик цих процесів, моделей лінійного передбачення, а також дослідження можливостей їх використання для підвищення ефективності обробки випадкових процесів, статистичне моделювання імітаційних та реальних процесів.

Методи дослідження. В роботі використали методи теорії множин, лінійних систем, різницевих лінійних рівнянь, методи статистичного моделювання, прикладний аналіз випадкових процесів.

Основними результатами роботи є: отримання моделі випадкових процесів у вигляді складових векторних випадкових процесів, отримання виразів для непараметричних та параметричних спектральних оцінок для запропонованої моделі випадкових процесів, подальший розвиток теорії лінійного передбачення класів процесів у вигляді складових векторних випадкових процесів.

Використання моделі дозволяє представити поточний процес у вигляді зваженої сукупності попередніх підвекторів процесу або підвекторів помилок передбачення. Таким чином, ця модель більш адекватна певним класам реальних процесів.

Галузь застосування – аналіз стаціонарних процесів та їх моделі лінійного передбачення.

Ключові слова: СКЛАДОВИЙ ВЕКТОРНИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС, ПІДВЕКТОР, КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ, СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПОТУЖНОСТІ, АВТОРЕГРЕСІЯ.

## THE ABSTRACT

Explanatory note of the specialist's graduation thesis: 66 pages, 33 figures, 2 tables, 21 references, 16 slides.

The object of research is vector random processes and signals and their statistical processing.

The purpose of the work is the development of new classes of models of random processes, finding expressions for estimating the statistical characteristics of these processes, models of linear prediction, as well as researching the possibilities of their use to increase the efficiency of processing random processes, statistical modeling of simulated and real processes.

Research methods. The work used methods of theory of sets, linear systems, differential linear equations, methods of statistical modeling, applied analysis of random processes.

The main results of the work are: obtaining a model of random processes in the form of component vector random processes, obtaining expressions for non-parametric and parametric spectral estimates for the proposed model of random processes, further development of the theory of linear prediction of classes of processes in the form of component vector random processes.

Using the model allows you to represent the current process as a weighted set of previous process subvectors or prediction error subvectors. Thus, this model is more adequate to certain classes of real processes.

The field of application is the analysis of stationary processes and their linear prediction models.

Keywords: COMPONENT VECTOR RANDOM PROCESS, SUBVECTOR, CORRELATION FUNCTION, POWER SPECTRAL DENSITY, AUTOREGRESSION.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	7
ВСТУП.....	8
1. Конструктивні моделі випадкових процесів.....	10
1.1 Простори зі скалярним добутком.....	10
1.2 Модель авторегресії.....	12
1.3 Модель ковзного середнього.....	15
2. Модель складених процесів.....	19
2.1 Векторні простори.....	19
2.2 Складні процеси.....	20
2.3 Скалярний добуток векторів у представленні СВВП.....	25
2.4 Кореляційна функція процесу в СВВП поданні.....	29
2.5 Перетворення Фур'є та спектральна щільність потужності СВВП.....	36
2.6 Модель авторегресії складових векторних випадкових процесів.....	41
3 Статистичне моделювання процесів у презентації СВВП.....	45
3.1 Моделювання випадкових процесів за допомогою моделей СВВП.....	45
3.2 Модель авторегресії СВВП.....	49
4. Застосування моделі сввп для аналізу реальних процесів.....	56
4.1 Характеристики справних та несправних електродвигунів за їх акустичними сигналами.....	56
4.2 Розпізнавання справних та несправних електродвигунів за їх акустичними сигналами.....	60
ВИСНОВОК.....	64
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	65
Додаток А – Слайди презентації.....	67

## **ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ**

СВВП – складовий векторний випадковий процес

АР – авторегресія

КС – ковзне середнє

БШ – білий шум

СЩП – спектральна щільність потужності

СКВ – середньоквадратичне відхилення

## ВСТУП

Сучасний аналіз випадкових процесів базується на дослідженні статистичних зв'язків відліків вибірки процесу, за якими розраховуються оцінки статистичних характеристик. Таким чином, відліки є найменшими елементами процесу. У той же час представляють практичний інтерес завдання аналізу та обробки сукупностей відліків як єдиного цілого. Наприклад, для дослідження тривалої зміни клімату за річними температурами не представляють інтерес періодичні, сезонні зміни в межах року. Важлива тривала тенденція змін середньомісячних температур з року в рік. Вже добре вивчена одинадцятирічна періодичність сонячної активності. Однак актуальною є задача дослідження більш тривалих змін сонячної активності. У мобільному радіозв'язку аналізуються не лише внутрішньоденні зміни завантаженості каналів зв'язку, але й навантаження на канали за тижнями та місяцями. У системах стиснення та аналізу мови враховуються тривалі зміни квазістаціонарних мовних сигналів. Тривалі зміни людської мови пов'язані з інтонацією мови, яка також враховується та передається в мобільному зв'язку. У кардіології важливе значення має аналіз ритмограм, що характеризують середньострокові та тривалі зміни серцевого ритму. Складні біологічні системи (ДНК, РНК, білки, амінокислоти тощо), хімічні сполуки (полімери, великі молекули тощо) складаються з послідовностей, які є молекулами або їх мономерними чи полімерними з'єднаннями. При вивченні структури послідовностей елементів та їх властивостей можна переходити від білків до елементів меншої довжини - амінокислот, а від них - до триплетів нуклеотидів. Закономірності побудови таких складних об'єктів, їх характеристики, вплив на макрооб'єкти (білки, клітини, організми, речовини) потрібно оцінювати, використовуючи нові великомасштабні методи представлення послідовностей у вигляді сукупностей лічильників.

Об'єкти, пов'язані з діяльністю людини, такі як мова, музичні твори, відеоізображення, описуються складними процесами та послідовностями. Подібними прикладами можуть бути біржові дані, екологічні показники,

соціологічні дані тощо. Важливо вивчати такі процеси та послідовності як на рівні статистичних зв'язків рахунків, так і в більшому масштабі.

У роботі розглянуті процеси, що можуть бути подані у вигляді послідовності векторів меншої довжини. Існує багато способів розбиття таких процесів, які визначаються природою аналізованого процесу та умовами вирішуваної задачі. Важливо, щоб нові структурні елементи (підвектори) процесу характеризувалися однорідними властивостями. З таким поданням можна ефективніше досліджувати статистичні властивості векторів залежно від закономірності зміни підвекторів. Використання такого представлення також є доцільним у випадку неефективності традиційних методів аналізу вказаних вище процесів.

Незважаючи на широке використання векторних просторів у статистичній радіотехніці, застосування методів розбиття процесів на сегменти (періодограми Уелча), запропонований в роботі метод подання випадкових процесів у вигляді сукупності процесів меншої довжини раніше не розроблявся. Таким чином, актуальним є створення нових класів моделей, які дозволять розширити можливості статистичного аналізу випадкових процесів та на їх основі розв'язання ряду прикладних задач статистичної радіотехніки.

Метою роботи є розробка нових класів моделей випадкових процесів, знаходження виразів для оцінок статистичних характеристик цих процесів, моделей лінійного передбачення, а також дослідження можливостей їх використання для підвищення ефективності різних радіоелектронних систем, статистичне моделювання імітаційних та реальних процесів.

Об'єктом дослідження є векторні випадкові процеси та сигнали та їх статистична обробка.

Предметом дослідження є модель подання випадкового процесу у вигляді складових векторних випадкових процесів.

У роботі використовувалися методи теорії множин, лінійних систем, різницевих лінійних рівнянь, методи статистичного моделювання, прикладний аналіз випадкових процесів.

# 1 КОНСТРУКТИВНІ МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

## 1.1 Простори зі скалярним добутком

У аналітичному огляді наукової літератури будуть представлені простори зі скалярним добутком, методи кореляційного аналізу випадкових процесів, короткий огляд моделей лінійного передбачення. Описано переваги та недоліки методів. Показано, що широкі дослідження у цій галузі підтверджують актуальність кваліфікаційної роботи.

У даному розділі наведено короткий огляд історії розвитку теорії лінійного передбачення, основних напрямків застосування цих моделей у задачах статистичної радіотехніки. Аналіз наукової літератури показує, що розроблені автором магістерської роботи моделі подання випадкових процесів раніше не пропонувалися.

Функціональний аналіз є основою методів обробки детермінованих та випадкових сигналів. У теорії сигналів вивчаються не окремі функції та їх перетворення, а функціональні простори, що складаються з елементів, для яких визначені деякі операції, зокрема лінійні. Для опису елементів лінійного простору використовуються більш загальні поняття (точки, вектори, довжини векторів тощо), ніж ті, що застосовуються для представлення фізичного простору. Важливими операціями в теорії сигналів є множення векторів, що є елементами лінійного простору. Зазвичай в якості множення використовується скалярний добуток двох векторів, який лежить в основі побудови гільбертових просторів. Однак деякі важливі характеристики сигналів, наприклад моменти та моментні функції вищих порядків, для отримання яких використовуються множення векторів, неможливо отримати, застосовуючи лише відомі способи множення векторів, а також без узагальнення поняття вектора.

Останнім часом були спроби сформулювати детерміністські та випадкові моделі теорії сигналів з використанням єдиного методологічного підходу на основі функціонального аналізу [1]. Однак ці спроби, як правило, не виходили за межі

відомих результатів функціонального аналізу. У кваліфікаційній роботі введено деякі визначення векторів випадкових процесів та операцій з ними, яких немає ані в функціональному, ані векторному аналізі. Це дозволило розширити застосування векторного представлення сигналів у статистичній радіотехніці при виведенні різних формул та співвідношень.

Сигнали, що характеризуються певними загальними властивостями, є елементами деякої множини. Якщо ввести метрику між двома елементами множини, яка визначає відстань між ними, то множина представляє собою простір сигналів [2]. Для перетворення елементів простору вводять достатньо прості алгебраїчні операції. Сигнальна точка в просторі описується своїми координатами, які є відліками сигналу в дискретні моменти часу. Тоді елементи цього множини, представлені своїми координатами і володіючи рядом властивостей, називаються векторами [3]. Множина векторів утворює лінійний простір. Якщо в лінійному просторі ввести операцію скалярного добутку двох векторів, то такі простори володіють більшими можливостями для опису просторів сигналів. Скалярний добуток - це відображення пар векторів лінійного простору на дійсну ось або комплексну площину [4]. Скалярний добуток векторів породжує норму, яка, в свою чергу, породжує метрику. Повний метричний простір із скалярним добутком називається гільбертовим простором, який широко застосовується для опису сигналів в рамках кореляційної теорії [5].

Застосовуючи класичний скалярний добуток, визначають статистичні характеристики випадкових сигналів. Будемо розглядати випадкові процеси з нульовим середнім. Тоді енергія сигналу та взаємна кореляція двох сигналів визначаються скалярними величинами [3]:

$$E = (\bar{x}(t), \bar{x}(t)) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \bar{x}^2(t) dt,$$

$$R_{x_1 x_2} = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \bar{x}_1(t) \bar{x}_2(t) dt.$$

Застосування скалярного добутку для знаходження статистичних характеристик множини векторів дозволяє отримати нові властивості статистичних характеристик. Особливості отриманих статистичних характеристик множини векторів були отримані завдяки використанню нових оцінок статистик першого та другого порядку, тобто математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції.

## 1.2 Модель авторегресії

Модель AP базується на кореляції показника випадкового процесу в поточний момент часу з деякою кінцевою або нескінченною кількістю показників у попередні моменти часу. Кореляційні зв'язки дозволяють здійснити регресію поточного показника на попередні. Такий тип регресії називається авторегресією. У рівнянні AP поточний показник представлений зваженою сумою попередніх з деякими коефіцієнтами ваги [6].

$$x[t] = \sum_{j=1}^p \Phi[j]x[t-j] + a[t], \quad (1.1)$$

де  $\Phi[j]$  – коефіцієнти AP,  $a[t]$  – некорельовані випадкові відліки,  $p$  – порядок моделі AP.

Величина

$$\tilde{x}[t] = \sum_{j=1}^p \Phi[j]x[t-j],$$

називається передбаченням випадкової величини. Різниця між поточним значенням відліку та його передбаченням називається помилкою передбачення.

$$a[t] = x[t] - \tilde{x}[t].$$

Величина  $a[t]$  характеризує максимальну точність передбачення поточного вимірювання, а її статистичні властивості визначають вибір порядку моделі АР.

За формулою (1.1) бачимо, що побудова АР-моделі випадкового процесу полягає у знаходженні коефіцієнтів АР та визначенні порядку  $p$ . Помноживши праву та ліву частини (1.1) на  $x[t-i]$  та усереднюючи, можна отримати систему  $p+1$  рівнянь

$$R[i] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]R[j-i] = 0, \quad i = 1 \div p, \quad (1.2a)$$

$$R[0] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]R[j] = D_a, \quad (1.2b)$$

де  $R[i] = E\{x[t]x[t-i]\}$  – значення функції кореляції випадкового процесу,  $D_a$  – дисперсія помилок прогнозування моделі АР,  $R[0]$  – дисперсія випадкового процесу  $x[t]$ . набір рівнянь (1.2a) і (1.2b) називається повною системою рівнянь Юла-Уокера. Розв'язком цієї системи є коефіцієнти АР та дисперсія помилок прогнозування. При виведенні рівнянь (1.2a,б) було враховано, що

$$E\{a[t]a[t-i]\} = 0, \quad i \neq 0, \quad i > 0, \quad (1.3a)$$

$$E\{a[t]x[t-i]\} = 0, \quad i \neq 0, \quad i > 0. \quad (1.3b)$$

Відношення (1.3a,б) впливають з некорельованості помилок передбачення  $a[t]$ . Розв'язок системи рівнянь (1.2a) можна подати у матричному вигляді

$$\bar{\Phi} = R_p^{-1} \bar{R},$$

де

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi[1] \\ \Phi[2] \\ \vdots \\ \Phi[p] \end{bmatrix}, R_p = \begin{bmatrix} R[0] & R[1] & \cdots & R[p-1] \\ R[1] & R[0] & \cdots & R[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R[p-1] & R[p-2] & \cdots & R[0] \end{bmatrix}, \bar{R} = \begin{bmatrix} R[1] \\ R[2] \\ \vdots \\ R[p] \end{bmatrix}.$$

Як видно з (1.2а), рівняння не зміниться, якщо замість  $R[i]$  використовувати нормовані значення функції кореляції  $r[i] = R[i]/R[0]$ , які будемо називати коефіцієнтами кореляції. Очевидно, що при цьому параметри моделі АР залишаться незмінними.

Формула для знаходження спектра моделі АР лежить в основі параметричного спектрального оцінювання. Для її отримання розглянемо процес АР як реакцію фільтра  $x[t]$ , на вхід якого подаються некорельовані відліки  $a[t]$ . Використовуючи  $z$ -перетворення, можна показати, що  $z$ -перетворення передавальної функції АР фільтра має вигляд

$$H(z) = 1/\Phi(z),$$

де

$$\Phi(z) = -\sum_{i=1}^p \Phi[i]z^{-i}, \quad \Phi[0] = -1.$$

$z$ -перетворення спектральної щільності потужності (СЦП) вихідного та вхідного процесів пов'язані співвідношенням

$$P(z) = |H(z)|^2 P_a[z] = P_a[z]/|\Phi(z)|^2. \quad (1.4)$$

Щоб знайти СЦП вихідного АР процесу необхідно (1.4) зробити заміну  $z = e^{j2\pi fT}$  і покласти, що для білого шуму  $P_a[z] = D_a$  постійна величина. Тоді з (1.4) випливає

$$P(f) = D_a \left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] e^{-j2\pi fT} \right|^2. \quad (1.5)$$

Вираз (1.5) широко використовується в параметричному методі спектральної оцінки випадкових процесів. Як параметри, що повністю характеризують спектральну оцінку випадкового процесу, виступають коефіцієнти АР та порядок моделі. Параметрична спектральна оцінка має ряд переваг порівняно з традиційними методами спектральної оцінки. До них відносяться: вище спектральне розрішення при використанні коротких вибірок, відсутність бічних лепестків.

### 1.3 Модель ковзного середнього

Модель АР, розглянута вище, не може раціонально описувати деякі види випадкових процесів. Випадкові процеси зі значною шириною СЦП описуються моделлю ковзного середнього (КС). В основі моделі КС лежить різницеве рівняння.

$$x[t] = - \sum_{i=1}^q Q[i] a[t-i] + a[t], \quad (1.6)$$

де  $Q[i]$  – коефіцієнти, а  $q$  – порядок моделі КС. Щоб отримати рівняння, які пов'язують коефіцієнти КС та коефіцієнти кореляції, помножимо (1.6) на  $x[t-i]$  і візьмемо математичне очікування. Отримаємо:

$$R[0] = \left( \sum_{i=1}^q Q^2[i] + 1 \right) \sigma_a^2, \quad j = 0, \quad (1.7a)$$

$$R[j] = \begin{cases} (-Q[j] + Q[1]Q[j+1] + \dots + Q[q-j]Q[q])\sigma_a^2, & j = 1, 2, \dots, q \\ 0, & j > q \end{cases}. \quad (1.76)$$

Підставивши (1.7а) в (1.7б), перетворимо систему рівнянь (1.7б) до вигляду

$$r[j] = \begin{cases} \frac{-Q[j] + Q[1]Q[j+1] + \dots + Q[q-j]Q[q]}{1 + \sum_{i=1}^q Q^2[i]}, & 1 \leq j \leq q, \\ 0, & j > q. \end{cases} \quad (1.8)$$

Як бачимо з (1.8), отримана система нелінійних рівнянь не дозволяє виразити в явному вигляді коефіцієнти КС через  $r[j]$ . Тому розв'язання в загальному випадку повинно знаходитися чисельними методами.

Вираз для спектру процесу КС може бути отриманий за допомогою методу, описаного для моделі процесу АР. Параметрична оцінка СЩП процесу КС визначається формулою

$$P(f) = \left| 1 - \sum_{i=1}^q Q[i]e^{-j2\pi fi} \right|^2 \sigma_a^2,$$

Ця формула використовується для параметричного спектрального аналізу широкосмугових випадкових процесів. Використовуючи оператор КС, різницеve рівняння (1.6) можна записати у вигляді

$$x[t] = Q(z)a[t],$$

де оператор КС описується виразом.

$$Q(z) = 1 - Q_1 z - Q_2 z^2 - \dots - Q_q z^q.$$

Щоб процес КС був зворотнім, необхідно, щоб корені характеристичного рівняння (1.9) лежали за межами одиничного комплексного кола. У випадку, коли використовується характеристичне рівняння вигляду

$$1 - Q[1]z - Q[2]z^2 - \dots - Q[q]z^q = 0,$$

для виконання умови зворотності корені рівняння повинні лежати всередині одиничного кола на комплексній площині.

Огляд літератури на тему кваліфікаційної роботи показує, що формування теорії статистичного аналізу випадкових процесів як самостійного наукового напрямку має важливе застосування. Перш за все, це пов'язано з широким поширенням в природі випадкових процесів, які описуються різними статистичними моделями та представленнями, зокрема моделями лінійного передбачення. Різноманітність типів реальних випадкових процесів часто ускладнює їх обробку. Як показано в огляді досягнень кореляційної теорії, до них можна також віднести розвиток методів лінійного передбачення випадкових процесів. Конструктивність моделей лінійного передбачення знайшла своє відображення в багатьох застосуваннях у наукових дослідженнях та технічних застосуваннях. Таким чином, аналіз літератури показав, що створення нових статистичних моделей є актуальним і дозволяє вирішувати складні задачі статистичної радіотехніки.

Проведений огляд наукової літератури на тему кваліфікаційної роботи дозволяє зробити такі завдання кваліфікаційної роботи:

1. Визначення принципів побудови моделей випадкових процесів у вигляді сукупностей підвекторів.
2. Розробка теорії побудови векторних просторів, а також розроблених класів складних процесів.

3. Вивід формул для оцінки статистичних характеристик процесів, поданих у вигляді сукупності підвекторів.

4. Розробка моделей лінійного передбачення таких процесів: авторегресії та ковзного середнього.

5. Створення методів параметричного та непараметричного спектрального оцінювання складних векторних випадкових процесів. Дослідження спектрів імітаційних та реальних випадкових процесів.

6. Побудова моделей лінійного передбачення імітаційних та реальних випадкових процесів.

7. Розробка методів вирішення прикладних задач статистичної радіотехніки.

## 2 МОДЕЛЬ СКЛАДЕНИХ ПРОЦЕСІВ

### 2.1 Векторні простори

Багато стаціонарних та нестаціонарних випадкових процесів характеризуються не лише короткостроковими змінами (коливаннями або флуктуаціями), а й середньостроковими та довгостроковими змінами. Існуючі методи статистичного аналізу не дозволяють ефективно досліджувати характеристики таких різномасштабних змін. Методи аналізу та обробки сигналів та процесів, як правило, працюють з поняттями відліків або значеннями випадкової функції в точках. Інформаційні параметри або статистичні характеристики системи описують динаміку зміни процесу. У даному розділі значно узагальнена нова модель представлення процесів у вигляді сукупності процесів меншої довжини.

Випадковий процес повністю описується або набором багатовимірних щільностей розподілу ймовірностей, або набором кумулянтних або моментних функцій всіх порядків. Гауссівські процеси повністю описуються кореляційними функціями. У нестихаючих процесах основна інформація також заключена в кореляційних функціях.

Використання кореляційної функції, яка описує статистичні зв'язки першого порядку, дозволяє вирішувати широкий спектр прикладних задач методом лінійного прогнозування. У розділі, заснованому на моделях лінійного прогнозування, синтезуються фільтри для виділення і формування сигналів, отримані параметричні спектральні оцінки.

Запропоновану модель представлення випадкових процесів і послідовностей зручно описувати у векторній формі. Тому коротко зупинимось на принципах побудови векторних просторів. Сукупність сигналів, яка характеризується певними загальними властивостями, є елементами деякої множини. Якщо ввести метрику між двома елементами множини, яка визначає відстань між ними, то множина представляє собою простір сигналів [1, 2]. Для перетворення елементів простору вводять достатньо прості алгебраїчні операції. Сигнальна точка в просторі

описується своїми координатами, які є відліками сигналу в дискретні моменти часу. Тоді елементи цієї множини, представлені своїми координатами які володіють рядом властивостей, називаються векторами [3]. Множина векторів утворює лінійний простір. Якщо в лінійному просторі ввести операцію скалярного добутку двох векторів, то такі простори мають більші можливості для опису просторів сигналів. Скалярний добуток - це відображення пари векторів лінійного простору на дійсну ось або комплексну площину [4]. Скалярний добуток векторів породжує норму, яка, в свою чергу, породжує метрику. Повний метричний простір із скалярним добутком називається гільбертовим простором, яке широко застосовується для опису сигналів в рамках кореляційної теорії [5].

Описаний вище класичний підхід до побудови гільбертових просторів не дозволяє зручним чином побудувати моделі деяких класів складних сигналів та процесів. До таких класів відносяться процеси, які можна розбити на послідовність процесів меншої довжини, що мають деякі загальні властивості. Наприклад, сезонні ряди, періодичні та неперіодичні випадкові процеси, біомедичні сигнали і т.д. Запропоновані класи процесів також включають періодично корельовані випадкові процеси [7]. Розроблений в роботі метод аналізу подібних сигналів дозволяє витягати інформацію, яку неможливо отримати звичайними методами статистичного аналізу.

## **2.2 Складні процеси**

Сучасні методи аналізу та обробки сигналів і процесів оперирують поняттями відліків або величинами функції в точках, визначених значеннями аргументів. Інформаційні параметри або статистичні характеристики системи характеризують динаміку зміни процесу. Багато стаціонарних і нестаціонарних випадкових процесів характеризуються не лише короткостроковими змінами (коливаннями або флуктуаціями), але й середньостроковими та довгостроковими змінами [8]. Сучасні методи статистичного аналізу не дозволяють ефективно досліджувати

характеристики таких різномасштабних змін. Формалізуємо модель представлення процесів у вигляді сукупності процесів меншої довжини.

Розглянемо стаціонарний випадковий процес  $X[t]$  у вигляді вектора  $\vec{x}[t]$  в лінійному просторі, який визначається своїми координатами  $x[1], x[2], \dots, x[N]$ . Нехай такий випадковий процес можна представити у вигляді послідовності підвекторів  $\vec{x}_i$ , однакової довжини  $n$  з однорідними статистичними властивостями. Тут введено поняття «підвектора»  $\vec{x}_i$  вектора  $\vec{x}[t]$ , за аналогією з відліком  $x[t]$  вибірки  $X[t]$ . Зміна підвекторів у часі описується стаціонарними статистичними характеристиками або, на їх основі, статистичними динамічними моделями. Назвемо такий стаціонарний випадковий процес «складеним векторним випадковим процесом» (СВВП)  $\vec{x}^n[t]$ . Фіксований верхній індекс  $n$  вказує на довжину підвектора і не є змінною. Як буде показано нижче, статистичні характеристики СВВП суттєво залежать від вибору відповідної довжини підвектора  $n$ . Зрозуміло, що СВВП є узагальненням поняття випадкового процесу, в якому його відліки об'єднуються і замінюються підвекторами  $\vec{x}_i$  довжини  $n$ . При  $n=1$  СВВП стає звичайним стаціонарним процесом, представимим у вигляді вектора  $\vec{x}[t]$ . Таке природне узагальнення дозволяє визначити вирази для оцінок статистичних характеристик СВВП, синтезувати статистичні моделі.

Процеси можна представити у вигляді сукупності підвекторів декількома способами. Суміжні підвектори однакової довжини можуть не мати спільних відліків і включати всі відліки процесу. Підвектори можуть перекриватися, тобто мати спільні відліки і включати всі відліки процесу. Підвектори можуть не перетинатися і не повністю містити всі відліки процесу. У останньому випадку деякі відліки не входять в жоден з підвекторів. Пропущені відліки не є інформативними і при розрахунку статистичних характеристик не враховуються. Такі способи розбиття вектора на підвектори показані на рис. 2.1.

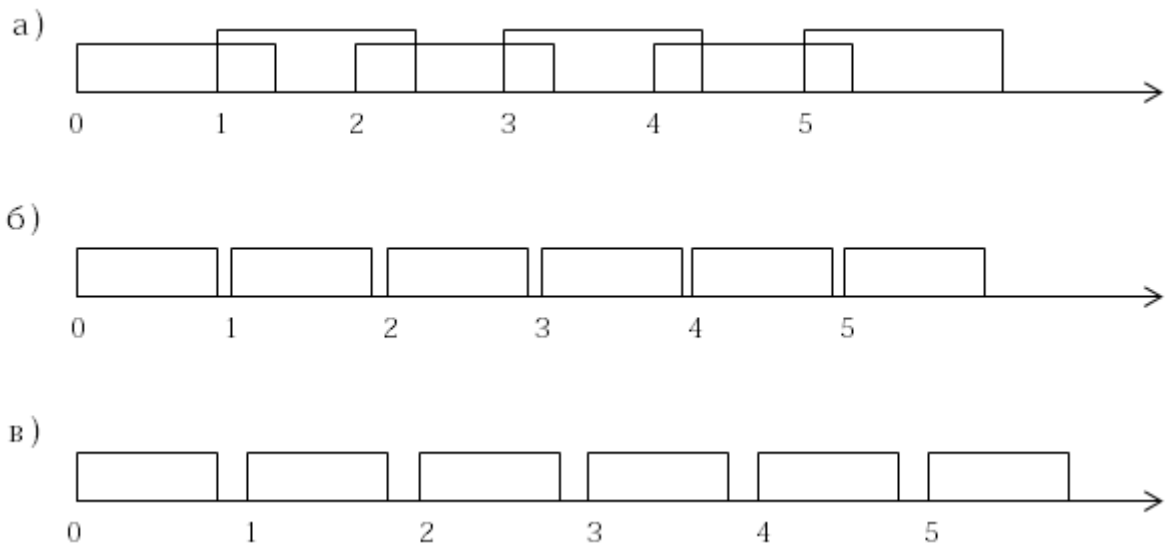


Рисунок 2.1 – Три способи розбиття вектора на підвектори: а - сусідні підвектори, б - перетинаються підвектори, в - неперетинаються підвектори

Як буде показано нижче, також практичний інтерес представляє розбиття послідовності підвекторів на підвектори меншої довжини, наприклад, за допомогою способу, показаного на рис. 2.2. Така модель процесу є цікавою, наприклад, коли є кілька однорідних сукупностей вимірів з різним періодом. У наведеному прикладі (рис. 2.2) три коротких підвектори поміщалися в один довгий підвектор. Використовуючи способи розбиття, показані на рис. 2.1, можна отримати інші представлення послідовності, наприклад, декількома наборами векторів різної довжини.

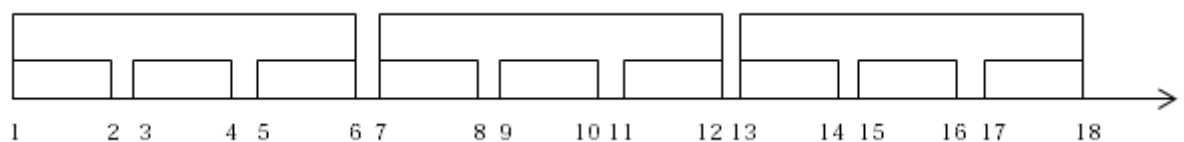


Рисунок 2.2 – Розбиття вектора на вкладені підвектори

Під корельованим процесом у СВВП представленні  $\bar{x}^n[t]$  розуміється процес, в якому існують статистичні зв'язки першого порядку між підвекторами  $\bar{x}_i$ . Представимо процес  $\bar{x}^n[t]$  у вигляді послідовності підвекторів

$$\vec{x}^n[t] = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N/n}\}.$$

Кожен підвектор визначається координатами вектора  $\vec{x}^n[t]$ :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \{x[1], x[2], \dots, x[n]\}, \quad \vec{x}_2 = \{x[n+1], x[n+2], \dots, x[2n]\}, \dots \\ \dots, \vec{x}_i &= \{x[(i-1)n+1], \dots, x[in]\}, \dots, \vec{x}_{N/n} = \{x[N-n+1], \dots, x[N]\}, \end{aligned}$$

де  $i$  – номер підвектора,  $N$  – номер останнього виміру останнього підвектора. Якщо кількість вимірів вектора не кратна довжині підвектора  $n$ , то в якості  $N/n$  береться ціла частина цього числа, тобто  $N/n \sim \lfloor N/n \rfloor$ .

Отриманий векторний процес можна представити не лише як послідовність своїх координат, а також як послідовність векторів малої довжини (підвекторів). Це представлення зручно записати у матричному вигляді, де рядки матриці виступають підвекторами.

$$\vec{x}^n = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} \\ \vdots & & & \\ x_{n(m-1)} & x_{n(m-1)+1} & \dots & x_{m \cdot n - 1} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

У такому представленні скалярний добуток векторів у ВПСП зводиться до матричного добутку.

Якщо вектор  $\vec{x}^n$  представляється сукупністю двох підвекторів різної довжини, то кожен елемент матриці (2.1) є підвектором, який в свою чергу представляється послідовністю координат підвектора. Використовуючи поняття сукупності двох підвекторів, можна представити вектор матрицею.

$$\bar{x}^{n_1, n_2} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{n_2} & \bar{x}_1^{n_2} & \cdots & \bar{x}_{n_1-1}^{n_2} \\ \bar{x}_{n_1}^{n_2} & \bar{x}_{n_1+1}^{n_2} & \cdots & \bar{x}_{2n_1-1}^{n_2} \\ \vdots & & & \\ \bar{x}_{m-n_1}^{n_2} & \bar{x}_{m-n_1+1}^{n_2} & \cdots & \bar{x}_{m-1}^{n_2} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Ця матриця перетворюється до нової тривимірної матриці, рядками якої є:

$$\begin{aligned} & [\{x_0, x_1, \dots, x_{n_2-1}\} \quad \{x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots, x_{2n_2-1}\} \quad \cdots \quad \{x_{n_1 n_2 - n_2}, x_{n_1 n_2 - n_2 + 1}, \dots, x_{n_1 n_2 - 1}\}], \\ & [\{x_{n_1 n_2}, x_{n_1 n_2 + 1}, \dots, x_{n_1 n_2 + n_2 - 1}\} \quad \{x_{n_1 n_2 + n_2}, x_{n_1 n_2 + n_2 + 1}, \dots, x_{n_1 n_2 + 2n_2 - 1}\} \quad \cdots \\ & \quad \quad \quad \cdots \quad \{x_{2n_1 n_2 - n_2}, x_{2n_1 n_2 - n_2 + 1}, \dots, x_{2n_1 n_2 - 1}\}], \end{aligned}$$

а останній рядок має вигляд

$$\begin{aligned} & [\{x_{m n_1 n_2 - n_1 n_2}, x_{m n_1 n_2 - n_1 n_2 + 1}, \dots, x_{m n_1 n_2 - n_1 n_2 + n_2 - 1}\} \quad \cdots \\ & \{x_{m n_1 n_2 - n_1 n_2 + n_2}, x_{m n_1 n_2 - n_1 n_2 + n_2 + 1}, \dots, x_{m n_1 n_2 - 2n_2 - 1}\} \quad \cdots \\ & \quad \quad \quad \cdots \quad \{x_{m n_1 n_2 + n_1 n_2 - n_2}, x_{m n_1 n_2 + n_1 n_2 - n_2 + 1}, \dots, x_{m n_1 n_2}\}] \end{aligned}$$

Аналогічні векторні та матричні форми можна побудувати для будь-якої кількості вкладених векторів. При наявності вкладеності підвекторів, вектор у представленні СВВП записується у вигляді багатовимірної матриці. Розмірність матриці на одиницю більша за кількість підвекторів, якими представляється вектор.

Це уявлення припустимо як для детермінованих процесів і послідовностей, так і для випадкових. По суті, в такому уявленні послідовність лічильників замінюється їхньою сукупністю, тобто підвектором. Якщо довжина підвектора дорівнює одиниці, то всі операції в уявленні СВВП еквівалентні відомим операціям [9, 10]. Заміна лічильника вектором з відповідним змінюванням математичних операцій над

ними - основний метод побудови теорії таких уявлень. Операції над векторами в даному уявленні будуть введені нижче під час побудови відповідних просторів.

### 2.3 Скалярний добуток векторів у представленні СВВП

Для векторів у представленні СВВП, крім лінійних операцій, необхідно ввести операцію множення векторів. Важливою операцією є скалярний добуток векторів [11, 12]. Використовуючи скалярний добуток, отримують такі характеристики векторів, як норма, яка у свою чергу породжує метрику. Через скалярний добуток визначається дисперсія, кореляційна функція, спектр Фур'є та інші ортогональні розкладання. Умова ортогональності векторів, кут між векторами визначаються з використанням скалярного добутку.

Скалярний добуток довільних векторів  $\vec{s}$  і  $\vec{x}$  відображає ступінь їх близькості за формою та положенням у просторі процесів.

$$(\vec{s}, \vec{x}) = \|\vec{s}\| \|\vec{x}\| \cos \varphi,$$

де  $\|\vec{s}\|$  і  $\|\vec{x}\|$  - норми векторів,  $\varphi$  - кут між векторами. Обчислення скалярного добутку векторів  $\vec{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  та  $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  зазвичай проводиться за відліками процесів або функціями, які їх описують

$$(\vec{s}, \vec{x}) = \sum_{k=0}^N s_k x_k.$$

Для дискретних процесів в  $N$ -мірному просторі скалярний добуток векторів  $\vec{x}^n = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$  та  $\vec{s}^n = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_m\}$  в поданні СВВП виражається через суму скалярних добутків під векторів

$$\begin{aligned}
(\vec{s}^n, \vec{x}^n) &= \sum_{k=0}^{m-1} \vec{s}_k \vec{x}_k = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} s_{ki} x_{ki} = \\
&= (s_0 x_0 + s_1 x_1 + \dots + s_{n-1} x_{n-1}) + \\
&+ (s_n x_n + s_{n+1} x_{n+1} + \dots + s_{2n-1} x_{2n-1}) + \dots + \\
&+ (s_{N-n} x_{N-n} + s_{N-n+1} x_{N-n+1} + s_N x_N).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Приведемо вираз для скалярного добутку вектора, представленого сукупністю двох вкладених підвекторів. Вектор представлений  $m$  підвекторами довжиною  $n_1$ , кожен з яких, в свою чергу, представлений підвекторами довжиною  $n_2$  координат. Для вкладених підвекторів скалярний добуток записується у вигляді

$$\begin{aligned}
(\vec{s}^{n_1, n_2}, \vec{x}^{n_1, n_2}) &= \sum_{k=0}^{m-1} (\vec{s}_k^{n_2}, \vec{x}_k^{n_2}) = \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^{n_1-1} (\vec{s}_{k,v}, \vec{x}_{k,v}) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^{n_1-1} \sum_{u=0}^{n_2-1} (s_{k,v,u} x_{k,v,u}),
\end{aligned}$$

де  $\vec{s}_k^{n_2}$  та  $\vec{x}_k^{n_2}$  –  $k$ -і підвектори, які складаються з  $n_1$  підвекторів  $\vec{s}_{k,v}$  та  $\vec{x}_{k,v}$  довжиною  $n_2$ ,  $s_{k,v,u}$  та  $x_{k,v,u}$  – координати з індексом  $n_1$  векторів  $\vec{s}^{n_1, n_2}$  та  $\vec{x}^{n_1, n_2}$  підвекторів з індексами  $v$  та  $u$ .

Розглянемо ряд прикладів, які демонструють спосіб отримання скалярного добутку. Знайдемо скалярний добуток двох векторів представлених суміжними підвекторами довжиною 3 відліки. Вектори складаються з послідовностей підвекторів довжиною 3:

$$\vec{s}_0 = \{s_0, s_1, s_2\}, \vec{s}_1 = \{s_3, s_4, s_5\}, \dots, \vec{s}_m = \{s_{N-2}, s_{N-1}, s_N\};$$

$$\vec{x}_0 = \{x_0, x_1, x_2\}, \vec{x}_1 = \{x_3, x_4, x_5\}, \dots, \vec{x}_m = \{x_{N-2}, x_{N-1}, x_N\}.$$

Скалярний добуток даних векторів у поданні СВВП дорівнює

$$\begin{aligned} (\vec{s}^3, \vec{x}^3) &= \sum_{k=0}^{m-1} (\vec{s}_k, \vec{x}_k) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^2 s_{k \cdot i} x_{k \cdot i} = (s_0 x_0 + s_1 x_1 + s_2 x_2) + \\ &+ (s_3 x_3 + s_4 x_4 + s_5 x_5) + \dots + (s_{N-2} x_{N-2} + s_{N-1} x_{N-1} + s_N x_N) = (\vec{s}, \vec{x}). \end{aligned}$$

З даного виразу видно, що в даному випадку скалярний добуток двох векторів співпадає зі скалярним добутком цих векторів в поданні СВВП.

Дія оператора зсуву  $\hat{z}^{\pm i}$  на вектор в поданні СВВП зводиться до зсуву індексу підвектора  $\pm i$

$$\begin{aligned} \hat{z}^{\pm i} \vec{x}^n &= \vec{x}^{\pm i \cdot n} = \hat{z}^{\pm i} \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m-1}\} = \{\vec{x}_{\pm i}, \vec{x}_{1 \pm i}, \vec{x}_{m-1 \pm i}\} = \\ &= \{x_{\pm i \cdot n}, x_{\pm i \cdot n + 1}, \dots, x_{\pm i \cdot n + n - 1}\}, \{x_{\pm i n + 2n}, x_{\pm i n + 2n + 1}, \dots, x_{\pm i n + 3n - 1}\}, \dots, \\ &\dots, \{x_{\pm i n + m n - n}, x_{\pm i n + (m-2)n - n + 1}, \dots, x_{i n + (m-1)n}\}. \end{aligned}$$

Для наведеного вище прикладу при  $i = +1$  маємо скалярний добуток

$$\begin{aligned} (\vec{s}^3, \vec{x}^{3,+1}) &= \sum_{k=0}^{m-2} (\vec{s}_k, \vec{x}_{k+1}) = (s_0 x_3 + s_1 x_4 + s_2 x_5) + (s_3 x_6 + s_4 x_7 + s_5 x_8) + \dots + \\ &+ (s_{N-5} x_{N-2} + s_{N-4} x_{N-1} + s_{N-3} x_N). \end{aligned}$$

Т.ч.

$$(\vec{s}^3, \vec{x}^{3,+1}) = \sum_{u=0}^{N-3} s_u x_{u+3}.$$

Для довільного позитивного зсуву маємо

$$(\vec{s}^n, \vec{x}^{n,+i}) = \sum_{u=0}^{N-in} s_u x_{u+i \cdot n}.$$

При негативному зсуві вираз для скалярного добутку набуває вигляду

$$(\vec{s}^n, \vec{x}^{n,-i}) = \sum_{u=i \cdot n}^N s_u x_{u-i \cdot n}.$$

Для отримання статистик другого порядку СВВП необхідно добуток координат вектора замінити на скалярний добуток підвекторів. Введемо скалярний добуток для підвекторів СВВП

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+k}) = \sum_{j=1}^n (x[(i-1)n + j]x[(i-1)n + j + kn]),$$

де  $k$  – зсув векторів, які дорівнюють  $1, 2, \dots, \frac{N}{n} - 1$ .

З наведених вище виразів для скалярного добутку видно, що у загальному випадку воно відрізняється від традиційного. Отримані вирази важливі при знаходженні взаємних кореляційних функцій процесів у СВВП поданні.

У СВВП моделі вектори процесу видаються вектором-стовпцем, елементами якого є підвектори, а також матрицею, елементи рядків якої є координати підвекторів. Вище було показано, що вектор процесу можливо представити використовуючи вкладені підвектори. Розмірність матричного подання визначається

кількістю вкладених підвекторів. Тривимірний матриця необхідна для відображення СВВП з подвійним підвектором, чотиривимірний матриця відображає модель СВВП з потрійним підвектором і т.д.

Результатом скалярного добутку є скаляр. Тому для матричного подання моделі СВВП необхідно визначити таке матричне подання, результатом якого є скаляр. Скалярний добуток матриць впливає з відповідного скалярного добутку векторів у вигляді СВВП. Використовуючи (2.1), скалярний добуток двох СВВП дорівнює

$$(\vec{s}^n, \vec{x}^n) = s^n (x^n)^T = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \\ \vdots & & & \\ s_{N-n} & s_{N-n+1} & \dots & s_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 & x_n & \dots & x_{N-n} \\ x_1 & x_{n+1} & \dots & x_{N-n+1} \\ \vdots & & & \\ x_{n-1} & x_{2n-1} & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

Враховуючи (2.3), правило скалярного добутку матриць формулюється наступним чином: необхідно перемножити координати рядка першої матриці на відповідні координати стовпця другої матриці та скласти. До отриманої суми додати суму добутків координат наступних рядків першої матриці та стовпців другої матриці й т.д.

## 2.4 Кореляційна функція процесу в СВВП поданні

Кореляційна функція процесів характеризує взаємну динаміку їх змін, тобто ступінь подібності їх форми. Для цього оцінюється статистичний зв'язок першого порядку відліків процесів [12]. З формальної точки зору взаємна нормована кореляція визначається косинусом кута між векторами, який змінюється від -1 до

+1. Косинус кута виражається через скалярний добуток векторів і не залежить від їхньої норми.

Для СВВП подання можливо ввести додаткові кореляційні функції, які дають характеристику довгострокової динаміки процесу. Кореляційна функція СВВП показує, як змінюються форми сукупності відліків процесів, що аналізуються при зсуві підвекторів на шаг кратний довжині підвектора. При цьому враховуються усі координати векторів, які визначають форми процесів. В кореляційній функції СВВП виключається кореляція між відліками, яка часто маскує довгострокову кореляцію процесу.

Кореляційна функція СВВП визначається через скалярний добуток

$$R_{sx}^n[i] = (\vec{s}^n, \vec{x}^{i \cdot n}).$$

Нормована кореляційна функція дорівнює

$$r_{sx}^n[i] = \frac{(\vec{s}^n, \vec{x}^{i \cdot n})}{\|\vec{s}\| \|\vec{x}\|}$$

Відповідні вирази для автокореляційної функції мають вигляд

$$R^n[i] = R_{xx}^n[i] = (\vec{x}^n, \vec{x}^{i \cdot n}).$$

Нормована автокореляційна функція визначається виразом

$$r_{xx}[i] = \frac{(\vec{x}^n, \vec{x}^{i \cdot n})}{\|\vec{x}\|^2}.$$

СВВП із вкладеними кількома підвекторами описується кореляцією виду

$$R^{n_1, \dots, n_v} [i] = (\bar{x}^{n_1, \dots, n_v}, \bar{x}^{n_1, \dots, n_v, +i}),$$

де на  $+i$  зсувається найбільший індекс з набору індексів, які дорівнюють довжинам підвекторів:  $n_1, n_2, \dots, n_v$ .

Середні значення СВВП  $\bar{x}^n[t]$ , що складається з підвекторів довжиною  $n$ , визначаються виразом

$$\bar{x}^n = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^{N/n} \bar{x}_i,$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x[(i-1)n + v],$$

т.ч. математичним очікуванням від середніх значень підвекторів. Наприклад, якщо вектор  $\bar{x}^n[t]$  це сукупність середньомісячних температур за декілька років, то для отримання середнього СВВП необхідно усереднити середньорічні температури за усі роки спостереження. Можна показати, що середнє значення СВВП співпадає з середнім значенням процесу  $\bar{X}$ . Очевидно, що

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x[t] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N/n} \sum_{v=1}^n x[(i-1)n + v] = \bar{x}^n.$$

При  $N$  – некратній довжині підвектора  $n$  справедливо співвідношення  $\bar{X} \approx \bar{x}^n$ .

Центрована вибірка вектора визначається наступним чином

$$\bar{x}_c^n[t] = \bar{x}^n[t] - \bar{x}^n = \{\bar{x}_1 - \bar{x}^n, \dots, \bar{x}_2 - \bar{x}^n, \dots, \bar{x}_{N/n} - \bar{x}^n\}$$

Далі, для спрощення виразів, гадаємо, що СВВП  $\bar{x}^n[t]$  являє собою центрований вектор з нульовим математичним очікуванням.

Для отримання кореляційної функції СВВП необхідно добуток координат вектора замінити на скалярний добуток підвекторів [9]. Застосовуючи усереднення скалярного добутку, отримаємо формулу оцінки кореляційної функції СВВП для суміжних підвекторів

$$R^n[k] = \frac{1}{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x[(i-1)n+j]x[(i-1)n+j+kn]). \quad (2.4a)$$

Можна показати, що цей вираз можливо спростити

$$R[k] = \frac{1}{N-kn} \sum_{i=0}^{N-kn-1} (x[i]x[i+kn]).$$

При  $n=1$  з виразу (2.4a) може бути отримана відома формула оцінки кореляційної функції для стаціонарного випадкового процесу

$$R[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k-1} (x[i]x[i+k]). \quad (2.4b)$$

Отже, кореляційна функція СВВП є узагальненням звичайної функції кореляції.

З (2.4a) видно, що кореляційна функція СВВП описує статистичний зв'язок першого порядку між підвекторами. Представимо цей вираз у вигляді

$$R^n[k] = \frac{1}{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+k}) = R^n[i, i+k], \quad (2.5)$$

де  $i$  – номер підвектора СВВП.

Формула оцінки кореляційної функції СВВП для підвекторів, що перетинаються

$$R^n[k] = \frac{1}{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x[(i-1)(n-g)+j]x[(i-1)(n-g)+j+k(n-g)]),$$

де  $g$  – кількість загальних відліків для двох сусідніх підвекторів. У випадку підвекторів, що не перетинаються, формула оцінки кореляційної функції СВВП має вигляд

$$R^n[k] = \frac{1}{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x[(i-1)(n-1+g)+j]x[(i-1)(n-1+g)+j+k(n-1+g)]),$$

де  $g$  – кількість відліків між двома сусідніми підвекторами.

Розглянемо властивості кореляційної функції СВВП. Покажемо, що кореляційна функція СВВП парна. Нехай  $i, l$  – номери підвекторів СВВП, причому  $l = i + k$ . Для стаціонарного процесу СВВП кореляційна функція задовільняє співвідношенню, що випливає з (2.5)

$$R^n[i, l] = R^n[i, l + k] = R^n[l - k, l].$$

Оскільки кореляційна функція стаціонарного процесу не залежить від  $i$  та  $l$ , а тільки від зсуву  $k$ , маємо

$$R^n[k] = R^n[-k].$$

Отже, кореляційна функція СВВП є парною функцією.

У матричному поданні СВВП автокореляційна функція визначається скалярним добутком матриць

$$R^n[i] = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} \\ \vdots & & & \\ x_{N-in-n} & x_{N-in-n+1} & \dots & x_{N-in-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & x_{in} & \dots & x_{N-n} \\ 0 & \dots & 0 & x_{in+1} & \dots & x_{N-n+1} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & x_{in+n-1} & \dots & x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

де кількість нульових стовпців у другій матриці дорівнює зсуву  $i$ . З (2.6) очевидно, що в кореляційній функції СВВП із зсувом  $i$ , враховуються тільки значення кореляційної функції процесу зі зсувом, що кратний  $n$ , т.ч.

$$R^n[i] = R[in]. \quad (2.7)$$

Застосування СВВП проріджує (децимує) кореляційну функцію процесу, усуваючи при цьому корельовану періодичність на інтервалі кратному  $n$ , та залишаючи довгострокову кореляцію. З (2.7) видно, що  $R^n[i]$  – є узагальненням кореляційної функції випадкового процесу  $R[i]$ , оскільки при  $n = 1$  вони співпадають:  $R^1[i] = R[i]$ .

Знайдемо вираз для дисперсії СВВП. При  $k = 0$  з (2.4а) маємо

$$D_x^n = R^n[0] = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x[(i-1)n + j])^2. \quad (2.8)$$

Т.ч. дисперсія СВВП дорівнює середньому від квадратів підвекторів. Аналіз цього співвідношення показує, що при  $N$  – кратному довжині підвектора  $n$ , дисперсія СВВП дорівнює дисперсії самого процесу, тобто

$$D_x^n = D_X.$$

При  $n = 1$ , з (2.8) отримуємо відомий вираз для оцінки дисперсії випадкового процесу

$$D_x^n = R^n[0] = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x^2[t] = D_X.$$

При  $N$  некральному довжині підвектора  $n$  справедливо співвідношення  $D_x^n \approx D_X$ . Зі зростанням  $N$  дисперсія СВВП  $D_x^n$  наближається до  $D_X$ . Для аналізу СВВП можна використовувати нормовані значення кореляційної функції

$$r^n[k] = \frac{R_x^n[k]}{R_x^n[0]}.$$

З цього виразу випливає, що  $r^n[0] = 1$ .

Окрім автокореляційної функції, можна ввести поняття взаємної кореляційної функції СВВП [9]

$$R_{xy}^n[k] = \frac{1}{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} (\bar{x}_i, \bar{y}_{i+k}).$$

Слід зазначити суттєві відмінності між кореляційними функціями СВВП та стаціонарного процесу. У першому випадку враховується статистичний зв'язок між підвекторами СВВП. Це дозволяє отримати нову інформацію стосовно випадкового процесу, немов би у більшому «масштабі». Оскільки спектри Фур'є та параметричні оцінки спектрів СВВП визначаються їх кореляційними функціями, вони будуть також суттєво відрізнятися від класичних спектрів випадкових процесів. Відмінності кореляційних функцій та спектрів будуть досліджені нижче за

допомогою імітаційних процесів СВВП, отриманих на підставі моделей лінійного передбачення.

## 2.5 Перетворення Фур'є та спектральна щільність потужності СВВП

Знайдемо спектр Фур'є процесу в поданні СВВП. Для цього попередньо представимо перетворення Фур'є в матричному вигляді. Його легше потім узагальнити на перетворення Фур'є процесів в поданні СВВП.

Оскільки спектр Фур'є являє собою вектор, координатами якого є відліки спектра, перетворення Фур'є доцільно представити в матричному вигляді. В даному випадку базисні вектори складають матрицю перетворення Фур'є (2.9), де індекс 2 показує на розмірність матриці перетворення

$$e_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \exp\left(\frac{-j2\pi}{N}\right) & & & & \\ & \vdots & & & & \\ & & \exp\left(\frac{-j4\pi}{N}\right) & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \exp\left(\frac{-j2\pi(N-1)}{N}\right) & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & & \\ & \exp\left(\frac{-j2\pi(N-1)}{N}\right) & \exp\left(\frac{-j4\pi(N-1)}{N}\right) & \dots & \exp\left(\frac{-j2\pi(N-1)^2}{N}\right) & \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Вектор-рядок дискретного спектра виходить у вигляді

$$\bar{X}[f]^T = \frac{1}{N} \bar{x}^T e_2,$$

де  $\bar{x}^T = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ .

Зворотнє перетворення Фур'є отримується шляхом перетворення

$$\bar{X}[f]^T e_2^H = \frac{1}{N} x^T e_2 e_2^H = \bar{x}^T I = \bar{x}^T,$$

де була використана умова ортогональності базисних векторів Фур'є



$$e_3 = (e_{ikl}), \quad i, k = 0..m-1, \quad l = 0..n-1. \quad (2.11)$$

Матриця  $e_3$  симетрична за індексами  $i$  та  $k$  (2.10)

$$e_{ikl} = e_{kil}$$

Ермітово сполучена матриця має вигляд

$$e_3^H = (e_{ikl})^H = e_{kil}^* = e_{ikl}^*, \quad (2.12)$$

де транспонування виконувалось за першими двома індексами. Враховуючи структуру тривимірної матриці (2.10), а також (2.12), умова ортогональності матриці (2.11) записується наступним чином

$$e_3 e_3^H = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} (e_{ikl} e_{kil}^*) = nm \delta_{in} = nmI. \quad (2.13)$$

Отже, ортонормована матриця  $e_3$  задовольняє умові

$$\frac{e_3 e_3^H}{mn} = I. \quad (2.14)$$

Для вектора процесу в матричному поданні СВВП з компонентами

$$\vec{x}^n = (x_{kl}), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad l = 0, \dots, n-1,$$

перетворення Фур'є описується виразом

$$\bar{X}[f]^T = \frac{1}{mn} \bar{x}^n e_3 = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} x_{k \cdot l} e_{k \cdot l}. \quad (2.15)$$

З (2.15) випливає, що перетворення Фур'є виходить шляхом подвійної згортки двовимірної та тривимірної матриці з елементами  $x_{kl}$  та  $e_{kli}$  відповідно. По суті це означає, що визначається взаємна кореляція між елементами кожного стовпчика матриці (2.1) тобто  $x_0, x_n, \dots, x_{m \cdot n - n}$ ;  $x_1, x_{n+1}, \dots, x_{mn-n+1}$ ;  $\dots$ ;  $x_{n-1}, x_{2n-1}, \dots, x_{mn-1}$  та стовпчиками матриці (2.10) для кожної дискретної частоти  $i$ . В класичному перетворенні Фур'є взаємна коерляція визначається між  $x_0, x_2, \dots, x_{N-1}$  та стовпчиками матриці (2.9) для кожного  $i$ .

Зворотнє перетворення Фур'є отримуємо з (2.15), використовуючи властивість ортонормованості матриці  $e_3$  (2.14)

$$\bar{X}[f]^T e_3^H = \frac{1}{mn} \bar{x}^n e_3 e_3^H = \bar{x}^n. \quad (2.16)$$

Зауважимо, що наявність підсумовування за  $l$  в (2.15) призводить до того, що в загальному випадку перетворення Фур'є СВВП незворотнє. Дійсно з (2.16) випливає

$$\bar{x}^n = \sum_{i=0}^{m-1} \bar{X}[f]_i e_{ikl}^H.$$

Враховуючи (2.10), та симетрію матриці  $e_{ikl}^H$  (2.12), отримуємо, що для будь-якого  $l$  рядок матриці  $\bar{x}^n$  буде дорівнювати

$$\bar{x}_k = \sum_{i=0}^{m-1} \bar{X}[f]_i \exp\left(\frac{j2\pi ki}{m}\right). \quad (2.17)$$

Т.ч. для кожного індексу рядка  $k$  сума в (2.17) не залежить від  $l$  та усі елементи рядка матриці  $\bar{x}_k$  будуть однакові

$$\bar{x}'^n = \begin{bmatrix} x_0' & x_0' & \dots & x_0' \\ x_1' & x_1' & \dots & x_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1}' & x_{m-1}' & \dots & x_{m-1}' \end{bmatrix}.$$

Вектор  $\bar{x}'^n = [x_0', x_1', \dots, x_{m-1}']$  має координати зі спектром еквівалентним спектру СВВП. Таким чином, в деякому інтервалі підвектора  $\bar{x}_i$  можна замінити координатою  $x_i'$ . Т.ч. СВВП можна замінити іншим еквівалентним йому процесом з аналогічними спектральними характеристиками.

Знайдені значення функції кореляції СВВП можна використовувати для визначення спектральної щільності потужності випадкового процесу [13]. Оцінка СЦП СВВП в цьому випадку визначається з співвідношення

$$P_{xx}^n(f) = T \sum_{k=-L}^L R^n[k] \exp(-j2\pi f k T), \quad (2.18)$$

де оцінка кореляційної функції СВВП визначається виразом (2.4а),  $L$  – довжина кореляційної функції,  $T = n\Delta T$  – інтервал дискретизації СВВП,  $\Delta T = 1/F_d$ ,  $F_d$  – частота дискретизації процесу  $X[t]$ . При використанні згладжуючого вікна  $\omega[k]$  вираз для оцінки СЦП приймає вигляд

$$P_{xx}^n(f) = T \sum_{k=-L}^L \omega[k] R_{xx}^n[k] \exp(-j2\pi f k T).$$

Слід зазначити суттєві відмінності між кореляційними функціями СВВП та стаціонарного процесу [13]. В першому випадку враховується статистичний зв'язок між підвекторами СВВП. Це дозволяє отримати нову інформацію стосовно випадкового процесу, так би мовити в більшому «масштабі». Оскільки спектри Фур'є та параметричні оцінки спектрів СВВП визначаються їх кореляційними функціями, вони будуть також суттєво відрізнятися від класичних спектрів випадкових процесів. Відмінності кореляційних функцій та спектрів будуть досліджені нижче на імітаційних процесах СВВП, отриманих за допомогою моделей лінійного передбачення.

## 2.6 Модель авторегресії складових векторних випадкових процесів

Розглянемо властивості СВВП на імітаційних процесах із заданими статистичними характеристиками. Такі процеси можливо отримати методом формуючого фільтра за моделями лінійного передбачення. Для вирішення деяких складних задач статистичної радіотехніки використовується параметричний опис випадкових сигналів та процесів. Важливу роль мають класи моделей лінійного передбачення гаусівських та негаусівських процесів. Такі процеси отримують за допомогою формуючого фільтра з раціональною системною функцією, на вхід якої подається білий шум. Класи моделей лінійного передбачення включають модель авторегресії, модель ковзного середнього та модель авторегресії - ковзного середнього. Спектри другого порядку цих процесів повністю описуються параметрами цих моделей. Різниця рівняння АР СВВП [9] має вигляд аналогічний [6]

$$\bar{x}_i = \sum_{s=1}^p \Phi^n[s] \bar{x}_{i-s} + \bar{a}_i, \quad (2.19)$$

де  $\Phi^n[s]$  – коефіцієнти АР СВВП,  $p$  – порядок моделі АР СВВП,  $\bar{a}_i$  – вектори довжиною  $n$  відліків білого шуму. Умова оптимальності моделі АР СВВП полягає у

статистичній незалежності підвекторів  $\vec{a}_i$ . Для моделі АР СВВП помилки  $\vec{a}_i$  повинні бути некорельованими, тобто  $E\{\vec{a}_i \vec{a}_{i-k}\} = 0$ , при  $k \neq 0$ . Ця умова еквівалентна мінімуму дисперсії помилки передбачення СВВП  $D_a^n$ .

Формуючий фільтр, який генерує АР СВВП, можливо представити схемою на рис. 2.3. Лінії затримки мають довжину  $n$  відділків

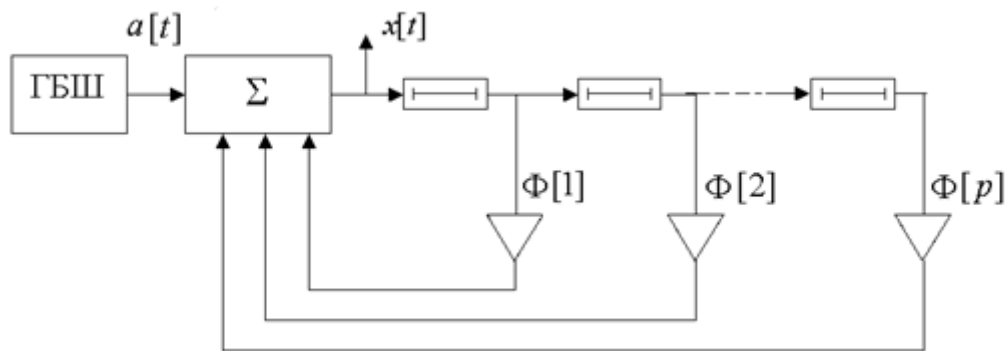


Рисунок 2.3 – Генератор АР СВВП

АР СВВП складається з корельованих підвекторів, сформованих фільтром, але з різними підвекторами породжуючого процесу типу білого шуму. Природно, що процеси АР та АР СВВП не співпадають. При  $n=1$  модель АР СВВП перетворюється на звичайну модель АР випадкового процесу.

Для визначення коефіцієнтів АР векторів процесу помножимо (2.19) на  $\vec{x}_{i-j}$  та усереднимо. Після нескладних перетворень отримаємо рівняння типу Юла – Уокера для розрахунку параметрів моделі АР СВВП

$$R^n[j] = \sum_{i=1}^p \Phi^n[i] R^n[i-j], \quad j=1,2,\dots,p.$$

При  $j=0$  отримаємо вираз, що пов'язує дисперсію підвекторів процесу та векторів процесу й векторів помилки передбачення

$$R^n[0] = \sum_{i=1}^p \Phi^n[i] R^n[i] + D_a^n.$$

Очевидно, що всі властивості моделі АР випадкових процесів справедливі й для моделі АР СВВП. Так, вираз для параметричної оцінки СЦП має вигляд

$$P^n(f) = \frac{D_a^n}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi^n[i] e^{-j2\pi f k T} \right|^2}. \quad (2.20)$$

Формулу для обілюючого фільтра на основі моделі СВВП отримують з (2.19)

$$\bar{a}_i = \bar{x}_i - \sum_{s=1}^p \Phi^n[s] \bar{x}_{i-s}.$$

Структура обілюючого фільтра представлена на рис. 2.4

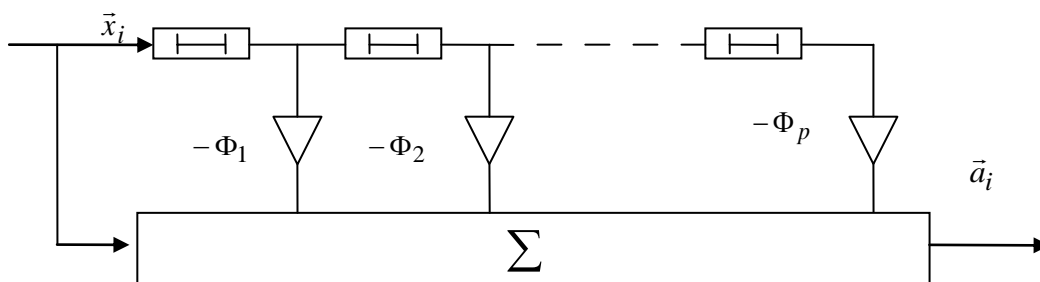


Рисунок 2.4 – Обілюючий фільтр на основі моделі АР СВВП

В основі моделі КС лежить різницеве рівняння

$$\bar{x}^n[t] = - \sum_{i=1}^q Q^n[i] \bar{a}^n[t-i] + \bar{a}^n[t], \quad (2.21)$$

де  $Q^n[i]$  – коефіцієнти, а  $q$  – порядок моделі КС. Щоб отримати рівняння, яке пов'язує коефіцієнти КС та коефіцієнти кореляції, помножимо (2.21) на  $x[t-i]$  та візьмемо математичне очікування. Отримаємо

$$R^n[0] = \left( \sum_{i=1}^q Q^{2n}[i] + 1 \right) \bar{\sigma}_a^{2n}, j = 0,$$

$$R^n[j] = \begin{cases} (-Q^n[j] + Q^n[1]Q^n[j+1] + \dots + Q^n[q-j]Q^n[q]) \bar{\sigma}_a^{2n}, j = 1, 2, \dots, q \\ 0, j > q \end{cases}.$$

Рішення системи рівнянь в загальному випадку знаходиться числовими методами.

В даному розділі представлені основні принципи побудови моделей СВВП. Розроблені принципи побудови векторних просторів, визначені лінійні операції на просторах. Значна увага приділена скалярному добутку векторів в поданні СВВП. Розроблені принципи розділення векторів на підвектори. Основними способами розділення є суміжні, перетинаючі та неперетинаючі підвектори.

На основі скалярного добутку дано визначення кореляційних функцій для підвекторів з різними способами розділення. Виконан Фур'є аналіз для векторів, представлених СВВП. Визначені вирази для отримання спектральної щільності потужності СВВП через перетворення Фур'є кореляційної функції.

Розроблені основи лінійного передбачення гаусівських та негаусівських випадкових процесів. Запропоновані вирази для розрахунків параметрів авторегресії та ковзного середнього. Знайдені вирази для параметричних спектральних оцінок СВВП.

### 3 СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В УЯВЛЕННІ СВВП

#### 3.1 Моделювання випадкових процесів за допомогою моделей СВВП

Імітаційне моделювання широко використовується для аналізу нових моделей. Це дозволяє виявити характерні ознаки та характеристики відомих випадкових процесів у новій презентації. В подальшому, перед аналізом реальних процесів, будуть враховуватися властивості, виявлені при аналізі імітаційних процесів з заданими властивостями.

Існує кілька випадкових процесів, таких як білий шум (БШ), адитивна суміш синусоїди та БШ, які широко використовуються в моделях випадкових сигналів статистичної радіотехніки. Тому в цьому розділі побудовані моделі цих процесів у представленні СВВП і знайдені їх кореляційні функції та спектральні щільності потужності.

Особливий інтерес представляють моделі лінійного прогнозування випадкових процесів у представленні СВВП. Модель АР і КС дозволяють визначити справжні процеси у представленні СВВП. У даному розділі міститься ряд експериментів, що демонструють принципи побудови моделей лінійного прогнозування СВВП.

У деяких застосуваннях необхідно досліджувати квазіперіодичні часові ряди. До них можна віднести періодично корельовані випадкові процеси [7], а також сезонні часові ряди, які, крім періодичної складової, мають стійку тенденцію. Особливий інтерес представляють дослідження квазіперіодичних випадкових процесів (часто з періодом 12 місяців), що мають довготривалі періодичні та неперіодичні коливання. Наприклад: довгострокові зміни щорічних температур, опадів, складу газів у повітрі, рівень світового океану тощо. Застосування моделі СВВП дозволяє оцінити характер довготривалих змін квазіперіодичних випадкових процесів.

Перед тим як переходити до аналізу довгострокових змін процесу за допомогою моделі СВВП, зупинимося на оцінках кореляційних функцій та СЦП таких важливих процесів, як БШ, синусоїда та адитивна суміш синусоїди з БШ.

Припускаємо, що ці процеси описуються моделлю СВВП, і для оцінок кореляційних функцій та СЩП використовуємо вирази (2.1) та (2.4а). Оскільки в БШ неможливо виділити періодичну множину підвекторів, то кореляційна функція представляє собою  $\delta$  – функцію (рис. 3.1).

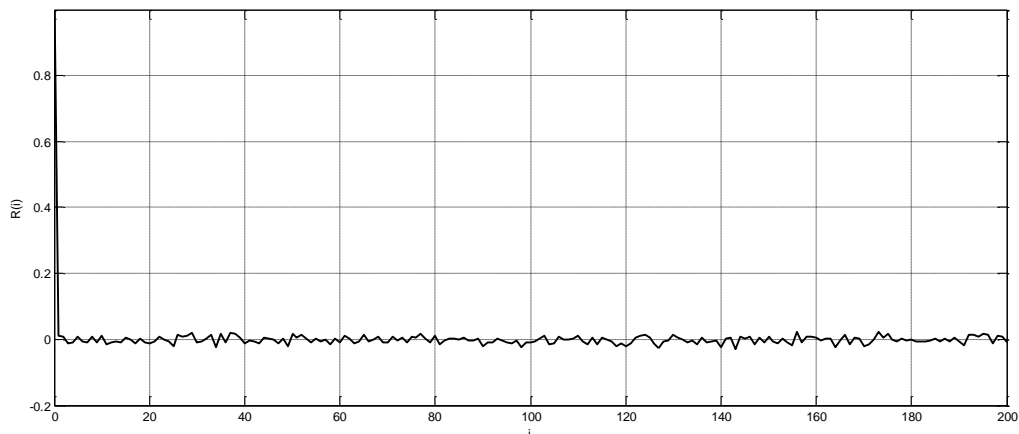


Рисунок 3.1 – Кореляційна функція білого шуму в СВВП представленні

Розглянемо спектр синусоїди з періодом 12 відліків. Якщо довжина підвектора  $n = 12$ , то кореляційна функція синусоїди представляє собою пряму лінію (рис. 3.2). Зрозуміло, що при зсуві підвекторів на число, кратне довжині підвектора, кореляція не буде змінюватися, а нормоване значення кореляційної функції дорівнює 1. Це суттєва відмінність змінює уявлення про кореляційну функцію синусоїди. Нагадаємо, що кореляційна функція синусоїди представляє собою косинусоїду.

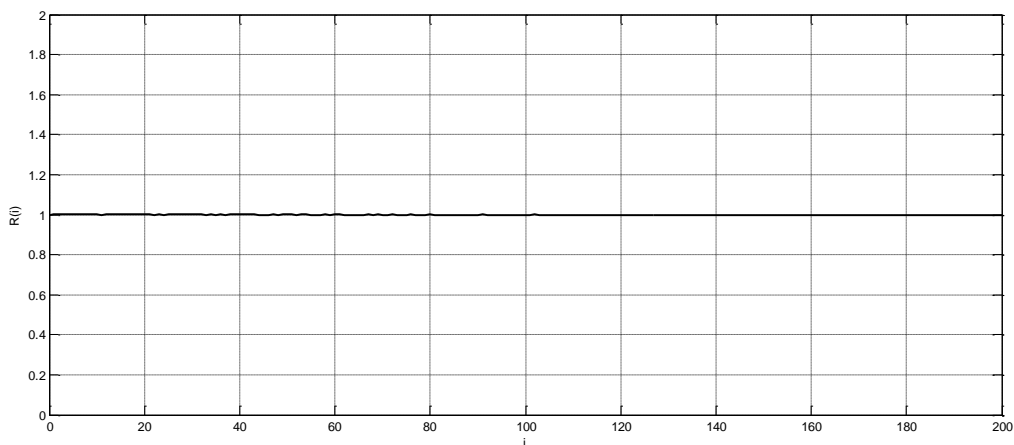


Рисунок 3.2 – Кореляційна функція синусоїди з періодом 12 відліків у СВВП-представленні

На рис. 3.3 показана кореляційна функція суміші БШ і синусоїди з амплітудою, рівною 5, і СКВ БШ, рівному 1. Графік кореляційної функції має вигляд  $\delta$  – функції, піднятої над кореляційною функцією СВВП моделі синусоїди. Зі зростанням рівня БШ величина кроку збільшується.

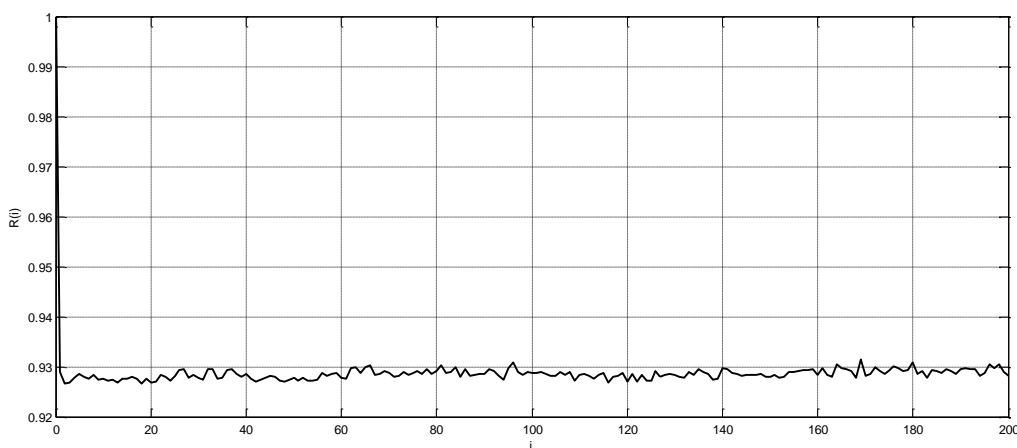


Рисунок 3.3 – Кореляційна функція суміші БШ і синусоїди в СВВП представленні

Графік СЩП, отриманий корелограмним методом за формулою (2.4а), представлений на рис. 3.4. На графіку СЩП помітні бічні пелюстки, властиві оцінці СЩП корелограмним методом. Для їх послаблення необхідно використовувати згладжування підходящим вікном. Його використання збільшує дисперсію оцінки СЩП, дещо спотворює її. Тому використання параметричної оцінки в СВВП-представленні має перевагу.

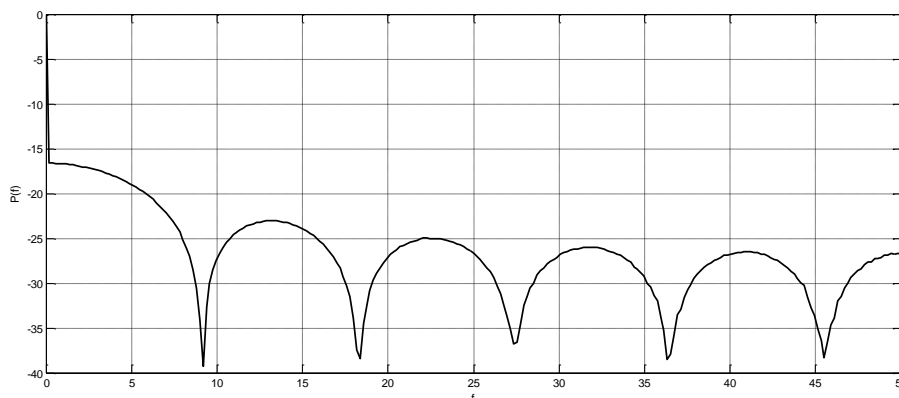


Рисунок 3.4 – Спектральна щільність потужності змішаної БШ та синусоїди у представленні СВВП, отриманому методом корелограм

Якщо довжина вектора моделі СВВП не дорівнює періоду синусоїди, то змінюється вигляд кореляційної функції суміші БШ та синусоїди. На рис. 3.5 показано графік кореляційної функції для випадку, коли довжина підвектора  $n = 13$ , а період синусоїди  $T = 12$ . У цьому випадку помітний вплив синусоїди на формування кореляційної функції. Однак її період відрізняється від істинного періоду синусоїди.

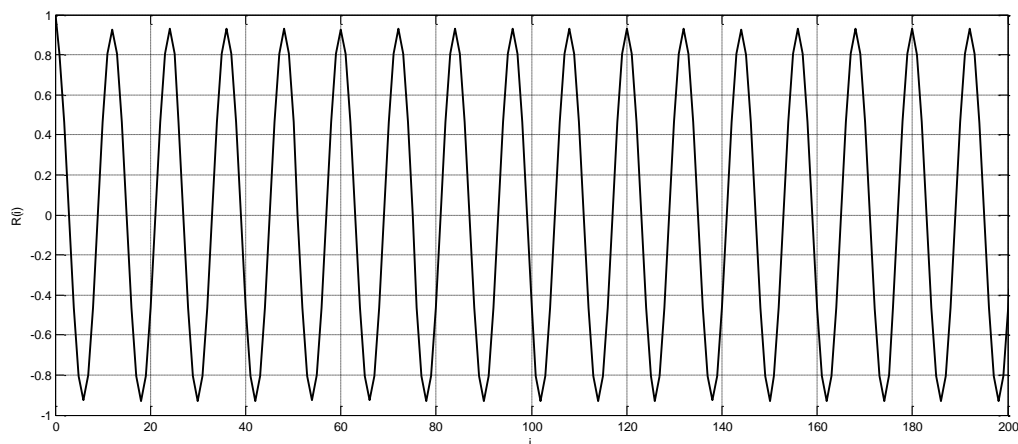


Рисунок 3.5 – Кореляційна функція змішаної БШ та синусоїди з  $T = 12$  та  $n = 13$  у представленні СВВП

При подальшому відхиленні  $n$  та  $T$  періоду коливань кореляційної функції змішаної БШ спочатку зменшується (рис. 3.6), а потім починає зростати. При  $n = 2T$  кореляційна функція має вигляд підвищеної  $\delta$  – функції та практично співпадає з графіком, показаним на рис. 3.3.

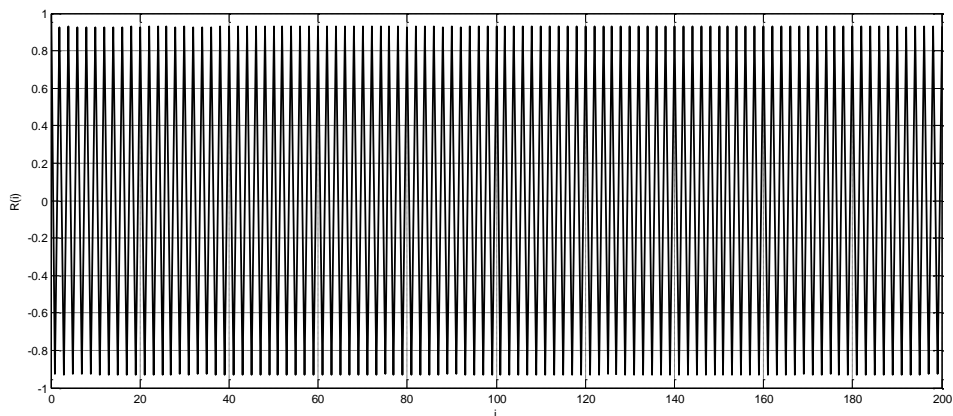


Рисунок 3.6 – Кореляційна функція суміші БШ і синусоїди з  $T = 12$  та  $n = 18$  у СВВП представлення

У цьому розділі наведено деякі важливі статистичні характеристики детермінованих та випадкових процесів, які можуть бути представлені моделями у СВВП. Вони значно відрізняються від відомих характеристик таких процесів. Ці відмінності пояснюються властивостями СВВП моделі процесів. Демонструється можливість застосування цієї моделі для оцінки частоти довготривалих змін процесів за наявності краткострокових коливань процесу.

### 3.2 Модель авторегресії СВВП

Теоретичні положення моделі АР у СВВП поданні перевірялись методами статистичного моделювання [13, 14]. Модель в СВВП поданні складалась з підвекторів довжиною 5 відліків. Характеристики одномодового спектра СВВП (частота піку та ширина смуги піку) вибиралися наступними:  $f_1 = 20$ ,  $\Delta f_1 = 1$ . Частота дискретизації підвекторів складала  $F_d = 1/T = 100$ . Процес був отриманий методом формуючого фільтра за допомогою породжуючого білого гаусівського шуму [15]. Імітаційний процес АР в СВВП поданні показан на графіку (рис. 3.7).

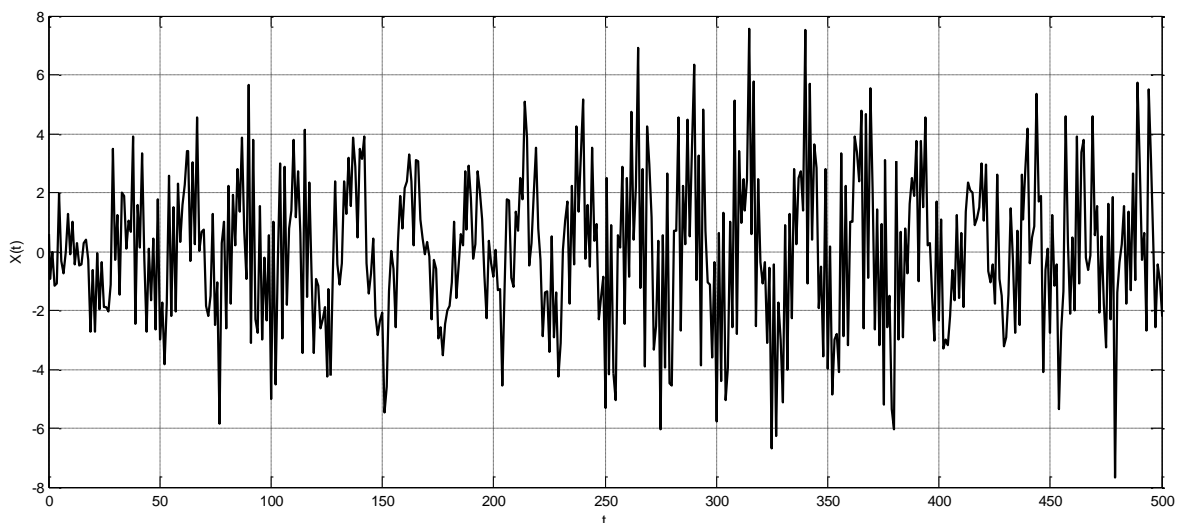


Рисунок 3.7 – Модель АР у СВВП поданні з параметрами спектру  $f_1 = 20$ ,  $\Delta f_1 = 1$  та довжиною підвектора  $n = 5$

Як видно з графіка, цей процес суттєво відрізняється від класичного процесу АР із зазначеними вище характеристиками спектру, що представлені на рис. 3.8.

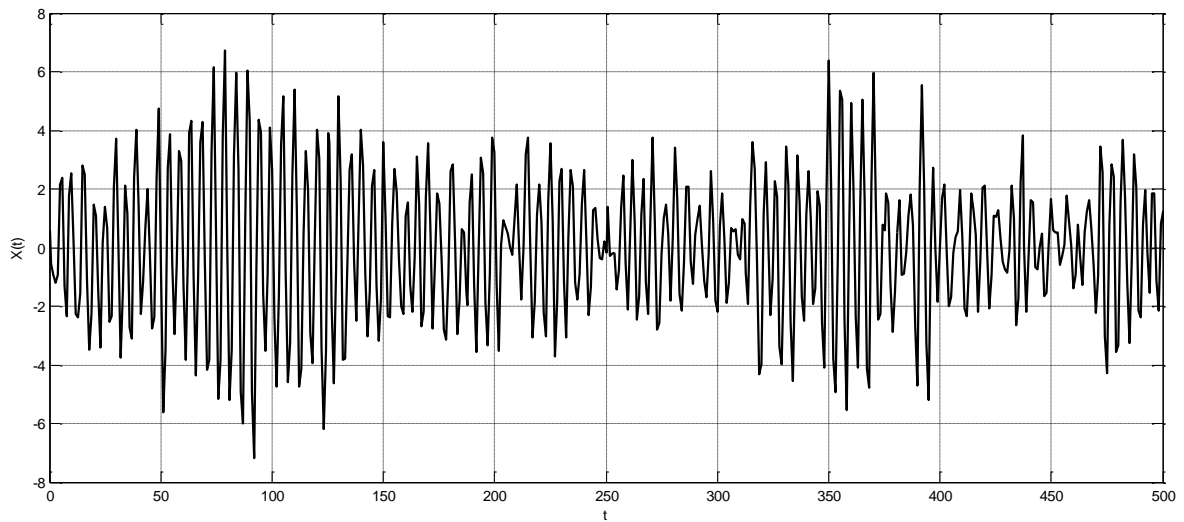


Рисунок 3.8. – Процес АР з параметрами спектру  $f_1 = 20$ ,  $\Delta f_1 = 1$

Відмінність цих процесів особливо помітна на графіках кореляційних функцій, що представлені на рис. 3.9 та рис. 3.10. Кореляційна функція процесу АР у СВВП поданні, що зображена на рис. 3.7, розраховувалась за формулою (2.4а). Представлена ж на рис. 3.10 кореляційна функція  $X[t]$ , розраховувалась за допомогою (2.2б), тобто без урахування її векторної структури. З графіка на рис. 3.9 видно, що кореляційна функція СВВП має простий вигляд, що відповідає вибраним характеристикам спектру.

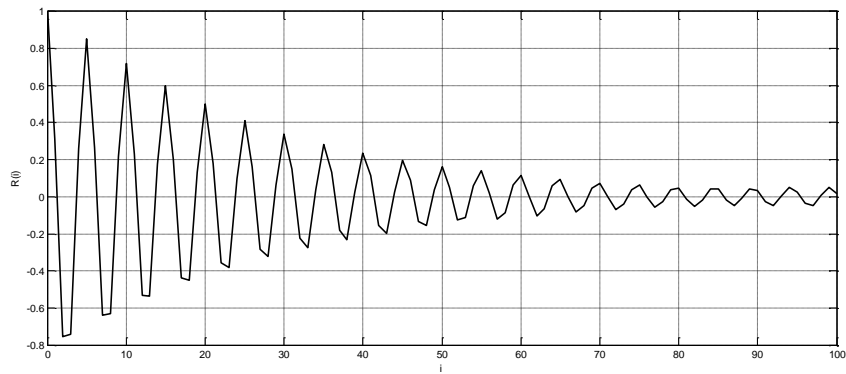


Рисунок 3.9 – Кореляційна функція процесу AP у СВВП поданні, яка отримана за допомогою (2.4а)

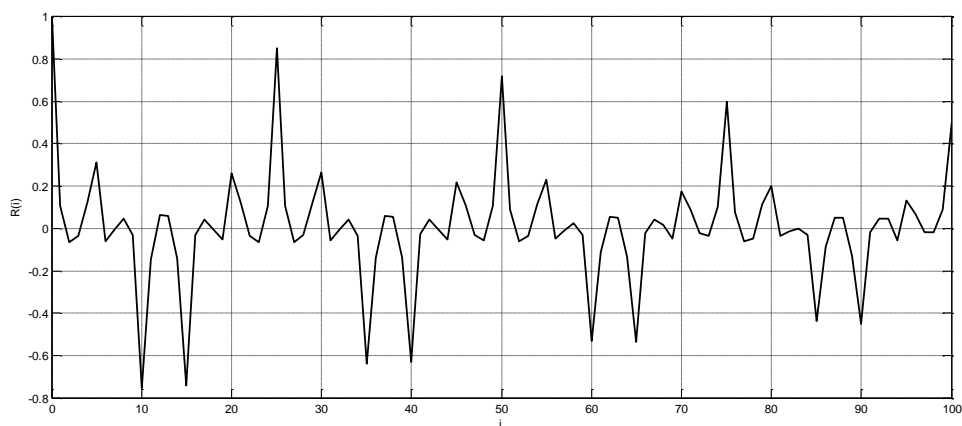


Рисунок 3.10 – Кореляційна функція процесу AP у СВВП поданні, яка отримана за допомогою (2.4б)

Аналіз процесів типу СВВП відомими методами математичної статистики, досить складний. Ці складності виникають з причини наявності сильної квазіперіодичності процесу, яка ховає або маскує в кореляційній функції статистичний зв'язок між підвекторами. Подібна ситуація виникає в сезонних випадкових процесах [16]. Однак методи обліку сезонності не дозволяють виявити характер статистичного зв'язку між підвекторами СВВП в силу відсутності, в загальному випадку, їх суворої циклічності. В рамках класичної кореляційної теорії СВВП буде описуватися складними кореляційними функціями, що видно з рис. 3.10. Т.ч. модель СВВП дозволяє вирішувати, як мінімум, дві важливі задачі. По-перше, виявляти додаткову інформацію про випадковий процес. По-друге, встановлювати

статистичний зв'язок та, відповідно, динаміку зміни деяких сукупностей відліків, тобто підвекторів.

Використання класичних методів лінійного передбачення для моделювання СВВП призводить до складних моделей з високим порядком, що веде до багатомодовості параметричних оцінок спектрів. Використання розробленої вище теорії моделі АР у СВВП поданні, дозволяє отримати для імітаційного процесу, що представлений на рис. 3.7, модель АР другого порядку з одномодовим параметричним спектром (рис. 3.11). Параметричний спектр, знайдений за допомогою коефіцієнтів класичної моделі АР, показаний на рис. 3.12. Як видно з графика, він не дозволяє виділити спектр коливань підвекторів СВВП, теоретичні характеристики якого складають  $f_1 = 20$ ,  $\Delta f_1 = 1$ . Аналіз графіків показує достатньо непогане співвідношення спектрів заданим характеристикам, що підтверджує точність вибраних моделей АР.

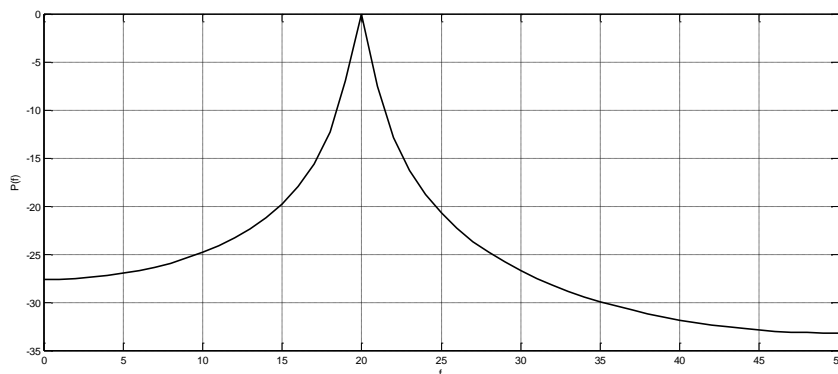


Рисунок 3.11 – Вибіркова параметрична оцінка спектра за допомогою моделі АР у СВВП поданні

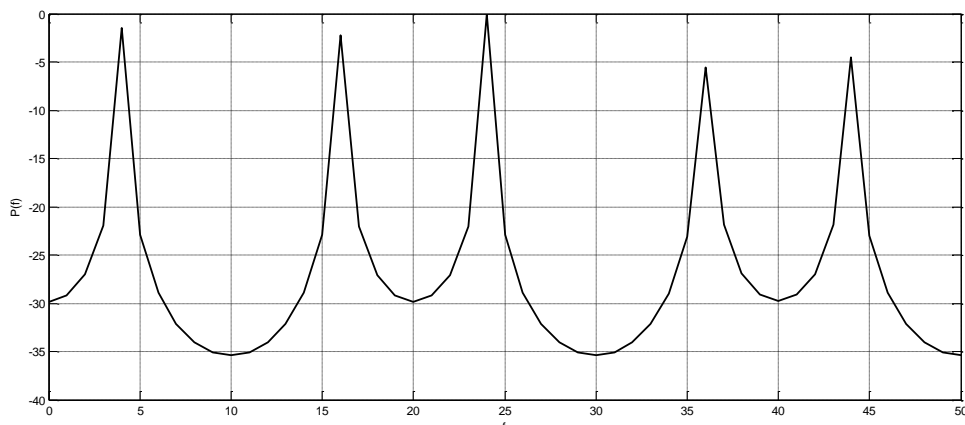


Рисунок 3.12 – Вибіркова параметрична оцінка спектра СВВП за допомогою класичної моделі AP

Точність параметричної оцінки СЦП суттєво залежить від того, наскільки добре підходить модель, що використовується для аналізу процесу, а також від порядку цієї моделі. Останнє особливо стосується процесів з багатомодовою СЦП.

Для порівняння оцінок СЦП, отриманих параметричним та непараметричним методами, на рис. 3.13 та рис. 3.14 представлені спектри, знайдені корелограмним методом з використанням (2.24). Аналіз графіків показує непогану відповідність параметричним оцінкам, наведених на рис. 3.11 та рис. 3.12. Звернемо увагу, що, не дивлячись на співпадіння частот піків СЦП, наявність бокових пелюсток на рис. 3.13 та рис. 3.14 збільшує дисперсію оцінки СЦП корелограмним методом [17 - 19].

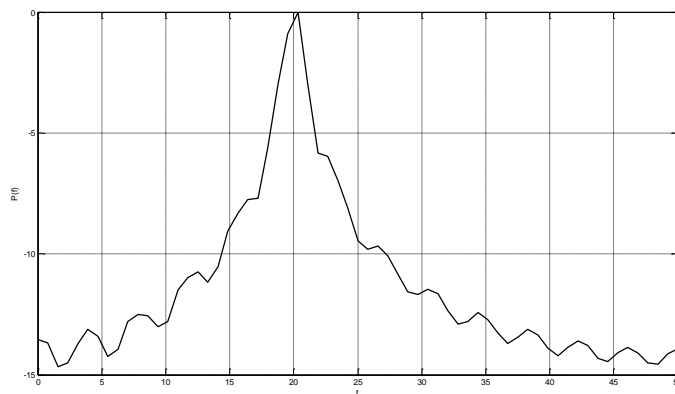


Рисунок 3.13 – Вибіркова оцінка спектру СВВП, що отримана корелограмним методом

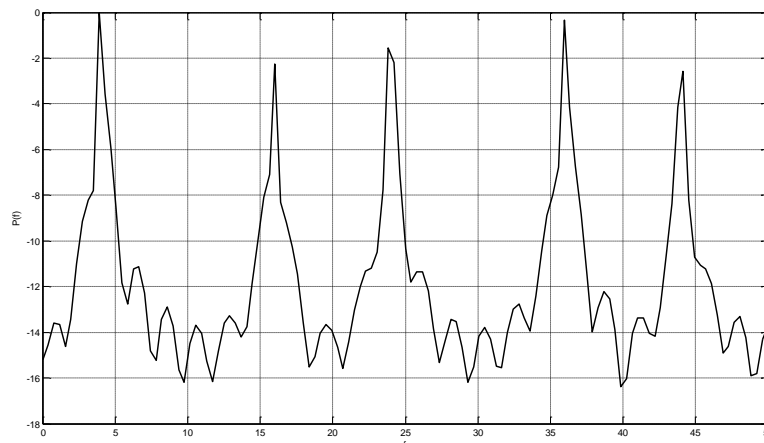


Рисунок 3.14 – Вибіркова оцінка спектру  $X[t]$ , що отримана корелограмним методом

Отримані формули, що використовують перетворення Фур'є застосовувались для розрахунку спектра СВВП процесу АР. На рис. 3.15 представлений графік спектра Фур'є, розрахований корелограмним методом за допомогою (2.15) для підвектора довжиною 5. Як видно з графіка, положення піку відповідає заданому. Для порівняння на рис. 3.16 представлений спектр того ж процесу, отриманий за допомогою класичного перетворення Фур'є періодограмним методом. Аналіз графіків підтверджує справедливість отриманих виразів для спектрального аналізу СВВП. Застосування згладжуючих вікон дозволяє зменшити дисперсію спектральних оцінок на основі перетворення Фур'є.

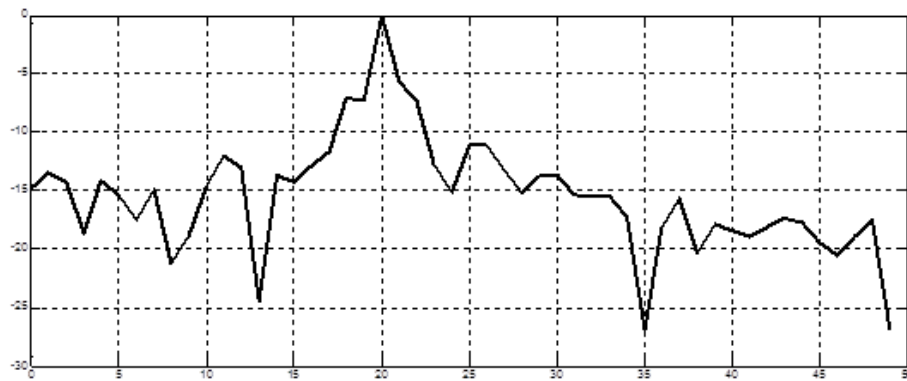


Рисунок 3.15 – Вибіркова оцінка спектра СВВП, яка отримана корелограмним методом 3

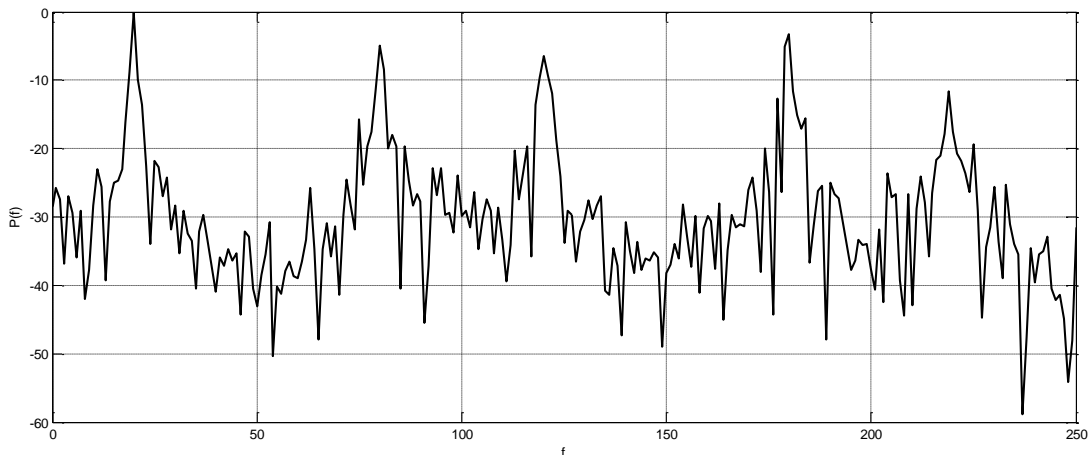


Рисунок 3.16 – Вибіркова оцінка спектра  $X[t]$ , що отримана періодограмним методом

Модель АР дає можливість отримати методом формуючого фільтра істиний СВВП, що дозволяє вивчати його особливості та статистичні характеристики.

У розділі представлені деякі важливі статистичні характеристики детермінованих та випадкових процесів, що представлені моделями СВВП. Вони суттєво відрізняються від відомих характеристик таких процесів. Ці відмінності пояснюються властивостями СВВП моделі процесів.

Показано, що спектри синусоїд у поданні СВВП суттєво відрізняються від класичних спектрів гармонійних коливань. Це відображається також й на оцінці спектра аддитивної суміші синусоїди та БШ. Спектри БШ в поданні СВВП співпадають з класичними. Аналіз спектрів проводився на основі отриманих вище виразів для перетворення Фур'є та параметричних спектрів. Цікаві результати отримані для моделі АР СВВП. Синтезована класична модель АР таких процесів має багатомодову структуру спектра. Дослідження СВВП подання суттєво спрощує аналіз процесів з таким складним спектром. Миттєві значення та кореляційні функції СВВП мають значні відмінності від аналогічних раніше вивчених процесів АР.

## 4 ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ СВВП ДЛЯ АНАЛІЗУ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

### 4.1 Характеристики справних та несправних електродвигунів за їх акустичними сигналами

Як практичний приклад застосування теорії СВВП проведено аналіз двох вибірок акустичних сигналів справних та несправних електродвигунів. Метою дослідження було визначення можливості розпізнавання справного та несправного електродвигуна за допомогою методів статистичного моделювання. Приклади графіків миттєвих відліків несправного та справного електродвигунів наведені на рис. 4.1а та рис. 4.1б. Частота дискретизації сигналів складала 48 кГц.

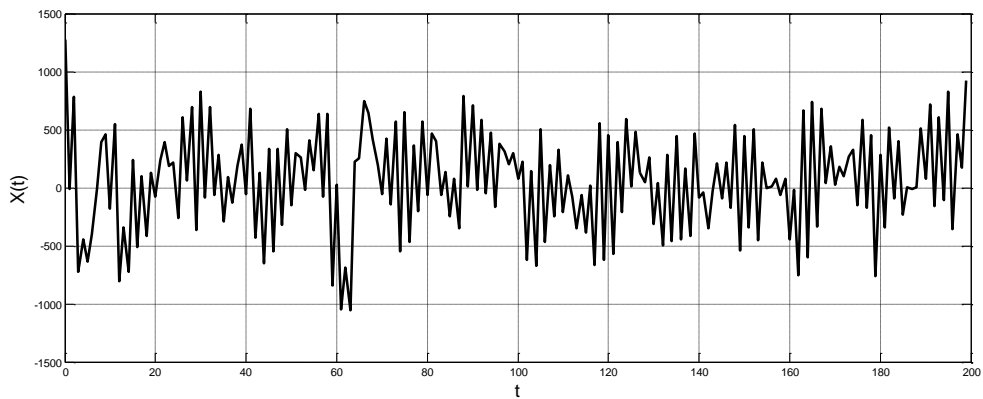


Рисунок 4.1а - Вибірка акустичного сигналу несправного електродвигуна

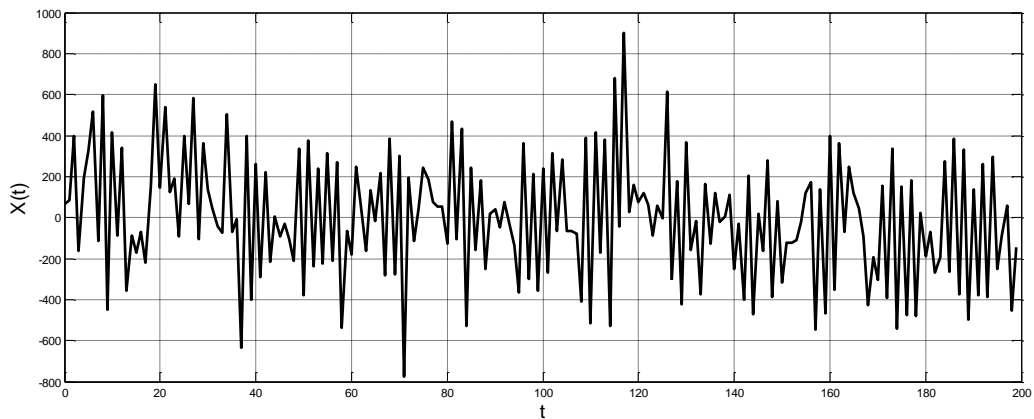


Рисунок 4.1б – Вибірка акустичного сигналу справного електродвигуна

Для обох сигналів знайдені статистичні характеристики класичними методами, які виявилися досить близькими. Кореляційні функції цих сигналів мають складну форму, яку представлено на рисунках 4.2а та 4.2б.

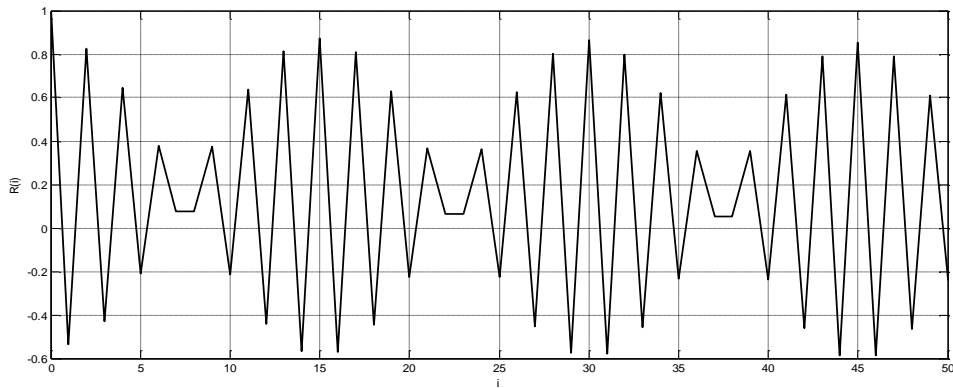


Рисунок 4.2а – Кореляційна функція акустичного сигналу несправного електродвигуна, отримана класичним методом

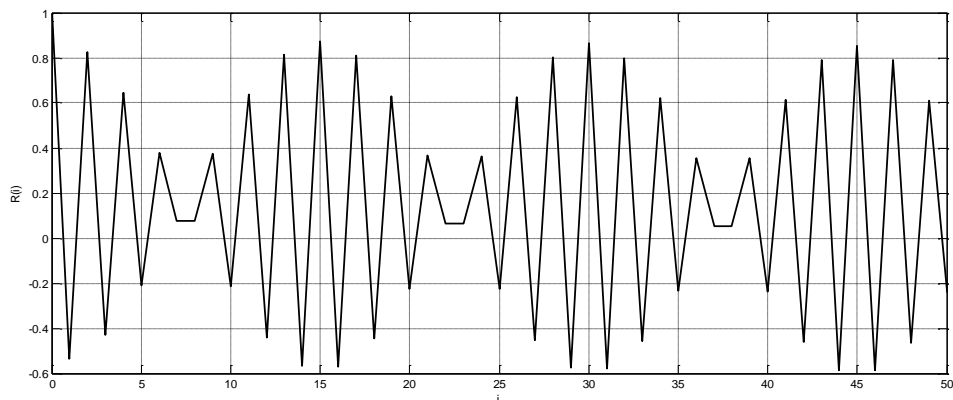


Рисунок 4.2б – Кореляційна функція акустичного сигналу справного електродвигуна, отримана класичним методом

Вигляд графіків миттєвих значень звукових сигналів несправного та справного електродвигуна, а також їх кореляційних функцій показує, що розпізнавані сигнали мають близькі статистичні характеристики в часовій області. Необхідно відзначити, що кореляційні функції сигналів, крім високочастотних коливань, характеризуються низькочастотними слабо затухаючими змінами. Присутні низькочастотні коливання кореляційних функцій мають частоту в 7 разів менше високочастотних коливань.

Аналіз сигналів у частотній області проводився за допомогою параметричних спектрів та спектрів, отриманих корелограмним методом з використанням перетворення Вінера-Хінчіна. Розраховані параметричні оцінки спектра АР восьмого порядку для обох сигналів не відображають середньочастотні коливання. На графіках (рис. 4.3а та рис. 4.3б) видно піки швидких коливань та низькочастотних флуктуацій сигналів. Однак піки в спектрі, які повинні бути в 7 разів менші за частотою високочастотного піку на представлених графіках, не спостерігаються. Аналогічні результати оцінки спектрів отримані корелограмним методом (рис. 4.4а та рис. 4.4б).

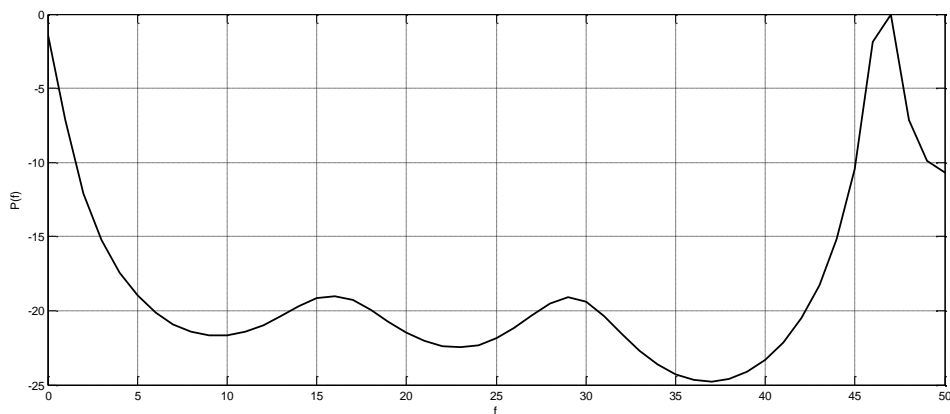


Рисунок 4.3а – Параметрична оцінка спектра АР восьмого порядку акустичного сигналу несправного електродвигуна

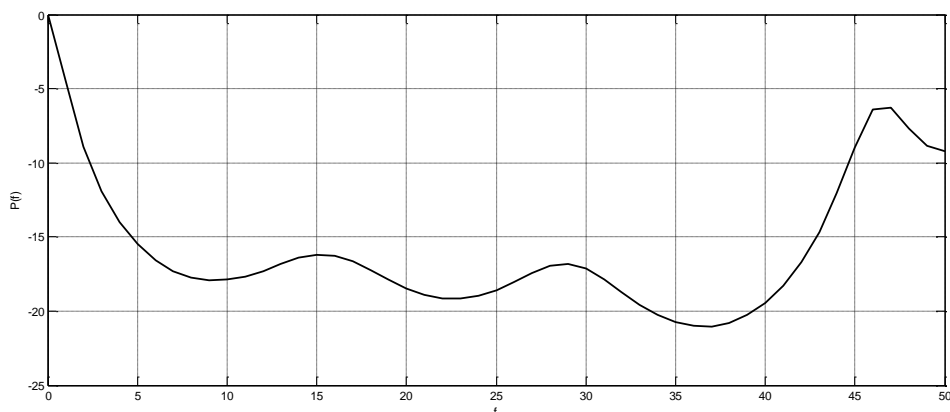


Рисунок 4.3б – Параметрична оцінка спектра АР восьмого порядку акустичного сигналу справного електродвигуна

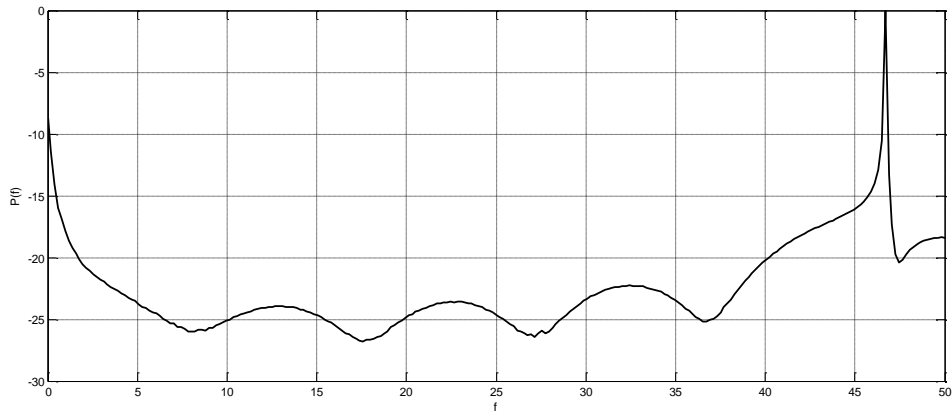


Рисунок 4.4а – Вибіркова оцінка спектра акустичного сигналу несправного електродвигуна, отримана корелограмним методом

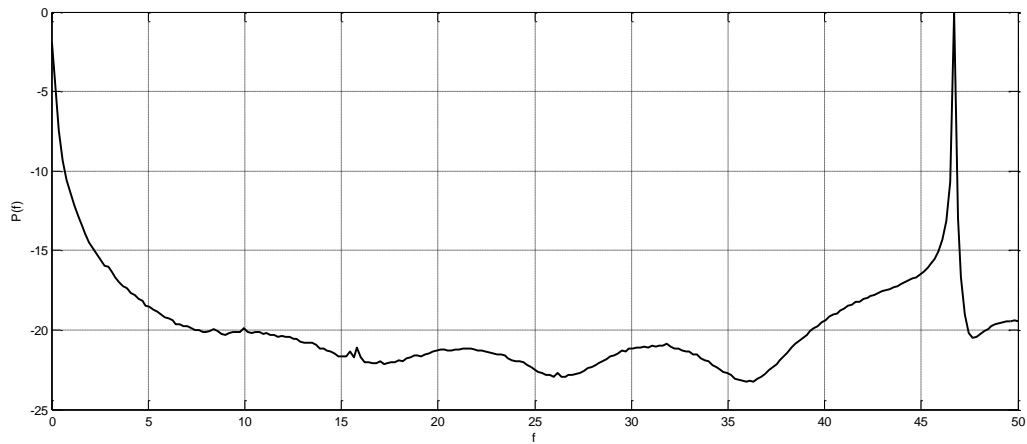


Рисунок 4.4б – Вибіркова оцінка спектра акустичного сигналу справного електродвигуна, отримана корелограмним методом

Статистичні характеристики звукових сигналів несправних та справних електродвигунів досить близькі. В обох класах сигналів присутні яскраво виражені коливання на частотах навколо 0 та 22,5 КГц. Як показали дослідження, їх різниця більше виражена на низьких частотах.

## 4.2 Розпізнавання справних та несправних електродвигунів за їх акустичними сигналами

Для успішного вирішення задачі розпізнавання необхідно усунути співпадіння коливань. Тому для обох класів сигналів на вказаних частотах застосовувалося представлення у вигляді моделі СВВП [20, 21] з довжиною підвектора . На графіках кореляційних функцій моделі СВВП справного та несправного двигуна (рис. 4.5а, рис. 4.5б) видно чітке коливання з періодом 14 вимірювань, які повинні проявитися в спектрі. Параметричні спектри СВВП, розраховані за моделлю AP(8) (рис. 4.6а, рис. 4.7б), виявляють пік середньочастотних коливань та низькочастотних флуктуацій процесу.

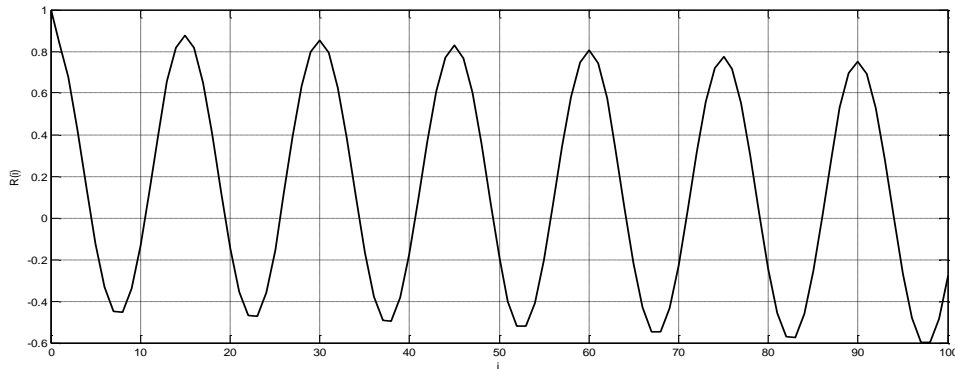


Рисунок 4.5а – Кореляційна функція СВВП моделі несправного двигуна з довжиною підвектора  $n = 2$

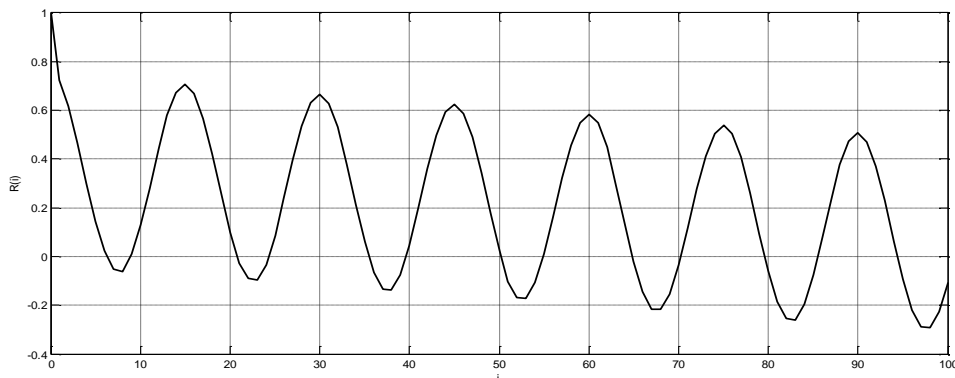


Рисунок 4.5б – Кореляційна функція СВВП моделі справного двигуна з довжиною підвектора  $n = 2$

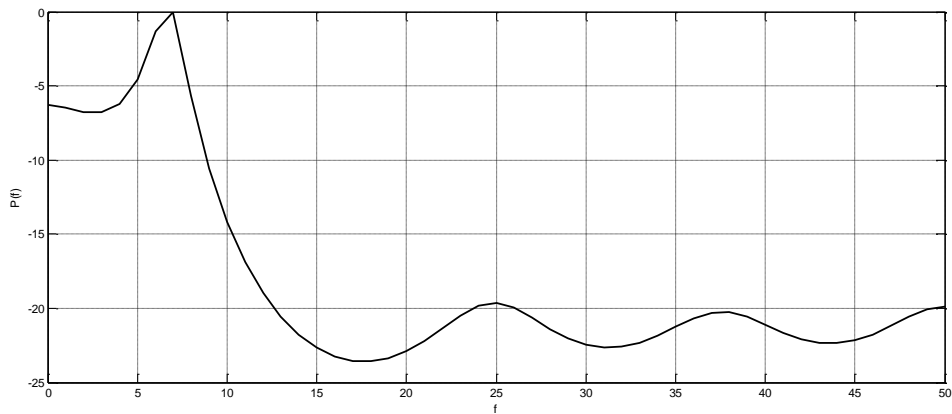


Рисунок 4.6а – Параметрична оцінка спектра СВВП АР(8) акустичного сигналу несправного електродвигуна

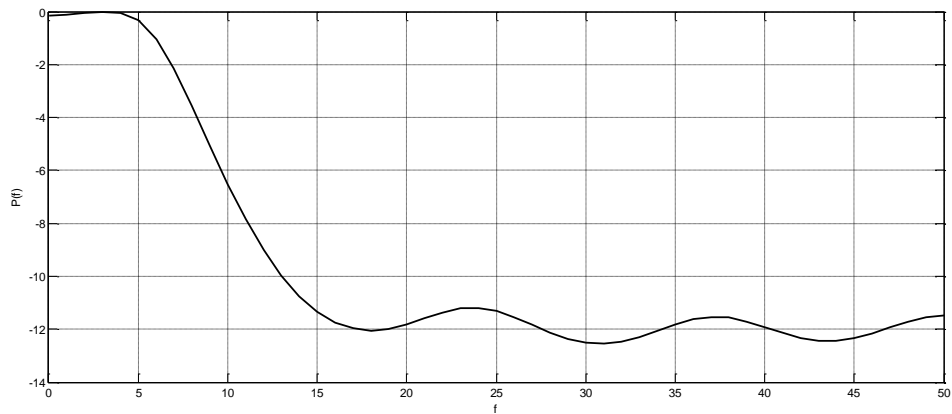


Рисунок 4.6б – Параметрична оцінка спектра СВВП АР(8) акустичного сигналу справного електродвигуна

Аналіз кореляційних функцій показує, що кожний сигнал може бути представлений двома складовими векторними випадковими процесами, довжина підвекторів яких складає 2 та 15 віддіків. На рис. 4.7 наведені параметричні оцінки спектрів СВВП АР(8) з одночасним врахуванням двох підвекторів, які характеризують низькочастотні флуктуації сигналів. Параметричні оцінки спектрів СВВП АР(8) акустичних сигналів справних та несправних електродвигунів помітно відрізняються, що дозволяє успішно вирішувати задачу класифікації таких сигналів. У якості рішучого правила можна використовувати критерій мінімуму декартового

відстані відліків спектра класифікованих сигналів та еталонних спектрів. Останні отримують на етапі навчання класифікатора.

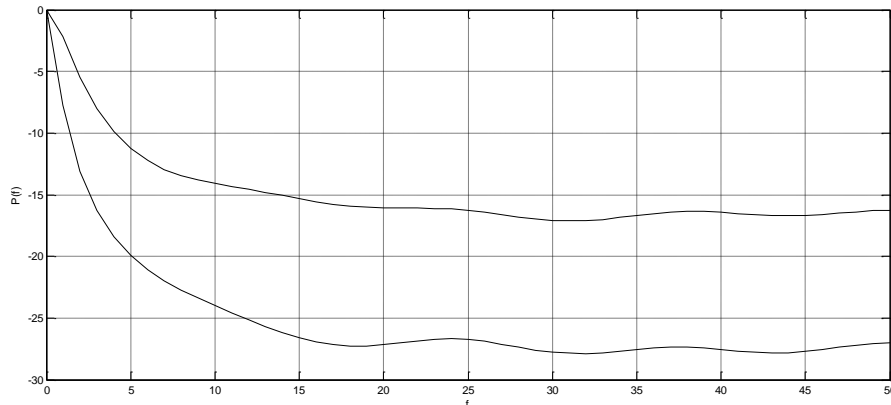


Рисунок 4.7 – Параметрична оцінка спектра СВВП АР(8) акустичних сигналів справного (верхній графік) та несправного (нижній графік) електродвигунів з одночасним врахуванням підвекторів довжиною  $n = 2$  та  $n = 15$

Розпізнавання проводилось шляхом порівняння значень перших шести відліків спектра еталонних та розпізнаваних сигналів відомих класів. В якості еталонного сигналу використовувався один з сигналів кожного класу. Для порівняння використовувалась сума абсолютних значень різниць відповідних значень спектрів еталону та класифікованого сигналу. Характерні значення відліків спектрів представлені в табл. 4.1 та табл. 4.2. З цих даних видно значне та стійке відмінності ознак класів.

Для розпізнавання використовувалися 120 вибірок 120 справних моторів та 14 вибірок сигналів 2-х несправних моторів довжиною 20000 відліків кожна. Отримано 100% розпізнавання.

Таблиця 4.1. Перші шість значень відліків спектра 3-х несправних моторів, використані як ознаки розпізнавання

-S1	7.7683	13.0686	16.2393	18.3818	19.9227	21.0772
-S2	14.3183	20.0436	23.2531	25.3419	26.7671	27.7403
-S3	9.6647	15.1519	18.3192	20.3993	21.8277	22.8107

Таблиця 4.2. Перші шість значень відліків спектра 3-х справних моторів, використані як ознаки розпізнавання

-S1	2.1803	5.4604	8.0168	9.8841	11.2446	12.2315
-S2	2.8710	6.6749	9.4753	11.506	13.0080	14.1237
-S3	1.5484	4.2592	6.6104	8.4397	9.8440	10.9239

Отже, якщо процес можна представити у вигляді СВВП, то існує можливість виявляти спектральні складові, які спотворюються та маскуються іншими більш потужними коливаннями. Проведені дослідження показали широкі можливості моделі СВВП. Зокрема, їх можна використовувати для прогнозування сезонних явищ, процесів з тривалими кореляціями та в інших задачах статистичної радіотехніки.

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розглянуто новий клас складних стаціонарних випадкових процесів, названий СВВП. До цього класу можна віднести різні види векторних випадкових процесів, що можуть бути представлені у вигляді послідовності підвекторів. Для СВВП, що складається з неспівпадаючих суміжних підвекторів, знайдені вирази для оцінки математичного сподівання, кореляційної функції, спектральної щільності потужності за допомогою корелограмного методу. Показано, що при довжині підвектора, рівній одиниці, знайдені оцінки збігаються з відомими вибірковими оцінками статистик першого та другого порядку стаціонарних процесів.

Запропоновано вирази для розрахунку параметрів АР СВВП та її параметричної спектральної оцінки. Отримано графіки кореляційної функції та СЦП АР СВВП. Показано, що використання запропонованих статистик та моделі АР СВВП дозволяє досліджувати статистичні характеристики підвекторів СВВП. Застосування класичних статистичних методів дослідження СВВП не дозволяє знайти такі характеристики. Використання відомих методів статистичного аналізу та моделі СВВП дає можливість більш тонко досліджувати складні процеси, що подаються у вигляді сукупності підвекторів.

Робота може бути корисною для аналізу складних випадкових процесів, дослідження довгострокових змін процесів, зокрема сезонних явищ.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Омельченко В.А. Вероятностные и детерминистские модели сигналов в электросвязи: Учеб. пособие. – К.: УМК ВО, 1991. – 184 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
3. Волощук Ю. І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Навч. посібник, частина 1. – Харків, ХНУРЕ, 2001. – 550 с.
4. Френкс Л. Теория сигналов. – М.: Сов. радио, 1969. – 344 с.
5. Омельченко В.А. Распознавание сигналов по спектру в условиях априорной неопределенности. - Харьков: ХПИ, 1979. - 100 с.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
7. Драган Я.П. Структура и представление моделей стохастических сигналов. – К.: Наук. думка. 1980. – 384 с.
8. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. — 4-е издание, переработанное и дополненное. — Москва: Финансы и Статистика, 2002. — 480 с.
9. Тихонов В.А., Филь И.О. Статистическое моделирование составных векторных случайных процессов // Радиотехника. –2011 – №165 – С. 7-9.
10. Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. Эконометрия. — Новосибирск: СО РАН, 2005. — 744 с.
11. Кендал М., Стюарт А. Теория распределений. - М.: Наука, 1966.
12. Общая теория статистики: Учебник / Под ред. Р.А. Шмойловой. — 3-е издание, переработанное. — Москва: Финансы и Статистика, 2002. — 560 с.
13. Тихонов В.А., Кудрявцева Н.В., Филь И.О. Математические модели составных векторных случайных процессов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011 – №2/4(50). – С. 17–20.

14. Тихонов В.А., Кудрявцева Н.В., Филь И.О. Подавление помех фильтрами на основе аддитивных моделей линейного предсказания // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011 – №1/4(49). – С. 22–24.

15. Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.В. Генерирование узкополосных имитационных случайных процессов // Радиотехника и информатика. – 1999. – №4. – С. 83–85.

16. Montgomery D.C., Johnson L. A., Gardiner J. S. Forecasting & Time Series Analysis. – Mc.Graw–Hill Inc., 1990. – P. 384.

17. Марпл.–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

18. Филь И.О. Статистические модели составных векторных случайных процессов // 15-й Международный молодежный форум “Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке ”:3б. материалов форума. Ч.3.-Харьков: ХНУРЕ, 2011-С. 132-133.

19. Тихонов В.А., Филь И.О. Векторные составные случайные процессы// III Міжнародна науково-практична конференція «Обробка сигналів і негауссівських процесів». Пам’яті професора Ю.П. Кунченка, 24–27 травня 2011 р.– Черкаси: 2011.– С. 167–168.

20. Филь И.О., Нетребенко К.В. Тихонов В.А. Корреляционный анализ составных векторных случайных процессов. Радиотехника. Всеукр.межвед.науч.-техн. Сб. вып. 177/2014.- С. 48-53

21. Филь И.О. Тихонов В.А. Модель составных векторных случайных процессов в задаче распознавания сигналов Радиотехника. Всеукр.межвед.науч.-техн. Сб. вып. 178/2014.- С. 93-96