
УДК 621.396.677:625

И. Н. ПРЕСНЯКОВ, канд. техн. наук, *О. В. СЫТНИК*, канд. техн. наук

**БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ СОВМЕСТНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-
СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ**

Скорость адаптации и степень подавления пространственно-временных помех — наиболее важные показатели для антенной решетки (АР), работающей вблизи авиатрасс с интенсивным движением. Переотражения сигналов от движущихся самолетов и другие помехи создают нестационарную помеховую обстановку. Это затрудняет применение известных алгоритмов адаптации, которые требуют большого объема вычислений на один отсчет входных сигналов и поэтому не

могут быть реализованы в реальном масштабе времени для многоэлементных АР, либо не обеспечивают заданную степень подавления помех за ограниченный интервал времени. Кроме того, алгоритмы подавления помех никак не учитывают временные и спектральные свойства сигналов помех.

В частности, выходной сигнал N -элементной АР представляет собой аддитивную смесь дискретных отсчетов помеховых сигналов $\vec{X}(k)$, действующих в области боковых лепестков диаграммы направленности (ДН) АР и гауссовского теплового шума $n(k)$ с распределением $N(0, R)$

$$y(k) = \vec{X}^T(k) \vec{W}^*(k) + n(k), \quad (1)$$

где $\vec{W}(k)$ — текущее значение вектора весовых коэффициентов (ВВК) АР; k — дискретное время.

Оптимальный ВВК, минимизирующий мощность помех на выходе АР, в общем случае определяется в соответствии с алгоритмом, описанным в работе [1]:

$$\vec{W}_{\text{опт}}(k) = \mu \vec{R}_{\text{пр}}^{-1}(k) \vec{T}_{\text{упр}}(k), \quad (2)$$

где μ — константа, определяющая уровень тепловых шумов в элементах АР; $\vec{R}_{\text{пр}}(k)$ — выборочная пространственно-корреляционная матрица $\vec{R}_{\text{пр}}(k) = E\{\vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k)\}$; $\vec{T}_{\text{упр}}(k)$ — вектор фазовых задержек, определяющий положение главного максимума ДН АР.

При вычислении ВВК в соответствии с алгоритмом (2) требуется порядка N^3 операций только комплексного умножения. В нестационарной помеховой обстановке для реализации такого алгоритма при $N > 100$ потребуются весьма сложный и дорогостоящий цифровой процессор.

Существенно уменьшить сложность и стоимость процессора, а также расширить функциональные возможности самой АР можно, если оптимальный ВВК вычислять с помощью алгоритма быстрой калмановской фильтрации (БКФ). Рассмотрим быстродействующий алгоритм обработки помеховых сигналов в АР, который основан на модификации алгоритма БКФ, предложенного в [2]. Реализация этого алгоритма для оптимального подавления нестационарных помех, действующих в области боковых лепестков АР, требует сведения задачи оценки пространственного спектра к задаче оценки коэффициентов авторегрессионной модели спектра.

При этом ААР представляется в виде N -элементного пространственно-временного фильтра, на вход которого подается последовательность отсчетов пространственно-временных сигналов длиной $p \geq 2N$. Оптимальный фильтр вычисляет оценку n -го члена входной последовательности по предыдущим p значениям:

$$\hat{x}_N(n) = \sum_{l=1}^p \vec{W}_N(l) \vec{x}_N(n-l), \quad (3)$$

где $\vec{x}_N(n)$ — оценка предсказанного сектора входной последовательности пространственных отсчетов, взятых в момент времени n . Разность между значением предсказанного вектора и текущим значением $\vec{x}_N(n)$ представляет собой сигнал ошибки $\vec{\varepsilon}_N(n)$, которую необходимо минимизировать по среднему квадрату:

$$\vec{\varepsilon}_N(n) = \vec{x}_N(n) - \widehat{\vec{x}}_N(n). \quad (4)$$

Минимизация этой ошибки по L пространственно-временным отсчетам входного сигнала приводит к системе уравнений относительно коэффициентов $\vec{W}_N(i)$, $i = \overline{1, P}$ вида

$$\begin{vmatrix} r(0)r(1) \dots r(p-1) \\ r(1)r(0) \dots r(p-2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r(p-1)r(p-2) \dots r(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{W}_N(1) \\ \vec{W}_N(2) \\ \vdots \\ \vec{W}_N(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r(L+1) \\ r(L+2) \\ \vdots \\ r(L+p-1) \end{vmatrix} \quad (5)$$

В векторно-матричных обозначениях система (5) записывается как

$$\vec{R}_{(PNNP)}(n) \vec{W}_{PN}(n) = \vec{r}_{PN}(n). \quad (6)$$

Имеется несколько различных способов решения системы (5) для вычисления оптимальной последовательности ВВК. При этом спектр мощности минимизированной ошибки (4) предсказания эквивалентен спектру белого шума [3]. Для рассматриваемой задачи он будет представлять собой пространственно-временной белый шум. Однако задача отыскания решения (5) осложняется тем, что из-за передвижения источников помех относительно плоскости решетки система уравнений (5) нестационарна.

Решение нестационарного варианта матричного уравнения Винера — Хопфа (6), которым является система уравнений (5), представляет серьезную вычислительную трудность. Однако эквивалентное решение можно найти, заменив решение уравнения Винера — Хопфа матричным дифференциальным уравнением Риккати [4]. Решение системы (5) ищем в соответствии с концепцией БКФ [2].

Для этого помимо, ошибки (4), рассмотрим ошибку прямого и обратного предсказаний, которые определим как

$$\vec{\varepsilon}_N^n(n) = \vec{x}_N(n) + \vec{A}_{Np}^T(n) \vec{x}_{pN}(n-1); \quad (7)$$

$$\vec{\varepsilon}_N^n(n) = \vec{x}_N(n-p) + \vec{B}_{Np}^T(n) \vec{x}_{pN}(n), \quad (8)$$

где $\vec{x}_{pN}(n) = [\vec{x}_N(n), \vec{x}_N(n-1), \dots, \vec{x}_N(n-p+1)]^T$.

Матрицы $\vec{A}_{\rho N}(n)$ и $\vec{B}_{\rho N}(n)$, входящие в уравнения (7), (8), можно получить в результате решения следующих уравнений:

$$\vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n-1)\vec{A}_{\rho N}(n) = -\vec{r}_{\rho N}^b(n), \quad \vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n)\vec{B}_{\rho N}(n) = -\vec{r}_{\rho N}^h(n),$$

где

$$\vec{r}_{\rho N}^b(n) = \sum_{i=L}^{n-1} \vec{x}_N(i+1) \vec{x}_{\rho N}^T(i); \quad \vec{r}_{\rho N}^h(n) = \sum_{i=L}^n \vec{x}_N(i-\rho) \vec{x}_{\rho N}^T(i).$$

Квадрат ошибки предсказания вперед и назад с учетом последних равенств запишем в виде

$$Er^b(n) = \sum_{i=k}^n \vec{x}_N^T(i) \vec{x}_N^*(i) + [\vec{r}_{\rho N}^b(n)]^T \vec{A}_{\rho N}(n); \quad (9)$$

$$Er^h(n) = \sum_{i=k}^n \vec{x}_N^T(i-\rho) \vec{x}_N^*(i-\rho) + [\vec{r}_{\rho N}^h(n)]^T \vec{B}_{\rho N}(n). \quad (10)$$

В качестве критерия оптимальности синтезируемого пространственно-временного фильтра естественно выбрать значение суммарной ошибки предсказания вперед и назад. Одновременная минимизация прямой (9) и обратной (10) ошибок предсказания позволяет получить рекуррентное соотношение для ВВК решетки, основанное на алгоритме БКФ.

Для перехода к БКФ запишем уравнение (6) для момента времени $n+1$

$$\vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n+1)\vec{W}_{\rho N}(n) = -\vec{r}_{\rho N}(n+1), \quad (11)$$

где

$$\vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n+1) = \vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n) + \vec{x}_{\rho N}(n+1) \vec{x}_{\rho N}^T(n+1); \quad (12)$$

$$\vec{r}_{\rho N}(n+1) = \vec{r}_{\rho N}(n) + \widehat{\vec{x}}_N(n+1) \vec{x}_{\rho N}^T(n+1). \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в (6), получаем

$$\begin{aligned} & [\vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n+1) - \vec{x}_{\rho N}(n+1) \vec{x}_{\rho N}^T(n+1)] \vec{W}_{\rho N}(n) = \\ & = \vec{r}_{\rho N}(n+1) - \widehat{\vec{x}}_N(n+1) \vec{x}_{\rho N}^T(n+1); \\ & \vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n+1) \vec{W}_{\rho N}(n) - \vec{x}_{\rho N}(n+1) \vec{x}_{\rho N}^T(n+1) \vec{W}_{\rho N}(n) + \\ & + \widehat{\vec{x}}_N(n+1) \vec{x}_{\rho N}^T(n+1) = \vec{r}_{\rho N}(n+1); \\ & \vec{R}_{(\rho NN\rho)}(n+1) [\vec{W}_{\rho N}(n) - \vec{R}_{(\rho NN\rho)}^{-1}(n+1) \vec{x}_N(n+1) \vec{\varepsilon}_N(n+1)] = \\ & = -\vec{r}_{\rho N}(n+1). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь априорная ошибка $\vec{\varepsilon}_N(n+1) = \vec{x}_{\rho N}^T(n+1) \vec{W}_{\rho N}(n) + \widehat{\vec{x}}_N(n+1)$.

Запишем корреляционное уравнение типа (6) для $n+1$ -го момента времени

$$\vec{R}_{(pNNp)}(n+1)\vec{W}_{pN}(n+1) = -\vec{r}_{pN}(n+1). \quad (15)$$

Сравнивая (14), (15), получаем

$$\vec{W}_{pN}(n+1) = \vec{W}_{pN}(n) + \vec{K}_{pN}(n+1)\vec{e}_N(n+1), \quad (15a)$$

где $\vec{K}_{pN}(n+1)$, как это следует из (14), удовлетворяет уравнению

$$\vec{R}_{(pNNp)}(n+1)\vec{K}_{pN}^*(n+1) = -\vec{x}_{pN}(n+1); \quad (16)$$

$$\vec{R}_{(pNNp)}(n)\vec{K}_{pN}^*(n) = -\vec{x}_{pN}(n). \quad (17)$$

Из сравнения уравнений для коэффициентов фильтра Калмана (17) на n -м и $n+1$ -м шагах следует, что вектор усиления фильтра Калмана представляет собой решение системы уравнений (16), правая часть которой получена из правой части системы (17) путем добавления к ней вектора $\vec{x}_N(n+1)$, удаления вектора $\vec{x}_N(n-p)$ и сдвига всех остальных векторов пространственных отсчетов на один такт. При этом алгоритм вычисления вектора $\vec{K}_{pN}(n+1)$ можно записать так [2]:

$$\vec{x}_{N,p+1}(k) = \begin{bmatrix} \vec{x}_{N,p}(k) \\ \vec{x}_N(k-p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}_N(k) \\ \vec{x}_{N,p}(k-1) \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$\vec{R}_{[N,(p+1)(p+1),N]}(n) = \begin{bmatrix} \vec{R}_{(pNNp)}(n) & \vec{r}_{pN}^B(n) \\ \vec{r}_{pN}^B(n)^T & \vec{r}_{NN}^B(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{NN}^B(n) & \vec{r}_{ND}^B(n) \\ \vec{r}_{pN}^B(n) & \vec{R}_{(pNNp)} \end{bmatrix}^T. \quad (19)$$

Здесь

$$\vec{r}_{NN}^B(n) = \sum_{i=L}^n \vec{x}_{pN}(i-p)\vec{x}_{pN}^T(i-p); \quad (20)$$

$$\vec{r}_{pN}^B(n) = \sum_{i=L}^n \vec{x}_{pN}(i)\vec{x}_{pN}^T(i). \quad (21)$$

$$\vec{R}_{[N,(p+1)(p+1),N]}(n)\vec{K}_{N,p+1}^*(n) = -\vec{x}_{N,p+1}(n); \quad (22)$$

$$\vec{K}_{N,p+1}^*(n) = \begin{bmatrix} \vec{K}_{N,p}^*(n) \\ -\vec{0} \end{bmatrix} - \vec{e}_N^n(n) [\vec{r}_{N,p}^B(n) + (\vec{r}_{N,p}^B(n))^T \vec{H}_{N,p}(n)]^{-1} \begin{bmatrix} \vec{H}_{N,p}^T(n) \\ \vec{I}_N \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где

$$\vec{H}_{N,p}(n) = \vec{H}_{N,p}(n-1) + \vec{K}_{N,p}(n)\vec{e}_N^n(n).$$

Обратная матрица, заключенная в квадратные скобки в выражении (23), есть $E r^B(n)$. Аналогичное соотношение можно записать для пол-

ной ошибки предсказания. Вычисленный в соответствии с выражением (23) расширенный вектор усиления фильтра Калмана представим в виде:

$$\vec{K}_{N, \rho}^*(n+1) = \left[\frac{\vec{K}_{N, \rho}^*(n+1)}{\vec{d}_{N, \rho}^*(n+1)} \right]. \quad (1)$$

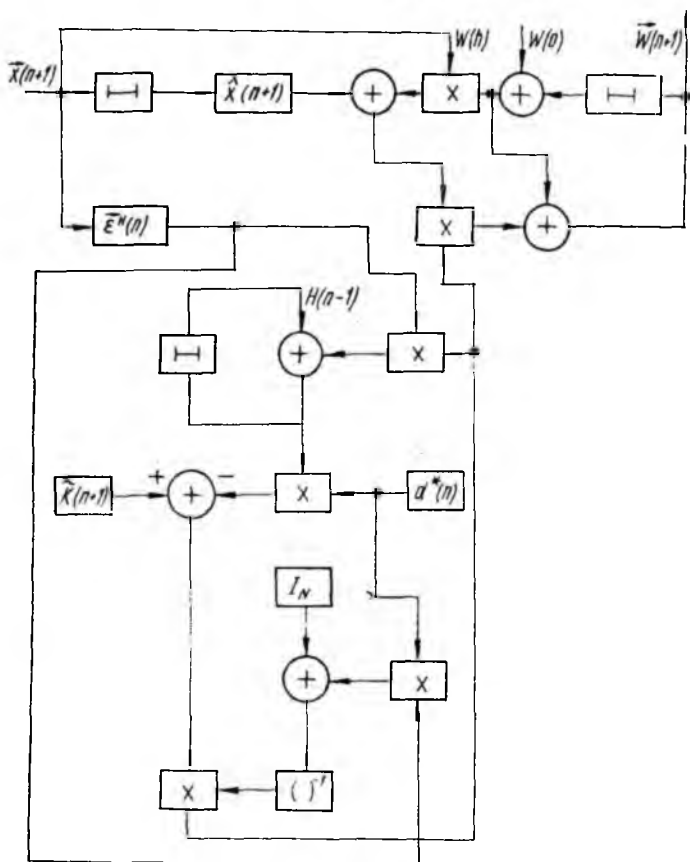


Рис. 1

Тогда в соответствии с результатами, полученными в работе [2], имеем

$$\vec{K}_{N, \rho}^*(n+1) = [\vec{K}_{N, \rho}^*(n+1) - \vec{d}_{N, \rho}^*(n+1) \vec{H}_{N, \rho}^*(n)] [I_N + \vec{d}_{N, \rho}^*(n+1) \vec{\epsilon}_{N, \rho}^*(n+1)^{-1}]. \quad (24)$$

Подставляя соотношение (24) в (15 а), приходим к рекуррентному выражению для вычисления оптимального текущего значения ВК ААР в нестационарных условиях

$$\vec{W}_{pN}(n+1) = \vec{W}_{pN}(n) + [\vec{K}_{N,p}(n+1) - \vec{d}_N^*(n+1) \vec{H}_{N,p}(n)] \times \\ \times [\vec{I}_N + \vec{d}_N^*(n+1) \vec{\varepsilon}_N^H(n+1)]^{-1} \vec{\varepsilon}_N(n+1). \quad (25)$$

Подставляя в выражение (25) рекуррентное соотношение для $\vec{\varepsilon}_N(n+1)$, получаем

$$\vec{W}_{pN}(n+1) = \vec{W}_{pN}(n) + [\vec{K}_{N,p}(n+1) - \vec{d}_N^*(n+1) \vec{H}_{N,p}(n)] \times \\ \times [\vec{I}_N + \vec{d}_N^*(n+1) \vec{\varepsilon}_N^H(n+1)]^{-1} [\vec{x}_{Np}^T(n+1) \vec{W}_{pN}(n) + \hat{x}_N(n+1)]. \quad (26)$$

Укрупненная структурная схема цифрового процессора, реализующего алгоритм вычисления оптимального ВВК ААР в соответствии с (26), представлена на рис. 1.

Исследование алгоритма (26) на ЭВМ подтвердило его эффективность в задачах обработки нестационарных помеховых сигналов в ААР. В отличие от традиционных алгоритмов, требующих порядка $[(N \times p)(N \times p)]^3$ операций комплексного умножения для вычисления оптимального ВВК ААР, рассмотренный алгоритм требует порядка $N^3 + 8p$ операций комплексного умножения на один отсчет

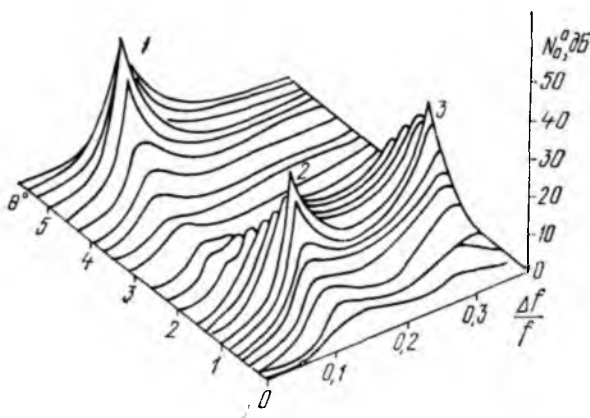


Рис. 2

входных данных, что представляет собой наглядный выигрыш в быстродействии. Кроме того, в силу свойств алгоритмов прямого и обратного предсказаний, использованных при выводе соотношения (26), предлагаемый алгоритм обладает повышенной разрешающей способностью как в пространственной, так и в спектральной областях. Это обусловлено тем, что рассмотренный алгоритм осуществляет оптимальное предсказание сигналов одновременно в пространственной и временной областях, что эквивалентно соответствующему расширению апертуры. При этом, если помехи неразрешимы по пространственным координатам, они могут быть разрешимы в спектральной области.

Для иллюстрации указанных свойств предложенного алгоритма на рис. 2 представлены результаты моделирования восьмиэлементной ААР, содержащей по 64 временных канала в каждом элементе. Изотропные элементы антенны располагались на расстояниях порядка $\lambda/2$ друг от друга. Помеховая обстановка моделировалась тремя узкополосными гауссовскими источниками, мощность каждого из которых превосходила мощность тепловых шумов антенны на 50 дБ. Угловой разнос между источниками составил 4° и 0° , а соответствующие нормированные частоты сигналов источников — 0,1; 0,1; 0,3. Здесь нормировка осуществлялась в соответствии $f_n = f_n/f_0$, f_0 — центральная частота полосы пропускания антенны.

Оценка пространственно-временного спектра со «сверхразрешением» вычислялась по методу теплового шума [5], обобщенному в двумерный случай

$$N_{N,N}^n = (\mu \vec{W}_{DN}^{*T}(n) \vec{W}_{DN}(n))^{-1}.$$

Как видно из рис. 2, источники 2, 3, являясь неразрешимыми по пространственным координатам, могут быть уверенно разрешены в частотной области. На примере предложенного алгоритма наглядно вырисовываются преимущества алгоритмов совместной оценки в пространственной и временной областях.

Список литературы: 1. *Applebaum S. P.* Adaptive Arrays // IEEE Trans. on Antennas and Propagat.— 1976.— AP—24, N 5.— P. 585—598. 2. *Ljung L., Morf M., Falconer D.* Fast Calculation of Gain Matrices for Recursive Estimation Schemes // Int. J. Contr.— 1978.— 27, N 1.— P. 1—19. 3. *Childers D. G.* Ed. Modern Spectrum Analysis // New York IEEE Press.— 1978.— P. 287—292. 4. *Калман Р. Е., Бьюси Р. С.* Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания / Тр. амер. о-ва инж.-мех. Техн. механика. Сер. D.— 1961.— № 1. С. 123—141. 5. *Гейбриел У. Ф.* Спектральный анализ и методы сверхразрешения с использованием адаптивных решеток // Тр. ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектрон.— 1980.— 68, № 6.— С. 19—32.

Поступила в редколлегию 12.02.86