С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, Н. В. ШАРОНОВА, канд. техн. наук,
И. Ю. ШУБИН

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ КАНОНИЧЕСКОЙ КОНЪЮНКТИВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

В алгебре логики имеет место принцип двойственности, в силу которого методы отыскания минимальной конъюнктивной нормальной формы оказываются совершенно аналогичными методам отыскания минимальной ДНФ. В универсальной алгебре конечных предикатов произвольного порядка [1] мы лишены принципа двойственности, операции дизъюнкции и конъюнкции уже неравноправны. Вследствие этого методы конъюнктивной минимизации должны рассматриваться отдельно и нельзя обойтись ссылкой на аналогию с дизъюнктивной минимизацией.

Данная статья развивает ранее введенные определения и алгоритмы канонической конъюнктивной минимизации для случая конечных предикатов произвольного порядка.

Прежде всего, докажем несколько важных утверждений, основывающихся на понятиях импликанты и имплиценты предикатов произвольного порядка и на основе свойств импликанты.

Под *имплицентой конечного предиката* f понимают такой конечный предикат g, если на любом наборе значений аргументов, для которых $g=0$, имеет место $f=0$. Говорят, что имплицента g накрывает своими нулями нули предиката f.

Если конечный предикат g есть имплицента предиката f, то предикат $\bar{g}$ является импликантой предиката $\bar{f}$, и наоборот. Предикат g является имплицентой предиката f в том и только том случае, когда $f \supset g \equiv 1$. В самом деле, если конечный предикат g есть имплицента предиката f, то, согласно доказанному ранее получим $\bar{g} \supset \bar{f} \equiv 1$, откуда $\bar{\bar{g}} \vee \bar{f} \equiv 1$, $\bar{f} \vee g \equiv 1$, $f \supset g \equiv 1$. Двигаясь тем же путем в противоположную сторону, получаем обратное.

Если $f \equiv g \cdot h$, где f, g, h — некоторые конечные предикаты, то предикат g является имплицентой предиката f. Действительно, пусть $f \equiv g \cdot h$. Если $g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, то $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \equiv g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)\, h(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \equiv 0h(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \equiv 0$.

Пример. Пусть $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a, d\}$, $A_3 = \{e, f, g\}$, $B = \{x, y, z\}$ — некоторые алфавиты, $f \equiv x^a \vee y^d z^g$ — некоторый конечный предикат. С помощью второго дистрибутивного закона получим $f \equiv (x^a \vee y^d)(x^a \vee z^g)$. Элементарная дизъюнкция $x^a \vee z^g$ есть амплицента предиката f. Ее собственными частями служат предикаты $g_1 = x^a$ и $g_2 = z^g$. Проверим, являются ли эти предикаты имплицентами предиката f:

$$f \supset g_1 \equiv x^a \vee y^d z^g \supset x^a \equiv \overline{x^a \vee y^d z^g} \vee x^a \equiv \overline{x^a}\,(\overline{y^d} \vee \overline{z^g}) \vee x^a \equiv$$

$$\equiv (\overline{x^a} \vee x^a)(x^a \vee \overline{y^d} \vee \overline{z^g}) \equiv x^a \vee \overline{y^d} \vee \overline{z^g} \not\equiv 1.$$

$$f \supset g_2 \equiv x^a \vee y^d z^g \supset z^g \equiv \overline{x^a} \vee z^g \not\equiv 1,$$

т. е. предикаты g_1 и g_2 не являются имплицентами предиката f, и, следовательно, предикат $x^a \vee z^g$ есть простая имплицента предиката.

Конъюнкция любого числа имплицент конечного предиката произвольного порядка является имплицентой этого предиката. Действительно, пусть $g_1, g_2, \ldots, g_p$ — имплиценты предиката f. Это означает, что $f \supset g_1 \equiv 1$, $f \supset g_2 \equiv 1, \ldots, f \supset g_p$. Тогда

$$f \supset g_1 g_2 \ldots g_p \equiv \overline{f} \vee g_1 g_2 \ldots g_p \equiv (\overline{f} \vee g_1)(\overline{f} \vee g_2) \ldots (f \vee g_p) \equiv$$

$$\equiv (f \supset g_1)(f \supset g_2) \ldots (f \supset g_p) \equiv 1.$$

Каждому конечному предикату соответствует множество обозначающих его конъюнктивных нормальных форм. Задача канонической конъюнктивной минимизации состоит в отыскании в множестве КНФ формулы с наименьшим числом узнаваний символов (минимальной КНФ).

Проблема канонической минимизации алгебры конечных предикатов имеет много общего с аналогичной проблемой алгебры логики. В алгебре логики известны алгоритмы минимизации Квайна—Мак-Класки, Порецкого—Блейка, Нельсона [1, 2].

Утверждение 1. Для любого конечного предиката f результатом применения алгоритма Квайна—Мак-Класки, распространенного на случай алгебры конечных предикатов, к его совершенной КНФ является сокращенная КНФ.

Доказательство. Представим окончательную форму записи предиката f в виде $q \wedge Q$, где q — одна из элементарных сумм, составляющих форму f_i, а Q — конъюнкция всех членов формы. Отождествим полученную форму f_i с заданным предикатом f и заметим, что q является имплицентой f. Это следует непосредственно из определения конъюнкции. Запись $f_i = q \wedge Q$ указывает также на полноту системы имплицент q и Q.

Пусть q — непростая имплицента предиката f. Тогда найдется элементарная сумма g, составленная из части элементарной суммы q и являющаяся имплицентой предиката f. В силу свойств суммы, имплицента g также обращается в нуль на тех наборах, на которых q равно нулю, система имплицент q и Q является полной системой, и справедливо, что $f=q\wedge Q$. Поскольку к исходной форме $f=q\wedge Q$ может быть применена одна из операций алгоритма Квайна—Мак-Класки, то приходим к противоречию, источником которого является предположение о том, что имплицента q — непростая. Ввиду произвольности выбора q приходим к выводу, что применение алгоритма Квайна—Мак-Класки к исходной форме предиката f, заданной совершенной КНФ, представляет собой конъюнкцию некоторого множества ее простых имплицент, т. е. сокращенную КНФ предиката f.

Утверждение 2. Если в произвольной КНФ конечного предиката произвести все возможные обобщенные склеивания и устранить затем все элементарные поглощения (т. е. выполнить операции, предусмотренные алгоритмом Порецкого—Блейка), то получится сокращенная КНФ предиката f.

Для доказательства этого утверждения покажем, что при многократном применении операции обобщенного склеивания из произвольной КНФ предиката может быть получена простая имплицента этой функции. Действительно, в результате применения к КНФ операции обобщенного склеивания мы снова получаем некоторую КНФ. Каждый же член КНФ является элементарной суммой и имплицентой предиката f. Поэтому он поглощается какой-либо простой имплицентой предиката f. Таким образом, после получения всех простых имплицент устранение всех элементарных поглощений обязательно приведет к сокращенной КНФ.

Для доказательства того, что в результате обобщенных склеиваний из произвольной КНФ предиката f могут быть получены все ее простые имплиценты, проведем индукцию по числу переменных n, от которых зависит предикат f. Для $n=1$ это утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для всех $n<m$, и докажем его для $n=m$.

Заметим, что простая имплицента p является конституэнтой нуля, входит во всякую КНФ F и, следовательно, получается из нее в результате пустого множества обобщенных склеиваний. Действительно, в КНФ F обязательно найдется элементарная сумма r, которая обращается в нуль на наборе, соответствующем конституэнте p. Но тогда, очевидно, $p=rl$, где l — некоторая элементарная сумма, и, поскольку r является имплицентой предиката f, а p — ее простой имплицентой, то $l=1$ и, следовательно, $p=r$.

Итак, когда простая имплицента p является конституэнтой нуля, она обязательно войдет в любую КНФ предиката f в том числе и в ту КНФ, которая получается в результате при менения операций обобщенного склеивания к любой данной исходной КНФ F предиката f. Предположим теперь, что в p не входит хотя бы одна из переменных, от которых зависит предикат f. Этой переменной может быть, например, переменная x. В этом случае представим КНФ F в виде $F=Ax\wedge B\bar{x}\wedge C$, группируя члены и вынося x и $\bar{x}$ за скобки. Являясь имплицентой функции F и не завися от x, элементарная сумма p будет, имплицентой функций, которые получаются из функции F в результате приравнивания к нулю и единице. Иными словами, p — имплицента функций $A\wedge C$ и $B\wedge C$. Но тогда p будет, очевидно, имплицентой суммы этих функций $(A\wedge C)\vee(B\wedge C)=$ $=AB\vee C$.

Обозначим это произведение через F_1 — имплиценту функции F, поскольку, применяя к F операцию обобщенного склеивания, мы получим

$$F=Ax\wedge B\bar{x}\wedge C=Ax\wedge B\bar{x}\wedge(AB\vee C)=Ax\wedge B\bar{x}\wedge F_1. \quad (1)$$

Теперь ясно, что никакая собственная часть элементарной суммы p не может быть имплицентой функции F_1, так как в противном случае она была бы имплицентой функции F, что исключено ввиду простоты имплиценты p. Следовательно, p представляет собой простую имплиценту функции F_1. Поскольку F_1 зависит от меньшего числа переменных, чем функция F, к ней можно применить индуктивное предположение. Поэтому можно считать, что простая имплицента p получается из любой КНФ функции F_1, в результате некоторого числа обобщенных склеиваний. Но формула (1) показывает, что какая-то КНФ функции F_1 получается при обобщенных склеиваниях (по x) из исходной КНФ F. Следовательно, простая имплицента p возникает из КНФ F предиката f в результате применения операции обобщенного склеивания, повторенной некоторое число раз. Ввиду произвольности выбора p и F, утверждение доказано.

В методе канонической конъюнктивной минимизации Нельсона, обобщенного для случая алгебры конечных предикатов, исходной информацией служит произвольно выбранная ДНФ конечного предиката.

Если от произвольной ДНФ конечного предиката перейти к его КНФ, применить операцию конъюнктивного поглощения, основанную на использовании тождества $A(A\vee B)\equiv A$, то получаем сокращенную КНФ.

Покажем, что при выполнении перечисленных выше операций в произвольной ДНФ $H=H_1\vee H_2\vee\ldots\vee H_s$ конечного предиката f может быть получена любая простая имплицента q этого предиката (где H_i — элементарная конъюнкция, $1\leqslant i\leqslant s$). При этом будем исходить из того, что рассматриваемая форма предиката не является тривиальной, т. е. исходный предикат отличен от константы. Тогда, не нарушая общности рассуждений, представим простую имплиценту q данного предиката в виде суммы некоторого (непустого) множества узнаваний. В силу закона истинности оно будет сведено к единице, либо к элементарной сумме узнаваний

$$q = x_{j1}^{a_{1}j} \vee x_{j2}^{a_{j}k} \vee \ldots \vee x_{jl}^{a_{j}r} \quad (l \geqslant 1,\ 1 < i,\ k, \ldots, r \leqslant p).$$

Нетрудно убедиться в том, что предположение о простоте импликценты q не позволяет обратить исходный предикат f в тождественную единицу, когда

$$x_{j2}^{a_{j}k} = 1,\ x_{j3}^{a_{j}m} = 1, \ldots, x_{jl}^{a_{j}r} = 1,$$

поскольку сумма узнаваний $x_{j2}^{a_{j}k} \vee x_{j3}^{a}{}^{jm} \vee \ldots \vee x_{jl}^{a}{}^{jr}$ также была бы имплицентой предиката f. Это означает, что в форме H предиката f найдется хотя бы одна такая элементарная конъюнкция, которая не содержит узнаваний $x_{j2}^{a}{}^{jk}$, $x_{j3}^{a}{}^{jm}, \ldots$, $x_{jl}^{a}{}^{jr}$. Сохраняя при этом общность рассуждений, можно считать такой элементарной конъюнкцией H_1. Далее, полагая $x_{j1}^{a}{}^{jl} = 1, \ldots, x_{jl}^{a}{}^{jr}$, получим тождественное равенство единице и самого предиката f. С другой стороны, это возможно, когда в каждую элементарную конъюнкцию входит хотя бы одно из рассматриваемых нами узнаваний (так как вся форма равна единице при $f \equiv 1$). Из предположения о том, что H_1 не содержит узнаваний $x_{j2}^{a}{}^{jk}$, $x_{j3}^{a}{}^{jm}, \ldots$, $x_{jl}^{a}{}^{jr}$, следует, что она содержит узнавание $x_{j1}^{a}{}^{ji}$, т. е. представима в виде $H_1 = x_{jl}^{a}{}^{jl} \wedge H_1^*$. Аналогично, не нарушая общности рассуждений, запишем:

$$H_2 = x_{j2}^{a_{j}k} \wedge H_2^*, \ \ldots,\ H_l = x_{jl}^{a_{j}r} \wedge H_l^*.$$

В каждую из остальных $(s-l)$ элементарных конъюнкций входит, по крайней мере, одно из узнаваний вида $x_{j1}^{a}{}^{jl}, \ldots$, $x_{il}^{a}{}^{jr}$. Теперь нетрудно убедиться, что выполнение всех, где это возможно, операций объединения одинаковых дизъюнктивных членов и элементарного поглощения даст в полученной таким образом конъюнктивной форме член

$$q = x_{j1}^{a_{j}i} \vee x_{j2}^{a_{j}k} \vee \ldots \vee x_{jl}^{a_{j}r}.$$

Ввиду произвольности выбора исходной дизъюнктивной нормальной формы и получения любой наперед заданной простой имплиценты конечного предиката f приходим к выводу, что конъюнктивная нормальная форма содержит все простые имплиценты рассматриваемого предиката, т. е. является его сокращенной КНФ.

Теория интеллекта исходит из конъюнктивности интеллекта. Свойство конъюнктивности чрезвычайно ограничивает класс уравнений алгебры конечных предикатов, которые могут эффективно решаться человеческим интеллектом. Конъюнктивность представляется одним из фундаментальных качеств человеческого интеллекта. При построении бионических интеллектуальных систем в этом свете приобретают большое значение эффективные методы минимизации конъюнктивных форм, описывающих процессы интеллекта.