УДК 628.373.8

А.И. КОЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С РЕЗОНАНСНЫМИ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СФЕРАМИ

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на произвольном числе малых резонансных магнитодиэлектрических сфер при их произвольном расположении в прямоугольном волноводе. Рассеяние волн на одиночных неоднородностях изучалось в работах [1,2].

Полагаем, что в прямоугольном волноводе, проницаемости заполнения которого ε_0, μ_0, находятся N магнитодиэлектрических сфер радиуса a_p с проницаемостями ε_p, μ_p $(p \in N)$. Стенки волновода определяются плоскостями $x = 0, x = d$; $y = 0$, $y = h$, координата z направлена по оси волновода. Вне сфер $a/\lambda << 1$, но внутри сфер возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ – длина волны в свободном пространстве, а λ_g – длина волны в сфере. Поля в волноводе будем записывать в виде $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^э$ и магнитный $\vec{\Pi}^м$ потенциалы Герца

$$\begin{aligned} \vec{E}_{расс} &= \left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\vec{\Pi}^э - ik\mu_0\left[\nabla, \vec{\Pi}^м\right], \\ \vec{H}_{расс} &= \left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\vec{\Pi}^м + ik\varepsilon_0\left[\nabla, \vec{\Pi}^э\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Для отдельных сфер потенциалы Герца представим в виде [3]

$$\vec{\Pi}^э = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}^0(\vec{r}')f\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right)dV,$$

$$\vec{\Pi}^м = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}^0(\vec{r}')f\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right)dV,$$

где $f\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right)$ является решением уравнения

$$\Delta f\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right) + k^2\varepsilon_0\mu_0 f\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right) = -4\pi\delta\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности и имеет вид

$$f\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right) = \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{2}$$

а $\vec{E}^0(\vec{r}')$, $\vec{H}^0(\vec{r}')$ – внутренние поля рассеивателей, V – объем рассеивателей.

Можно показать, что для внешних точек сферы ($r > r'$) интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (2) имеет вид

$$W(\vec{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}dV = \frac{4\pi}{k_1^3}\left(\sin k_1 a - k_1 a\cos k_1 a\right)\frac{e^{-ik_1 r}}{r},$$

где $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $k = 2\pi/\lambda$, а r – определяет расстояние от центра до внешних точек сферы.

Внутреннее поле рассеивателей будем находить, опираясь на интегральные уравнения [3]. Вначале рассмотрим случай, когда $a/\lambda_g \ll 1$ внутри и $a/\lambda \ll 1$ вне сферы, а потом результаты вычисления внутреннего поля рассеивателей обобщим и на резонансный случай, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сферы.

Воспользуемся методом изображений и представим металлический прямоугольный волновод с рассеивающими сферами в виде пространственной решётки из сфер и их зеркальных изображений в стенках волновода, и эту модель будем использовать при вычислении внутренних и рассеянных полей.

Тогда, для пространственной решетки сфер и их зеркальных изображений построим систему квазистационарных уравнений для определения внутренних полей в виде системы неоднородных для сфер и однородных для их зеркальных изображений уравнений. Входящие в эту систему уравнений неоднородные и однородные уравнения для произвольной сферы и произвольного изображения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) = \left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{p'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) - \\
&-\sum_{\substack{1 \\ p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty \\ s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty \\ t}}^{\infty}{}_{(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)} \left\{\left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t) - \right. \\
&\left. - ik\mu_0\left[\nabla, \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}, \\
&\vec{H}_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) = \left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{p'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) - \\
&-\sum_{\substack{1 \\ p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty \\ s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty \\ t}}^{\infty}{}_{(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)} \left\{\left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \right. \\
&\left. + ik\varepsilon_0\left[\nabla, \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&0 = \left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{p'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^0_{(p',s',t')}(\vec{r}',t) - \\
&-\sum_{\substack{1 \\ p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty \\ s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty \\ t}}^{\infty}{}_{(p,s,t)\neq(p',s',t')} \left\{\left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t) - \right.
\end{aligned}
$$

$$-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{(p,s,t)}(\vec r)\vec H^0_{(p,s,t)}(\vec r',t)\right]\Bigg\},$$

$$0=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{p'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec H^0_{(p',s',t')}(\vec r',t)-$$

$$-\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{(p,s,t)}(\vec r)\vec H^0_{(p,s,t)}(\vec r',t)+\right. \qquad (4)$$

$$(p,s,t)\neq(p',s',t')$$

$$+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{(p,s,t)}(\vec r)\vec E^0_{(p,s,t)}(\vec r',t)\right]\Bigg\},$$

где для неоднородных уравнений (3) $\vec E_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)$, $\vec H_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)$ и $\vec E^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)$, $\vec H^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)$ – поле падающей волны и внутреннее поле выделенной сферы, а $\vec E^0_{(p,s,t)}(\vec r',t)$, $\vec H^0_{(p,s,t)}(\vec r',t)$ – внутренние поля всех остальных сфер и изображений.

Для однородных уравнений (4) $\vec E^0_{(p',s',t')}(\vec r',t)$, $\vec H^0_{(p',s',t')}(\vec r',t)$ – внутреннее поле выделенного изображения, а $\vec E^0_{(p,s,t)}(\vec r',t)$, $\vec H^0_{(p,s,t)}(\vec r',t)$ – внутренние поля остальных сфер и изображений.

Величины $W^{м}_{(p,s,t)}(\vec r)$, $W^{э}_{(p,s,t)}(\vec r)$ имеют вид

$$W^{м}_{(p,s,t)}(\vec r)=-\frac{4\pi}{k_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\frac{e^{-ik_1r_{(p',s',t'),(p,s,t)}}}{r_{(p',s',t'),(p,s,t)}},$$

$$W^{э}_{(p,s,t)}(\vec r)=\frac{4\pi}{k_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\frac{e^{-ik_1r_{(p',s',t'),(p,s,t)}}}{r_{(p',s',t'),(p,s,t)}}, \qquad (5)$$

$$r_{(p',s',t'),(p,s,t)}=\sqrt{\left(x_{p',s'}-x_{p,s}\right)^2+\left(y_{p',t'}-y_{p,t}\right)^2+\left(z_{p'}-z_p\right)^2},$$

где

$$x_{p,s}=\left[s-\{(-1)^s-1\}0{,}5\right]d-(-1)^{s-1}x_{p,s=0} \qquad (s=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm\infty),$$

$$y_{p,t}=\left[t-\{(-1)^t-1\}0{,}5\right]h-(-1)^{t-1}y_{p,t=0} \qquad (t=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm\infty), \qquad (6)$$

$$z_p=z_0+l_p=z_0+pl \qquad (p=1,2,3,\ldots,N).$$

Здесь $x_{p',s'}, y_{p',t'}, z_{p'}$ и $x_{p,s}, y_{p,t}, z_p$ - координаты выделенной сферы или изображения и остальных сфер и изображений, $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_p$ - координаты сферы, порождающей изображения. Пространственные положения сфер и изображений однозначно определяются упорядоченными тройками чисел $c=(p,s,t)$.

Первые слагаемые справа (3,4) в неоднородном и однородном уравнениях связаны с внутренним полем выделенной сферы или изображения без учета влияния всех остальных сфер и изображений, а вторые слагаемые учитывают влияние на выделенную сферу или изображение всех остальных сфер и изображений.

Рассматриваемая система уравнений состоит из $2N$ векторных неоднородных уравнений и бесконечного числа векторных однородных уравнений, решение которой для выделенной сферы или изображения имеет вид

$$
\begin{aligned}
\vec{E}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta^{эм}} \sum_{p=1}^{N} \left(\hat{g}^{эс}_{p} \vec{E}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}^{эс}_{p} \vec{H}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t) \right), \\
\vec{H}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta^{эм}} \sum_{p=1}^{N} \left(\hat{g}^{мс}_{p} \vec{E}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}^{мс}_{p} \vec{H}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t) \right),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\Delta^{эм}$ – детерминант системы уравнений.

Если предположить, что внутреннее поле сферы и её изображений одинаковы, то бесконечная система уравнений сведется к системе $2N$ векторных неоднородных уравнений, решение которой аналогично (7), если под входящими в неё величинами понимать величины, относящиеся к этому случаю.

Систему уравнений для внутреннего поля (3,4) можно записать в другом виде, если поле падающей волны, внутреннее и рассеянное поля представить в виде некоторых разложений.

Разложим по собственным функциям поперечного сечения прямоугольного волновода выражение с экспонентой в соотношениях (5) [3]

$$
\frac{e^{-ik_1 r_{(p',s',t'),(p,s,t)}}}{r_{(p',s',t'),(p,s,t)}} = \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}\left(x_{p',s'} - x_{p,s}\right) + \frac{n\pi}{h}\left(y_{p',t'} - y_{p,t}\right) + \beta_{mn}\left|z_{p'} - z_{p}\right|\right]},
$$

где

$$
\chi_{mn} = \begin{cases} 2, \text{ если } m = 0 \text{ или } n = 0, \\ 1, \text{ если } m,n > 0, \end{cases}
$$

$$
\beta_{mn} = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} \qquad (m,n = 0,1,2,\ldots).
$$

Тогда величины $W^{м}_{(p,s,t)}(\vec{r})$ и $W^{э}_{(p,s,t)}(\vec{r})$ (5) можно записать в виде

$$
W^{м}_{(p,s,t)}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{k_1^3}\Big(\sin k_1 a_p - {} - k_1 a_p \cos k_1 a_p\Big) \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}\left(x_{p',s'} - x_{p,s}\right) + \frac{n\pi}{h}\left(y_{p',t'} - y_{p,t}\right) + \beta_{mn}\left|z_{p'} - z_{p}\right|\right]},
$$

$$
W^{э}_{(p,s,t)}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3}\Big(\sin k_1 a_p - {} - k_1 a_p \cos k_1 a_p\Big) \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}\left(x_{p',s'} - x_{p,s}\right) + \frac{n\pi}{h}\left(y_{p',t'} - y_{p,t}\right) + \beta_{mn}\left|z_{p'} - z_{p}\right|\right]}.
$$

Поле падающей волны относительно рассеивающей сферы представим в виде бесконечной суммы пространственных гармоник

$$\vec{E}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{E}^{mn}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t),$$

$$\vec{H}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{H}^{mn}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t).$$

Внутреннее поле рассеивателей запишем в виде

$$\vec{E}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{E}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t),$$
$$\vec{H}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{H}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t), \tag{8}$$

это представление нельзя рассматривать как разложение Фурье.

Уравнения для компонент внутренних полей $\vec{E}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t),\vec{H}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)$ произвольной сферы представим в виде

$$\vec{E}^{mn}_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{p'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^{0mn}_{(p',s'=0,t=0)}(\vec{r}',t)-$$
$$-\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)-\right.\right.$$
$$(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)$$
$$\left.-ik\mu_0\left[\nabla,(-1)\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x_{p',s'}-x_{p,s}\right)+\frac{\pi n}{h}\left(y_{p',t'}-y_{p,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{p'}-z_p\right|\right]},$$

$$\vec{H}^{mn}_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{p'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^{0mn}_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)- \tag{9}$$
$$-\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)(-1)\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)+\right.$$
$$(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)$$
$$\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x_{p',s'}-x_{p,s}\right)+\frac{\pi n}{h}\left(y_{p',t'}-y_{p,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{p'}-z_p\right|\right]},$$

$$0=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{p'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^{0mn}_{(p',s',t')}(\vec{r}\,',t)-$$

$$-\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}{}_{(p,s,t)\neq(p',s',t')}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)-\right.$$

$$\left.-ik\mu_0\left[\nabla,(-1)\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x_{p',s'}-x_{p,s}\right)+\frac{\pi n}{h}\left(y_{p',t'}-y_{p,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{p'}-z_p\right|\right]},$$

$$0=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{p'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^{0mn}_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}\,',t)- \tag{10}$$

$$-\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}{}_{(p,s,t)\neq(p',s',t')}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)(-1)\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)+\right.$$

$$\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x_{p',s'}-x_{p,s}\right)+\frac{\pi n}{h}\left(y_{p',t'}-y_{p,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{p'}-z_p\right|\right]}.$$

Решение системы уравнений (9,10) для N сфер имеет вид

$$\vec{E}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta^{mn}}\sum_{p=1}^{N}\left(\hat{g}_p^{\,эстmn}\vec{E}^{mn}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}\,',t)+\hat{\beta}_p^{\,эстmn}\vec{H}^{mn}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}\,',t)\right)\right],$$

$$\vec{H}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta^{mn}}\sum_{p=1}^{N}\left(\hat{g}_p^{\,мстmn}\vec{E}^{mn}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}\,',t)+\hat{\beta}_p^{\,мстmn}\vec{H}^{mn}_{0(p,s=0,t=0)}(\vec{r}\,',t)\right)\right], \tag{11}$$

где Δ^{mn} – детерминант системы уравнений (9,10).

Числа m, n, связанные с распространяющимися волнами, определяются условием

$$k^2\varepsilon_0\mu_0>\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,$$

а с затухающими волнами –

$$k^2\varepsilon_0\mu_0<\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2.$$

Потенциалы Герца $\vec{\Pi}^э$ и $\vec{\Pi}^м$ рассеянного в волноводе поля по известному внутреннему полю (7) отдельных сфер и зеркальных изображений представим в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер и изображений

$$\vec{\Pi}^{э}(\vec{r},t)=\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\frac{e^{-ik_1r(p,s,t)}}{r(p,s,t)},$$

$$\vec{\Pi}^{м}(\vec{r},t)=-\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\left(\frac{\mu_p}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\frac{e^{-ik_1r(p,s,t)}}{r(p,s,t)}, \qquad (12)$$

где

$$r(p,s,t)=\sqrt{\left(x-x_{p,s}\right)^2+\left(y-y_{p,t}\right)^2+\left(z-z_p\right)^2},$$

здесь координаты (x,y,z) определяют точку наблюдения рассеянного поля внутри волновода вне сфер, координаты $\left(x_{p,s},y_{p,t},z_p\right)$ – точку нахождения центра сферы или зеркального изображения (6).

В соотношениях для потенциалов Герца (12) выражение с экспонентой можно представить в виде разложения по собственным функциям сечения волновода

$$\frac{e^{-ik_1r(p,s,t)}}{r(p,s,t)}=\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x-x_{p,s}\right)+\frac{\pi n}{h}\left(y-y_{p,t}\right)+\beta_{mn}\left|z-z_p\right|\right]}.$$

Полученные решения для внутреннего поля (7, 11) и потенциалов Герца (12) справедливы, когда $a/\lambda\ll1$ и $a/\lambda_g\ll1$. Но их можно обобщить на резонансный случай $a/\lambda_g\sim1$, если вместо проницаемостей ε_p и μ_p ввести эффективные проницаемости [4,1,2]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{pэф}&=\varepsilon_pF\left(ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}\right)\\ \mu_{pэф}&=\mu_pF\left(ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}\right)\end{aligned} \qquad (13)$$

где

$$F\left(ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}\right)=\frac{2\left(\sin ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}-ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}\cos ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}\right)}{\left(k^2a_p^2\varepsilon_p\mu_p-1\right)\sin ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}+ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}\cos ka_p\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}}.$$

Рассеянное в волноводе поле (1) для случая (7), учитывая (13), запишем в виде

$$\begin{aligned}\vec{E}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\left\{\left(\frac{\varepsilon_{pэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')-\right.\\ \left.-ik\mu_0(-1)\left(\frac{\mu_{pэф}}{\mu_0}-1\right)\hat{P}_c\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')\right\}e^{i\left(\omega t-k_1r(p,s,t)\right)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_p-k_1a_p\cos k_1a_p\right)\left\{(-1)\left(\frac{\mu_{pэф}}{\mu_0}-1\right)\hat{L}_c\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')+\right.\\ \left.+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_{pэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')\right\}e^{i\left(\omega t-k_1r(p,s,t)\right)},\end{aligned}$$

а для случая (11) в виде

$$\hat{E}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1 a_p - k_1 a_p \cos k_1 a_p\right)\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\frac{\varepsilon_{рэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c^{mn}\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')-\right.$$

$$\left.-ik\mu_0(-1)\left(\frac{\mu_{рэф}}{\mu_0}-1\right)\hat{P}_c^{mn}\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')\right\}e^{i\left(\omega t-\left[\frac{\pi m}{d}\left(x-x_{p,s}\right)+\frac{\pi n}{h}\left(y-y_{p,t}\right)+\beta_{m,n}\left|z-z_p\right|\right]\right)},$$

$$\hat{H}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_{\substack{1\\p}}^{N}\sum_{\substack{-\infty\\s}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\t}}^{\infty}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1 a_p - k_1 a_p \cos k_1 a_p\right)\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\{(-1)\left(\frac{\mu_{рэф}}{\mu_0}-1\right)\hat{L}_c^{mn}\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')+\right.$$

$$\left.+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_{рэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c^{mn}\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}')\right\}e^{i\left(\omega t-\left[\frac{\pi m}{d}\left(x-x_{p,s}\right)+\frac{\pi n}{h}\left(y-y_{p,t}\right)+\beta_{m,n}\left|z-z_p\right|\right]\right)},$$

где $\hat{L}_c,\hat{P}_c$ и $\hat{L}_c^{mn},\hat{P}_c^{mn}$ – функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c=\begin{bmatrix}\Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{xzc}\\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{yxc}\\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zzc}\end{bmatrix};\quad \hat{P}_c=\begin{bmatrix}0 & \Psi_{zc} & \Psi^{\circ}_{yc}\\ \Psi^{\circ}_{zc} & 0 & \Psi_{xc}\\ \Psi_{yc} & \Psi^{\circ}_{xc} & 0\end{bmatrix};\qquad (14)$$

$$\hat{L}_c^{mn}=\begin{bmatrix}\left(k^2\varepsilon_0\mu_0-\frac{m^2\pi^2}{d^2}\right) & -\frac{m\pi}{d}\frac{n\pi}{h} & -\beta_{mn}\frac{m\pi}{d}\\ -\frac{m\pi}{d}\frac{n\pi}{h} & \left(k^2\varepsilon_0\mu_0-\frac{n^2\pi^2}{h^2}\right) & -\beta_{mn}\frac{n\pi}{h}\\ -\beta_{mn}\frac{m\pi}{d} & -\beta_{mn}\frac{n\pi}{h} & \left(k^2\varepsilon_0\mu_0-\beta_{mn}^2\right)\end{bmatrix};$$

$$\hat{P}_c^{mn}=\begin{bmatrix}0 & i\beta_{mn} & -i\frac{n\pi}{h}\\ -i\beta_{mn} & 0 & i\frac{m\pi}{d}\\ i\frac{n\pi}{h} & -i\frac{m\pi}{d} & 0\end{bmatrix}.$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (14), запишем в виде (6)

$$\Psi_{xxc}=\frac{1}{r(p,s,t)}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3\left(x-x_{p,s}\right)^2-r^2_{(p,s,t)}\right|}{r^5_{(p,s,t)}}-k_1^2\frac{\left(x-x_{p,s}\right)^2}{r^3_{(p,s,t)}}+ik_1\frac{\left|3\left(x-x_{p,s}\right)^2-r^2_{(p,s,t)}\right|}{r^4_{(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{yyc}=\frac{1}{r(p,s,t)}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3\left(y-y_{p,t}\right)^2-r^2_{(p,s,t)}\right|}{r^5_{(p,s,t)}}-k_1^2\frac{\left(y-y_{p,t}\right)^2}{r^3_{(p,s,t)}}+ik_1\frac{\left|3\left(y-y_{p,t}\right)^2-r^2_{(p,s,t)}\right|}{r^4_{(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{zzc} = \frac{1}{r(p,s,t)} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{\left|3\left(z - z_{p,t}\right)^2 - r^2_{(p,s,t)}\right|}{r^5_{(p,s,t)}} - k_1^2 \frac{\left(z - z_{p,t}\right)^2}{r^3_{(p,s,t)}} + ik_1 \frac{\left|3\left(z - z_{p,t}\right)^2 - r^2_{(p,s,t)}\right|}{r^4_{(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} = \frac{3(x - x_{p,s})(y - y_{p,t})}{r^5_{(p,s,t)}} - k_1^2 \frac{(x - x_{p,s})(y - y_{p,t})}{r^3_{(p,s,t)}} + ik_1 \frac{3(x - x_{p,s})(y - y_{p,t})}{r^4_{(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xzc} = \Psi_{zxc} = \frac{3(x - x_{p,s})(z - z_p)}{r^5_{(p,s,t)}} - k_1^2 \frac{(x - x_{p,s})(z - z_p)}{r^3_{(p,s,t)}} + ik_1 \frac{3(x - x_{p,s})(z - z_p)}{r^4_{(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{yzc} = \Psi_{zyc} = \frac{3(y - y_{p,t})(z - z_p)}{r^5_{(p,s,t)}} - k_1^2 \frac{(y - y_{p,t})(z - z_p)}{r^3_{(p,s,t)}} + ik_1 \frac{3(y - y_{p,t})(z - z_p)}{r^4_{(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xc} = \frac{(x - x_{p,s})}{r^3_{(p,s,t)}} + ik_1 \frac{(x - x_{p,s})}{r^2_{(p,s,t)}}, \Psi^0_{xc} = -\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{yc} = \frac{(y - y_{p,t})}{r^3_{(p,s,t)}} + ik_1 \frac{(y - y_{p,t})}{r^2_{(p,s,t)}}, \Psi^0_{yc} = -\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{zc} = \frac{(z - z_p)}{r^3_{(p,s,t)}} + ik_1 \frac{(z - z_p)}{r^2_{(p,s,t)}}, \Psi^0_{zc} = -\Psi_{zc}.$$

Граничное условие для тангенциальной компоненты полного электрического поля в волноводе со сферами на внутренней идеальной металлической поверхности S волновода выполняется, если

$$\vec{E}_{t\,pacc}(\vec{r},t)\big|_S = 0.$$

Из детерминантов систем уравнений (3, 4), (9, 10) находятся резонансные условия, когда в сферах $a/\lambda_g \sim 1$.

В данном решении волноводная задача сведена к решеточной, что позволяет найденное решение сопоставить с подобным решением для решетки сфер в свободном пространстве [5]. Изучение такого сопоставления может дать возможность замены некоторых экспериментальных измерений для свободного пространства волноводными измерениями [6].

Список литературы: 1. *Козарь А.И.*, *Хижняк Н.А.* Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т. 15. С.847-849.2. *Козарь А. И., Хижняк Н. А.* К вопросу о точном измерении больших значений диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков // Радиотехника. 1970. Вып. 14. С. 118-128. 3. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. С.279. 4. *Левин Л.* Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит. 1954. С.216. 5. *Козарь А.И.* Рассеяние электромагнитных волн на сложных пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 124. С. 24-35. 6. *Козарь А. И.* Прямоугольный электромагнитный резонатор с резонансными магнитодиэлектрическими сферами // Вісник Харк. нац. ун-ту. Радіофізика та електроніка. 2002. Вип. 1. №544. С. 199–205.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 13.02.2002