О ПЕРЕСЕЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЕ

Ю. А. Василенко, Н. Я. Какурин, В. Л. Белявский
Харьков

Булева функция называется симметричной, если ее значения не изменяются при любой перестановке ее аргументов.

Определение 1. Если СДНФ симметричной функции от n переменных содержит конституенту единицы, в которой ровно m переменных ($0 \leqslant \leqslant m \leqslant n$) с отрицанием, то она содержит все другие конституенты единицы, обладающие этим же свойством.

Определение 2. Базовая симметричная функция — булева функция, у которой все конституенты, составляющие СДНФ данной функции, получаются из одной какой-либо конституенты при помощи различных перестановок переменных [1].

Базовая симметричная функция однозначно определяется двумя параметрами, а именно: числом переменных n и числом переменных k, входящих в произвольную конституенту единицы СДНФ базовой функции в обычном (неинверсном) виде (k является индексом соответствующей функции). Таким образом, S_k^n — базовая симметричная функция от n переменных, имеющая индекс k. Свойства симметричных функций указаны в [1].

$S^n_{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ $(m > 1)$ — симметричную булеву функцию от n переменных — можно представить в виде дизъюнкции базовых симметричных функций

$$S^n_{k_1}, S^n_{k_2}, \ldots, S^n_{k_m}.$$

Теорема 1. Пусть $S_k^n(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная базовая симметричная функция, тогда ее можно представить в следующем виде:

$$S_k^n = S_0^l S_k^{n-l} \vee S_1^l S_{k-1}^{n-l} \vee \ldots \vee S_{l-1}^l S_{k-l+1}^{n-l} \vee S_l^l S_{k-l}^{n-l}, \qquad (1)$$

где n — число переменных исходной базовой функции;
k — индекс базовой функции;
l — число переменных, по которым производится разложение базовой функции.

Доказательство.

1. Для $l = 1$ имеем

$$S_k^n = S_0^1 S_k^{n-1} \vee S_1^1 S_{k-1}^{n-1}. \qquad (2)$$

Это положение доказано в [1].

По индукции, пусть справедливо (1). Тогда имеем

$$S_k^{n+1} = S_0^1 S_k^n \vee S_1^1 S_{k-1}^n. \qquad (3)$$

После подстановки выражения (1) в (3)

$$S_k^{n+1} = S_0^1 S_k^n \vee S_1^1 S_{k-1}^n = S_0^1 S_0^l S_k^{n-l} \vee S_0^1 S_1^l S_{k-1}^{n-l} \vee S_0^1 S_2^l S_{k-2}^{n-l} \vee \ldots$$
$$\ldots \vee S_0^1 S_{l-2}^l S_{k-l+2}^{n-l} \vee S_0^1 S_{l-1}^l S_{k-l+1}^{n-l} \vee S_0^1 S_l^l S_{k-l}^{n-l} \vee S_1^1 S_0^l S_{k-1}^l \vee S_1^1 S_1^l S_{k-2}^{n-l} \vee \ldots$$
$$\ldots \vee S_1^1 S_{l-3}^l S_{k-l+2}^{n-l} \vee S_1^1 S_{l-2}^l S_{k-l+1}^{n-l} \vee S_1^1 S_{l-1}^l S_{k-l}^{n-l} \vee S_1^1 S_l^l S_{k-l-1}^{n-l} =$$
$$= S_0^{l+1} S_k^{n-l} \vee S_1^{l+1} S_{k-1}^{n-l} \vee \ldots \vee S_{l-1}^{l+1} S_{k-l+1}^{n-l} \vee S_l^{l+1} S_{k-l}^{n-l} \vee S_{l+1}^{l+1} S_{k-l+1}^{n-l}.$$

Теорема доказана (с точностью до переиндексации переменных разложения).

Множество булевых функций, рассматриваемое вместе с операциями умножения и сложения (mod 2), представляет собой алгебру Жегалкина.

Основные тождества алгебры Жегалкина приведены в [1].

Теорема 2. *Любая булева функция может быть представлена в виде одного и только одного (с точностью до перестановки ее членов) канонического полинома Жегалкина.*

Частным случаем полинома Жегалкина является линейная функция.

Определение 3 [2].

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если имеет место соотношение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n, \tag{5}$$

где $c_i = 0,1$.

Замечание. Пусть линейная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, тогда $c_i = 1$.

Очевидно, если в наборе $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ заменить α_i на $\bar{\alpha}_i$, то значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ изменится на противоположное.

Обозначим: $L^n(x_1, \ldots, x_n)$ — линейная функция, существенно зависящая от n своих переменных.

Тогда имеет место

Теорема 3. Пусть задана произвольная линейная булева функция

$$L^n(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n. \tag{6}$$

Она может быть представлена в виде

если

$$n = 2k,\ L^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} S^n_{1,3,5,\ldots,n}, & \text{если } n = 2k-1; \\ S^n_{1,3,5,\ldots,n-1}, & \text{если } n = 2k; \end{cases} \tag{7}$$

где $k = 1, 2 \ldots$ — целое положительное число;

$S^n_{1,3,5,\ldots,n}$ — симметричная булева функция, существенно зависящая от n переменных.

Доказательство.

1. Случай $n = 2$

$$L^2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 = S_1^2(x_1, x_2). \tag{8}$$

2. Случай $n = 3$

$$L^3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = S_1^2(x_1, x_2) + S_1^1(x_3) =$$
$$= S_1^{-2} S_1^1 \vee S_1^2 S_1^{-1} = S_{0,2}^2 S_1^1 \vee S_1^2 S_0^1 = (S_0^2 S_1^1 \vee S_1^2 S_0^1) \vee$$
$$\vee S_2^2 S_1^1 = S_1^3 \vee S_3^3 = S_{1,3}^3(x_1, x_2, x_3). \tag{9}$$

По индукции пусть справедливо (7), тогда имеем

а) n — нечетное целое положительное число

$$L^{n+1}(x_1, \ldots x_{n+1}) = L^n S_0^1 \vee L^{-n} S_1^1 = S^n_{1,3,\ldots,n} S_0^1 \vee S^{-n}_{1,3\ldots,n} S_1^1 =$$
$$= S_1^n S_0^1 \vee S_3^n S_0^1 \vee S_5^n S_0^1 \vee \ldots \vee S_n^n S_0^1 \vee S_0^n S_1^1 \vee S_2^n S_1^1 \vee S_n^n S_1^1 \vee \ldots$$

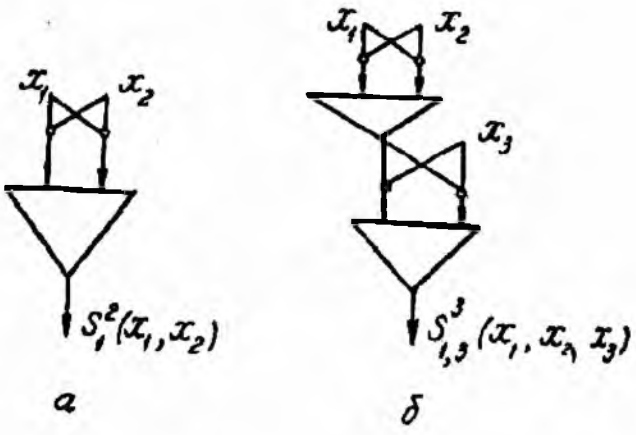
$$\ldots \vee S^n_{n-1}S^1_1 = (S^n_1S^1_0 \vee S^n_0S^1_1) \vee (S^n_3S^1_0 \vee S^n_2S^1_1) \vee \ldots \vee (S^n_nS^1_0 \vee S^n_{n-1}S^1_1) =$$
$$= S^{n+1}_1 \vee S^{n+1}_2 \vee \ldots \vee S^{n+1}_n = S^{n+1}_n \qquad (10)$$

б) n — четное целое положительное число.

Доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть задана линейная функция:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n; \qquad (11)$$
$$c_0 \neq 0.$$



а б

Тогда она может быть представлена в виде

$$L^n = f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} S^n_{0,2,\ldots,n}, & \text{если } n = 2k; \\ S^n_{0,2,\ldots,n-1}, & \text{если } n = 2k-1; \end{cases}$$

$k = 1, 2 \ldots$.

Следствие 2.

$$L^n(x_1, \ldots, x_n) = S^2_1(S^2_1(\ldots S^2_1(x_1, x_2), \ldots x_{n-1}), x_n).$$

Рассмотрим реализацию произвольной линейной функции на элементах, рассматриваемых в [3].

Пример 1.

$S^2_1(x_1x_2) = L^2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$ (сумматор на два входа) (рис. 1, *а*).

Пример 2. $S^3_{1,3}(x_1, x_2, x_3) = L^3(x_1, x_2, x_3)$ — сумматор на три входа (рис. 1, *б*).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.
2. С. В. Яблонский и др. Функции алгебры логики и классы Поста. Изд-во «Наука», 1966.
3. И. Б. Гутчин, А. С. Кузичев. Бионика и надежность. Изд-во «Наука», 1967.