УДК 537.87; 621.371

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

САХНЕНКО Н.К., НЕРУХ А.Г.

Получено явное выражение для электромагнитного поля, возбуждаемого нестационарным аксиально симметричным источником в плоском волноводе, заполненном меняющейся во времени плазмой. Рассмотрено влияние изменения свойств среды, заполняющей волновод, на характер распределения поля.

1. Введение

Задача преобразования частоты электромагнитного излучения является одной из ключевых во всех диапазонах волн, однако ее решение существенно усложняется при переходе к коротковолновым диапазонам, особенно терагерцевому и оптическому. Повышение эффективности в этих диапазонах представляет собой актуальную проблему, одним из возможных способов решения которой является преобразование электромагнитного поля при изменении во времени свойств среды [1].

В представленной работе исследуется преобразование временной и пространственной структуры поля при изменении во времени свойств среды, заполняющей волновод. Объекты со сложной геометрией существенно влияют на сущность рассматриваемых явлений, следовательно, суть явления предпочтительнее сначала изучать в структурах с достаточно простой геометрией. В качестве таковой рассматривается электромагнитное поле в плоском волноводе с идеально проводящими стенками. Исследуется задача возбуждения и распространения аксиально-симметричных электромагнитных волн в плоском волноводе, который до нулевого момента времени был заполнен средой с диэлектрической проницаемостью ε, а после нулевого момента времени заполняется холодной изотропной меняющейся во времени плазмой. Электромагнитное поле в этом случае [2] описывается интегральным уравнением Вольтера второго рода:

$$\vec{E}(t,\vec{r})=\vec{E}_0(t,\vec{r})-$$
$$-\frac{4\pi}{c^2}\int_0^\infty dt'\iint_\infty dx'dy'\int_0^b dz'\hat{G}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}(\hat{V}_e(t')\vec{E}(t',\vec{r}')), \quad (1)$$

где $\vec{r}=(x,y,z)$; $\vec{E}_0$ – первичное поле; $\vec{E}$ – преобразованное поле; $\hat{G}$ – тензорная функция Грина, $\hat{V}_e$ – оператор новой среды; c – скорость света в вакууме. В (1) x и y – продольные координаты; z – поперечная координата. Расстояние между стенками волновода равно b. Геометрия задачи и схематическая диаграмма рассматриваемого явления представлены на рис.1.

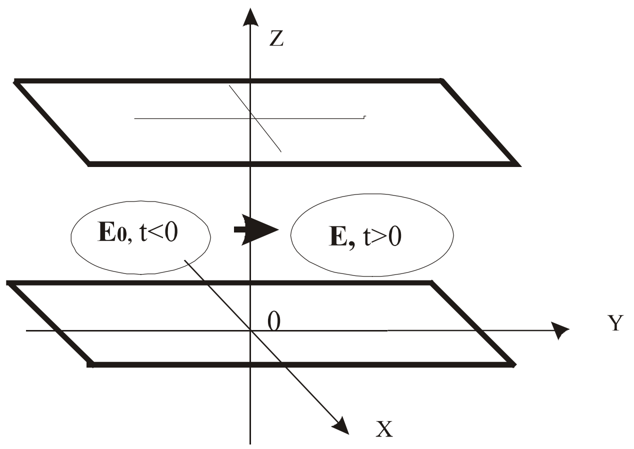

Рис. 1

Уравнение (1) должно быть дополнено функцией Грина и оператором среды. Последний определяется способом образования плазмы и может быть построен на базе той или иной модели, а функция Грина определяется граничными условиями и свойствами среды в волноводе до нулевого момента времени и не зависит от выбранной модели плазмы. В силу аксиальной симметрии задачи функция Грина строится в цилиндрической системе координат.

2. Функция Грина в цилиндрических координатах

Так как задача обладает цилиндрической симметрией, то удобнее перейти к цилиндрическим координатам. Уравнение для поля (1) перепишем в виде

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\hat{K}\vec{E}, \quad (2)$$

где $\hat{K}$ – интегральный оператор:

$$\hat{K}=\frac{1}{\varepsilon}\hat{\Phi}^{-1}\int_0^\infty dt'\int_0^\infty \rho' d\rho'\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^b dz'\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{G}\cdot\hat{V}_e\hat{\Phi},$$

ε – проницаемость фоновой среды в волноводе, заполняющей волновод до нулевого момента времени.

Матрица

$$\hat{\Phi}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

осуществляет преобразование координат векторов.

Функция Грина должна удовлетворять граничным условиям на границе рассматриваемого пространства, следовательно, может быть представлена в виде ряда Фурье по собственным функциям плоского волновода:

$$\hat{\psi}_n=\begin{pmatrix}\sin\lambda_n z & 0 & 0\\ 0 & \sin\lambda_n z & 0\\ 0 & 0 & \cos\lambda_n z\end{pmatrix},$$

где $\lambda_n=\frac{n\pi}{b}$, $n=0,1,2...$, $\tau=t-t'$. В силу цилиндрической симметрии ее можно представить в виде ряда по азимутальному углу [4]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{G} = -\frac{v^2}{4\pi}(\mathrm{graddiv} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{I})\times$$
$$\times \sum_{k,n} g_{kn}(\tau,\rho,\rho')e^{ik(\varphi-\varphi')}\hat{\psi}_n(z)\hat{\psi}_n(z') .$$

Коэффициенты разложения записаны в виде преобразования Ханкеля по полярному радиусу:

$$g_{kn}(\tau,\rho,\rho') =$$
$$= \frac{4v}{b}\int_0^\infty sJ_k(s\rho)J_k(s\rho')\Theta(v\tau)\frac{\sin v\tau\sqrt{s^2+\lambda_n^2}}{\sqrt{s^2+\lambda_n^2}}ds,$$

$\Theta(.)$ – единичная функция Хевисайда. Дифференциальный оператор в функции Грина в полярных координатах имеет вид

$$\mathrm{graddiv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho & \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z} \\ \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi}\rho & \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}\rho & \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

3. Первичное поле линейного тока

Первичное поле в (2) можно получить посредством полученной функции Грина. В общем случае, если поле создается некоторым током $\vec{j}$ [2], то

$$\vec{E}_0 = -\frac{4\pi}{c^2}\hat{\Phi}^{-1}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\rho}\rho' d\rho'\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{b}dz'\hat{G}\cdot\hat{\Phi}\frac{\partial}{\partial t'}\vec{j}.$$

Рассмотрим линейный источник, расположенный на оси oZ:

$$\vec{j} = \vec{e}_Z\frac{\delta(\rho)}{\rho}j(t). \qquad (3)$$

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда до возникновения плазмы волновод был пустым , т.е. $\varepsilon = 1,\ v = c$. Первичное поле в этом случае имеет вид

$$\vec{E}_0 = \frac{2\pi b}{c^2}\int_{-\infty}^{t}dt'\frac{j'(t')\Theta(c(t-t')-\rho)}{\sqrt{c^2(t-t')^2-\rho^2}}\vec{e}_Z \qquad (4)$$

и представляет собой поле низшей моды с номером $n = 0$. Простая геометрия источника приводит к тому, что высшие моды отсутствуют.

4. Преобразованное поле

Чтобы получить преобразованное поле после возникновения плазмы, необходимо найти решение интегрального уравнения (2) . Это интегральное уравнение Вольтера второго рода и его решение может быть получено методом резольвенты:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \hat{R}\vec{E}_0. \qquad (5)$$

Конкретизируем постановку задачи. Будем считать, что оператор среды $\hat{V}_e$ имеет вид

$$\hat{V}_e = \frac{1}{4\pi}(\int_0^t \omega_e^2(t')(t-t')dt' - (\varepsilon-1)).$$

Наиболее резко преобразование поля проявляется при быстром изменении параметров среды, в частности, когда плазма образуется скачкообразно:

$$\omega_e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \omega_e, & t > 0 . \end{cases}$$

Резольвента должна удовлетворять операторному уравнению

$$\hat{R} - \hat{K}\hat{R} = \hat{K}, \qquad (6)$$

где $\hat{K}$ — ядро уравнения (2). Уравнение для резольвенты (6) удобно решать в импульсном представлении [2] (в виде преобразования Фурье-Ханкеля-Лапласа). Это дает возможность получить явное выражение для резольвенты

$$\hat{R} = \omega_e^2\cdot\int_0^t dt'\int_0^\infty\rho' d\rho'\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi'}{2\pi}\int_0^b\frac{2dz'}{b}\sum_{k,n}\int_0^\infty\xi d\xi\hat{\Phi}^{-1}\times$$
$$\times[\mathrm{graddiv}\frac{1}{\lambda_n^2+\xi^2}(\frac{\sin\omega_e\tau}{\omega_e} - \frac{\sin\omega_{we}\tau}{\omega_{we}}) - \frac{\sin\omega_{we}\tau}{\omega_{we}}]\times$$
$$\times J_k(\xi\rho)J_k(\xi\rho')e^{ik(\varphi-\varphi')}\hat{\psi}_n(z)\hat{\psi}_n(z')\hat{\Phi}\Theta(\tau),$$

где $$\omega_{we} = \sqrt{c^2(\lambda_n^2+\xi^2)+\omega_e^2}. \qquad (7)$$

Резольвентный оператор состоит из двух компонент, первая из которых определяется плазменной характеристикой ω_e, вторая — смешанной характеристикой плазмы и волновода ω_{we} .

Для того чтобы определить поле источника в волноводе после возникновения плазмы, необходимо подставить $\vec{E}_0$ в выражение (5). Действие резольвентного оператора (7) на первичное поле (4) дает

$$\hat{R}\vec{E}_0 = \frac{2\pi b}{c^2}\omega_e^2\times$$
$$\times\int_0^\infty ds J_0(s\rho)\int_0^t dt'\frac{\sin\omega_{we}(t-t')}{\omega_{we}}\int_{-\infty}^{t'}dt''\sin cs(t'-t'')j'(t'')\vec{e}_Z.$$

Изменив порядок интегрирования, получим, что данное выражение представимо в виде суммы двух слагаемых, одно из которых $-\vec{E}_0$ (в соответствии с теоремой погашения), а другое — поле источника после образования плазмы:

$$\vec{E} = \vec{e}_Z\frac{2\pi b}{c^2}\int_0^\infty ds\frac{J_0(s\rho)}{\omega_{we}}[\int_0^t dt' cs\sin\omega_{we}(t-t')j'(t') -$$
$$-\frac{\omega_e^2}{2}\int_{-\infty}^0 dt'(\frac{\sin(\omega_{we}t+cst')}{\omega_{we}+cs} - \frac{\sin(\omega_{we}t-cst')}{\omega_{we}-cs})j'(t')],$$

где $$\omega_{we} = \sqrt{c^2s^2+\omega_e^2}. \qquad (8)$$

Вследствие особых геометрических характеристик источника преобразованное поле, как и первичное, не зависит от параметров волновода. Это также низшая мода с номером $n = 0$, другие моды отсутствуют.

Если плазма возникает после включения источника, то оба интеграла в (8) дают вклад в структуру поля; если включение источника происходит после образования плазмы, то дает вклад только первый интеграл.

5. Возбуждение волновода импульсным током

Рассмотрим простейший случай импульсного тока $j(t) = \Theta(t - t_0)$.

Поле в пустом волноводе из (4)

$$\vec{E}_0 = \frac{2\pi b}{c^2} \frac{\Theta(c(t-t_0)-\rho)}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2-\rho^2}} \Theta(t-t_0)\vec{e}_z .$$

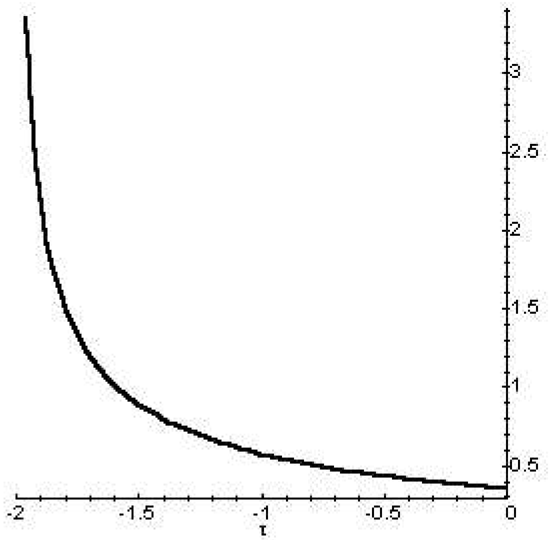

Рис. 2

На рис.2 представлено временное распределение поля, которое занимает область между источником и волновым фронтом $\rho = c(t - t_0)$. Это отличает цилиндрическую волну от плоской, которая распространяется в плоском волноводе в виде δ-фронта [3].

Характер поля в плазме зависит от момента включения источника, а именно из (8) следует, что

если $t_0 < 0$, то

$$\vec{E} = -\vec{e}_z \frac{\pi b \omega_e^2}{c^2} \Theta(t) \int_0^\infty ds \frac{J_0(s\rho)}{\omega_{we}} \times$$
$$\times \left[\frac{\sin(\omega_{we} t + cst_0)}{\omega_{we} + cs} - \frac{\sin(\omega_{we} t - cst_0)}{\omega_{we} - cs} \right]. \qquad (9)$$

Если $t_0 > 0$, то

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{2\pi b}{c} \int_0^\infty \frac{J_0(s\rho)}{\omega_{we}} s \cdot \sin \omega_{we}(t - t_0) ds \cdot \Theta(t - t_0). \qquad (10)$$

Если $t_0 = 0$, первая и вторая формулы совпадают.

В случае, когда источник включается в уже существующей плазме ($t_0 > 0$), поле можно выписать в замкнутой форме:

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{2\pi b}{c^2} \frac{\cos(\frac{\omega_e}{c}\sqrt{c^2(t-t_0)^2-\rho^2})}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2-\rho^2}} \times$$
$$\times \Theta(c(t-t_0)-\rho)\Theta(t-t_0)$$

– это бегущая волна, занимающая область $\rho < c(t - t_0)$. Присутствие плазмы придает волне осциллирующий характер. Ее вид представлен на рис. 3 для значений параметров ($t_0 = \frac{2}{\omega_e}$, $\rho = \frac{c}{\omega_e}$)

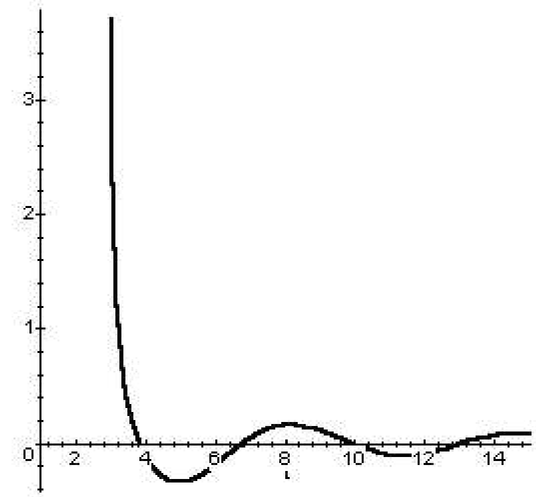

Рис. 3

На рис. 4 представлена временная история поля для случая, когда плазма образовалась после включения источника. Поле рассматривается на некотором расстоянии от источника ($\rho = \frac{c}{\omega_e}$) для двух моментов его включения ($t_0 = -\frac{3}{\omega_e}, -\frac{1}{\omega_e}$). Вследствие ограниченности скорости распространения волн поле при $t_0 = -\frac{1}{\omega_e}$ появляется в данной точке в момент возникновения плазмы ($t = 0$ – момент прохождения волнового фронта через данную точку). Волна в случае $t_0 = -\frac{3}{\omega_e}$ в пустом волноводе представлена на рис.2. Анализ показывает, что в момент образования плазмы поле остается непрерывным и приобретает осциллирующий характер. В случае, когда ω_e величина малая, используем приближенные равенства

$$\omega_{we} \approx cs + \frac{1}{2cs}\omega_e^2 \quad \text{или} \quad cs \approx \omega_{we} - \frac{1}{2\omega_e}\omega_{we}^2$$

для оценки (9):

$$\frac{\sin(\omega_{we} t + cst')}{\omega_{we} + cs} - \frac{\sin(\omega_{we} t - cst')}{\omega_{we} - cs} \approx$$
$$\approx \frac{1}{\omega_e^2} \left[\frac{1}{2\omega_e} \omega_{we}^2 \sin \omega_{we}(t + t') - 2cs \cdot \sin \omega_{we}(t - t') \right].$$

Второе слагаемое совпадает с (10), другими словами – это волна в плазме, которая имеет одну и ту же структуру независимо от последовательности моментов включения источника и возникновения плазмы. Первое слагаемое отражает различие в структуре полей в случае $t_0 < 0$ и $t_0 > 0$.

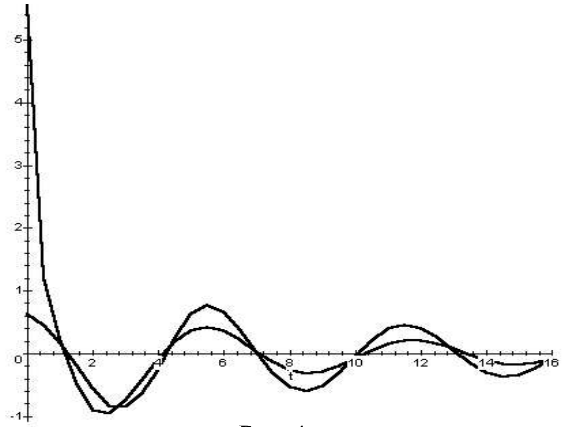

Рис. 4

6. Заключение

В цилиндрической системе координат получена функция Грина уравнений Максвелла для плоского волновода. С помощью этой функции записано четырехмерное интегральное уравнение для поля в волноводе, заполненном холодной изотропной плазмой, возникающей в нулевой момент времени. Получено явное представление резольвентного оператора в случае аксиально-симметричного распределения поля. При возбуждении волновода линейным источником получено первичное и преобразованное поле. Установлено, что структура поля зависит от последовательности моментов включения источника и возникновения плазмы. Показано, что после возникновения плазмы поле приобретает осциллирующий характер.

Литература: 1. *Nerukh A., Scherbatko I., Marciniak M.* Electromagnetic wave frequency shift by temporal variation of medium parameters// Pr. Inst. Lacznosci., 110, 1998. З. 7-27. 2. *Нерух А.Г.,Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО"Тест-радио".1991. 279с. 3. *Борисов В.В.* Неустановившиеся поля в волноводах. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та. 4. *Сахненко Н.К., Нерух А.Г.* Нестационарное аксиально-симметричное излучение источника в плоском волноводе //Вісник Харківського національного університету. 2000. №467. С. 144-147.

Поступила в редколлегию17.05.2000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Буц В.А.

Сахненко Наталия Константиновна, ассистент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: распространение электромагнитных волн в нестационарных средах. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-72.

Нерух Александр Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: нестационарная электродинамика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-72.

УДК 537.877

РАСЧЕТ ИСКАЖЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИИ В РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ. III

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Предлагается решение задачи о распространении электромагнитного импульса по круглому волноводу с произвольной огибающей [1,2]. Используемый математический метод − интегральное преобразование Фурье. Рассматривается случай заданного распределения электромагнитного поля в пространстве.

Постановка задачи

Требуется найти электромагнитное поле, представимое потенциалом Герца:

$$\vec{\Pi}(r,z,t) = \vec{z}_0 \Pi(r,z,t)\,, \qquad (1)$$

где функция $\Pi(r,z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Pi(r,z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi(r,z,t)}{\partial t^2} = 0\,, \qquad (2)$$

начальным условиям

$$t=0 \qquad \Pi(r,z,0) = u(r,z)\,, \qquad (3а)$$

$$t=0 \quad \frac{d}{dt}\Pi(r,z,t)\bigg|_{t=0} = v(r,z)\,, \qquad (3б)$$

здесь $u(r,z)$ и $v(r,z)$ должны быть известными (заданными по условию задачи) функциями; и граничному условию $E_z = 0$ при $r = a$, т.е.

$$r=a\,,\ \frac{\partial^2 \Pi(a,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi(a,z,t)}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (4)$$

Решение задачи

Искомую функцию ищем в виде интеграла Фурье

$$\Pi(r,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(h,r,t)\,e^{ihz}\,dh\,. \qquad (5)$$

Подставим искомое решение в виде (5) в уравнение (2):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Pi(r,z,t) \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Pi(r,z,t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - h^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right]e^{ihz}\,dh = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - h^2 A = 0\,. \qquad (6)$$

Поскольку переменные в цилиндрической системе координат разделяются, то решение уравнения (6) должно иметь вид

$$A(h,r,t) = \widetilde{A}(h)R(h,r)T(h,t)\,, \qquad (7)$$