

Министерство образования и науки Украины  
Национальная Академия наук Украины  
Институт радиофизики и электроники НАН Украины им. А.Я. Усикова  
Институт физики полупроводников НАН Украины им. В.Е. Лашкарева  
Институт физики НАН Украины  
Институт сцинтилляционных материалов НАН Украины  
Национальный технический университет Украины «КПИ»  
Национальный технический университет «Львовская политехника»  
Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова  
Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова  
Харьковский национальный университет радиозлектроники

Сборник научных трудов  
VIII Международной научной  
конференции

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ БАЗА  
НАНОЭЛЕКТРОНИКИ

Магнитные наноструктуры для спиновой (и нано-) электроники ГГц и ТГц диапазонов

Метаматериалы и их применение в нанoeлектронике ТГц и ГГц диапазонов

Методы формирования, диагностики и исследования наноструктур

Электродинамика и нанoeлектроника ТГц диапазона

Математическое моделирование в нанoeлектронике

Физические основы наноструктур для электроники

Нанoeлектронные сенсоры и интеллектуальные системы на их основе. Нанoeлектронные сенсоры для биомедицины

Нелинейные процессы в искусственных средах/метаматериалах и приборы на их основе (Солитоны. Многочастотные процессы)

Элементы альтернативной энергетики, включая солнечные батареи, термопреобразователи и накопители энергии

Нанofотоника. Процессы, структуры и устройства

МЭМС и НЭМС в электронике



Харьков – Одесса  
2015

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХСЛОЙНОЙ ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКА

Шматко А.А.<sup>1)</sup>, Казанко А.В.<sup>1,2)</sup>, Мизерник В.Н.<sup>1,3)</sup>, Одаренко Е.Н.<sup>4)</sup>

<sup>1)</sup> Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

61022, Харьков, пл. Свободы, 4, тел.: (057) 707-51-33,

E-mail: alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua

<sup>2)</sup> Украинская государственная академия железнодорожного транспорта

61050, Харьков, пл. Фейербаха, 7, тел.: (057) 730-10-39

E-mail: vtisusheet@mail.ru

<sup>3)</sup> Харьковский научный физико-технологический центр, пл. Свободы, 2, 61077

E-mail: viknikm@ukr.net

<sup>4)</sup> Харьковский национальный университет радиоэлектроники

61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-10-57

E-mail: oen@kture.kharkov.ua

The problem of diffraction of the E-polarized wave on the finite two-layer periodic photonic crystal structure (magnetodielectric gratings) with various material parameters is considered in this report. The problem is solved in rigorous mathematical definition for any relations between a wave length and the characteristic dimensions of the structure. The special emphasis was given to the numerical solution of the dispersion equation that defines the spectral characteristics of the field in the photonic crystal structure with the finite dimensions. The combined magnetodielectric and metamaterial gratings are considered. The fundamental features of the waves propagation in the phase gratings with layers that have identical refraction indexes have been analyzed.

### Введение

В последние годы особый интерес представляют фотонно-кристаллические структуры, выполненные из различных магнитоэлектрических материалов и метаматериалов. Это, в первую очередь, фотонно-кристаллические структуры ограниченных размеров – объемные магнитоэлектрические решетки из брусьев прямоугольного сечения. Обилие параметров задачи рассеяния волн на таких объектах приводит к необходимости детального математического исследования дисперсионных свойств одномерных (бесконечных в направлениях слоев) структур для физического обоснования наблюдаемых дифракционных явлений.

В данном сообщении рассматривается задача дифракции плоской E-поляризованной волны на ограниченной периодической фотонно-кристаллической структуре (магнитоэлектрической решетке) с различными материальными параметрами. Задача решается в строгой математической постановке для произвольных соотношений между длиной волны и характерными размерами структуры. Особое внимание уделено решению дисперсионного уравнения, определяющего спектральные характеристики поля в области, занятой фотонно-кристаллической структурой. Рассмотрены комбинированные решетки из магнитоэлектрика и метаматериала. Проанализированы основные особенности распространения волн в фазовых решетках, слои которых имеют одинаковые показатели преломления.

### Постановка краевой задачи и ее решение

Рассматривается задача рассеяния плоской  $E_x$ -поляризованной электромагнитной волны на объемной периодической двухслойной структуре из магнитоэлектрика (рис. 1). Диэлектрическая и магнитная проницаемости структуры  $\epsilon_j$ ,  $\mu_j$  ( $j=1,2$ ) могут принимать произвольные значения – как положительные, так и отрицательные,  $l$  – период структуры,  $d \times h$  – размеры в поперечном сечении (плоскостью YOZ) одного

семейства брусьев, и  $(l-d) \times h$  – размеры в поперечном сечении другого семейства брусьев,  $\varphi$  – угол падения волны.

Для нахождения рассеянного решеткой поля необходимо решить однородное уравнение Гельмгольца относительно  $E_x$ -компоненты напряженности электрического поля [1-3]:

$$\Delta E_x + k^2 \varepsilon(z) \mu(z) E_x = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon(z) \mu(z) = \begin{cases} \varepsilon_1 \mu_1 & z \in \left[ \frac{d}{2} - l, -\frac{d}{2} \right) \\ \varepsilon_2 \mu_2 & z \in \left[ -\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right) \end{cases},$$

с соответствующими граничными условиями – непрерывность тангенциальных компонент  $E_x$ ,  $H_z$  полей на поверхностях решетки с использованием теоремы Флоке, связывающей поля в двух соседних периодах структуры.

Решение задачи для трех частичных областей структуры представляется в виде:

$$E_x(z, y) = \begin{cases} e^{ik_y(y+\frac{h}{2})+ik\alpha z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_m} e^{-i\gamma_m(y+\frac{h}{2})} e^{-i(k\alpha+\lambda_m)z}; & y < \frac{h}{2} \\ \sum_n Y_{\beta_n}(y) Z_{\beta_n}(z); & |y| \leq \frac{h}{2} \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda_m} e^{i\gamma_m(y+\frac{h}{2})} e^{-i(k\alpha+\lambda_m)z}; & y > \frac{h}{2} \end{cases} \quad (2)$$

здесь  $\lambda_m = \frac{2\pi}{l} m$ ,  $\gamma_m = \sqrt{k^2 - (k\alpha + \lambda_m)^2}$ ,  $\alpha = \sin \varphi$ ,  $k_y = k \cos \varphi$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,  $A_{\lambda_m}$ ,  $B_{\lambda_m}$  – неизвестные коэффициенты Фурье-разложения.

Решение уравнения (1) в области, заполненной фотонно-кристаллической структурой, представляется в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля  $Z_{\beta_n}$ , которые находятся из уравнения:

$$\ddot{Z}_{\beta_n} + \zeta^2 Z_{\beta_n} = 0, \quad (3)$$

$$Z_{\beta_n}(z) = \begin{cases} A_{\zeta_n^I} \cos \zeta_n^I(z + \frac{d}{2}) + B_{\zeta_n^I} \sin \zeta_n^I(z + \frac{d}{2}), & z \in [\frac{d}{2} - l, -\frac{d}{2}) \\ A_{\zeta_n^{II}} \cos \zeta_n^{II}(z + \frac{d}{2}) + B_{\zeta_n^{II}} \sin \zeta_n^{II}(z + \frac{d}{2}), & z \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \end{cases},$$

где  $\zeta_n^I = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + \beta_n^2}$ ,  $\zeta_n^{II} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \beta_n^2}$ , а  $A_{\zeta_n^I}$ ,  $A_{\zeta_n^{II}}$ ,  $B_{\zeta_n^I}$ ,  $B_{\zeta_n^{II}}$  – неизвестные коэффициенты. Функции  $Y_{\beta_n}(y) = C_{\rho_n} e^{\rho_n y} + D_{\rho_n} e^{-\rho_n y}$  ( $\rho_n = \sqrt{k^2 \varepsilon \mu - \zeta_n^2}$ ) представляют собой общее решение однородного дифференциального уравнения  $\ddot{Y} + \rho_n^2 Y = 0$  с неизвестными коэффициентами  $C_{\rho_n}$ ,  $D_{\rho_n}$ .

Характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля в области структуры имеет вид:

$$\cos k\alpha l = f(k, \beta) = \cos \zeta_n^I d \cos \zeta_n^I(d-l) + \frac{1}{2} \left( \eta \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{1}{\eta} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \sin \zeta_n^{II} d \sin \zeta_n^I(d-l), \quad (4)$$

здесь  $\zeta_n^I = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + \beta_n^2}$ ,  $\zeta_n^{II} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \beta_n^2}$ ,  $\eta = \zeta_n^I / \zeta_n^{II}$ .

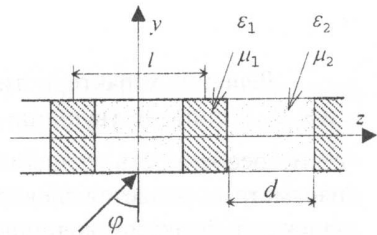


Рис. 1. Модель структуры

Решение характеристического уравнения (4) позволяет найти собственные значения  $\beta = \beta_n$  и соответствующие им собственные функции  $Z_{\beta_n}$  в области структуры. Отметим одну особенность решения характеристического уравнения (4). Если в уравнении параметр  $\alpha$  является спектральным, то решение уравнения (4) имеет явный вид. В случае задачи дифракции величина  $\alpha$  не является спектральным параметром, так как она задается при постановке задачи. Спектральным параметром является величина  $\beta$ , определяющая волновое число волны, распространяющейся в направлении оси  $Oy$ . Определить аналитически это число для заданного значения параметра  $\alpha$  не представляется возможным. Поэтому в данном случае величина  $\beta$  находилась численно. Анализ уравнения (4) показывает, что величина  $\beta$  в случае вещественных величин  $\epsilon_j$ ,  $\mu_j$  может быть либо вещественной, либо чисто мнимой. В первом случае волны затухают вдоль оси  $Oy$  слоистой структуры и являются поверхностными волнами, а во втором – распространяются без затухания.

На рис 2 приведен график функции  $v(\beta) = |f(k, \beta) - \cos k\alpha l|^2$  в прямоугольной декартовой системе координат (вдоль оси абсцисс отложены вещественные значения  $\beta$ , вдоль оси ординат – мнимые значения  $\beta$ ). График данной функции представляется посредством изолиний. Очевидно, что нули функции  $v(\beta)$  являются корнями уравнения (4). На рисунке показаны 5 уровней  $v(\beta) = c_j$  ( $c_{j=1,5} = 0.02, 0.04, \dots, 0.1$ ). Указанные уровни близки к уровню  $v(\beta) = 0$ . Характерное распределение кривых, соответствующих этим уровням, указывает на отсутствие комплексных корней уравнения (4). Из рисунка видно, что количество чисто мнимых корней уравнения (4) ограничено (на данном рисунке четыре корня), а количество вещественных корней (затухающие волны) – бесконечно.

Значения параметра  $k$ , при которых  $|f(k, \beta)| > 1$  соответствуют полосе запирания – корни уравнения (4) отсутствуют. Таким образом, найдутся такие значения параметра  $k$ , что, каково бы ни было значение  $\beta$ , тождество  $\cos k\alpha l \equiv f(k, \beta)$  не выполняется. Такое множество значений параметра  $k$  называют *полосой запирания*. Полосы запирания в области изменения параметра  $k$  возникают при значениях  $n_1 \neq n_2$ . При  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$  ( $n_1 = n_2$ ), т. е. когда структура вырождается в слой, в области изменения параметра  $k$  возникает единственная полоса запирания, характерная для диэлектрического слоя. Если один из элементов структуры является метаматериалом, то имеется особый случай для величин  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ ,  $\mu_1 = -\mu_2$  ( $n_1 = -n_2$ ) (*фазовая диэлектрическая решетка*). В этом случае в области изменения параметра  $k$  возникает также одна полоса запирания, причем, для значений  $ikn \leq \beta$  (здесь  $ikn$  – чисто мнимое положительное число). Для более детального анализа случая фазовой диэлектрической структуры, один из слоев которой является метаматериалом, а второй – обычной средой, материалы параметры которой совпадают по абсолютной величине, проведем исследование дисперсионных характеристик на основе решения уравнения (4).

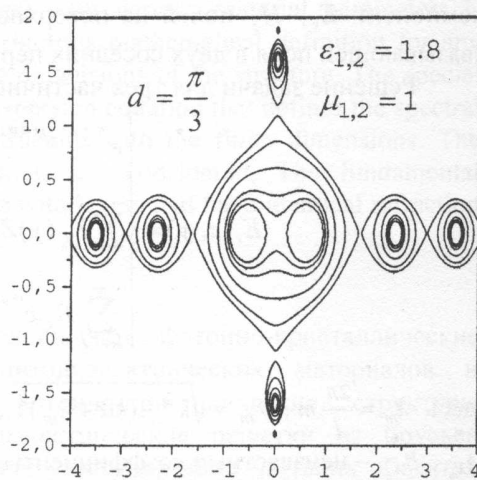


Рис. 2. Изолинии функции  $v(\beta)$  при  $\beta \in \mathbb{C}$  для уровней  $c_{j=1,5} = 0.02, 0.04, \dots, 0.1$ ; при волновом числе  $k = 1.1$

На рис. 3. представлены дисперсионные кривые для фазовой диэлектрической структуры (сплошные линии) и для случая обычного диэлектрического слоя (штриховые линии) для значений спектрального параметра  $\beta = 0.5i$  и  $\varphi = \pi/3$ ,  $d = \pi/3$  и различных значений материальных параметров. Следует отметить, что для фазовой диэлектрической решетки, как и в случае обычного диэлектрического волновода, существует одна полоса

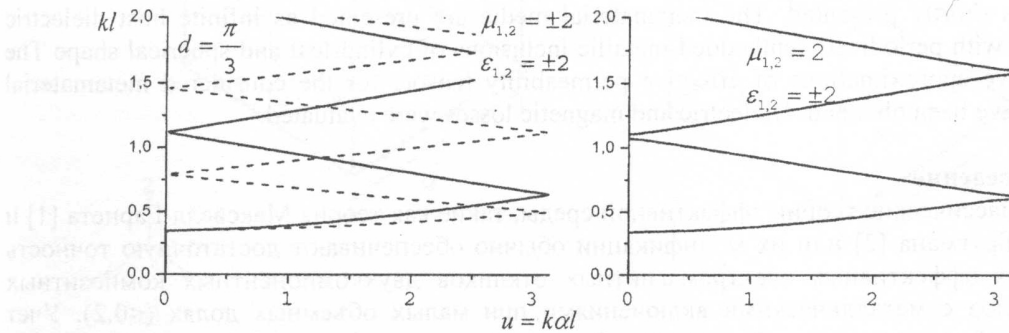


Рис. 3. Дисперсионные кривые  $u = \arccos f(k, \beta)$  при  $\beta = .5i$  и  $\varphi = \frac{\pi}{3}$

запирания. Если значения величин магнитной или диэлектрической проницаемостей одинаковы, то появляется множество полос запирания. Все эти особенности распространения волн необходимо учитывать при нахождении амплитудно-частотных характеристик в случае дифракции волны на такой структуре.

На рис. 4 представлены амплитудно-частотные характеристики для магнитодиэлектрической решетки (сплошные линии) и фазовой диэлектрической структуры (штриховые линии). Наблюдаемые на рисунке резонансы связаны с полным прохождением и отражением волны от структуры. Их местоположение определяется рассмотренными ранее дисперсионными характеристиками.

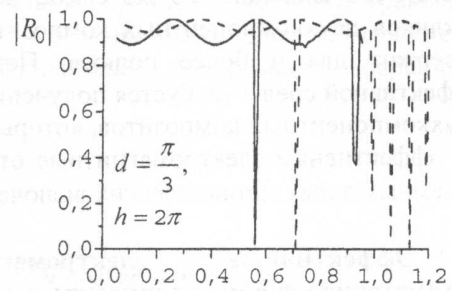


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения  $|R_0|$  от волнового числа  $k$  при нормальном падении (случай фазовой решетки)

### Заключение

Получено строгое решение задачи дифракции плоской волны на магнитодиэлектрической решетке с элементами, материальные параметры которых могут иметь разные знаки. Выявлены особенности распространения волн в слоистой структуре для различных вариантов магнитодиэлектриков, включая метаматериалы. Исследован случай фазовой решетки с элементами, которые имеют одинаковые по абсолютной величине показатели преломления, и установлены особенности распространения волн в таких структурах.

### Список литературы:

- [1]. Масалов С. А., Репа Ю. Т., Шестопалов В. П. Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрической решетке // Республ. Межведомств. тематический научно-техн. сб. «Радиотехника». – 1969. – вып. 10. – С. 15-24.
- [2]. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках: учебное пособие – Х.: Харьковский университет им. Горького, 1973. – 289 с.
- [3]. Казанко А.В., Одаренко Е.Н., Шматько А.А. Взаимодействие плоской электромагнитной волны с дифракционной решеткой из метаматериала // Вісник ХНУ імені Каразіна. Сер. Радіофізика та електроніка. – 2012. – № 1010. – Вип. 20. – С. 57-65.