Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Метод Монте-Карло та його застосування до моделювання складних систем
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання, групи ПМм-24-1
Сергій ФАРМАГЕЙ
(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник асист. Володимир ЛУХАНІН
(посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ПМ ____________ Максим СИДОРОВ
(підпис) (Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри ____________
(підпис)
“_10_” _листопада_ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _Фармагею Сергію Кириловичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Метод Монте-Карло та його застосування до моделювання складних систем

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1028 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель ціни опціонів

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
   1. Аналіз предметної області
   2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
   3. Програмна реалізація
   4. Результати обчислювального експерименту
   5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _10_ листопада 2025 р.

Здобувач ____________________
(підпис)

Керівник роботи ____________ асист. Володимир ЛУХАНІН
(підпис) (посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 43 с., 6 рис., 1 дод., 30 джерел.

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, СКЛАДНА СИСТЕМА, ПРОЦЕС ПЕРКОЛЯЦІЇ, САМОУНИКАЮЧЕ БЛУКАННЯ, ПРОСТА ВИБІРКА, РАДІОАКТИВНИЙ РОЗПАД, ЦІНА ОПЦІОНІВ, СИСТЕМА МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ, МОДЕЛЬ ПОТТСА.

Об’єкт дослідження – складні системи різної природи (фізичні, соціально-економічні, технічні), які характеризуються стохастичною поведінкою або містять значну кількість змінних, що унеможливлює точний аналітичний опис.

Мета роботи – проведення аналізу ефективності застосування методу Монте-Карло до моделювання складних систем, а також його програмна реалізація.

Методи дослідження – метод Монте-Карло, метод Хошена-Копельмана, стохастичне моделювання, метод математичного очікування, метод статистичної обробки результатів.

У роботі було розглянуто застосування методу Монте-Карло до складних систем. Наведено різні аспекти застосування методу та наведено приклад на основі задачі опціонів.

Результати ілюструють залежність розв’язків, отриманих за допомогою методу Монте-Карло, до кількості ітерацій та порівняння отриманих результатів з формулою для розрахунку ціни опціонів за формулою Блека-Шоулса.

Отримані результати можна використовувати для чисельного визначення ціни опціонів у випадках, коли аналітичні формули дуже складні. Також результати можна використовувати для ілюстрації збіжності чисельних методів та ілюстрації впливу параметрів моделі.

ABSTRACT

Introductory note: 43 pages, 6 figures, 1 appendix, 30 sources.

MONTE CARLO METHOD, COMPLEX SYSTEM, PERCOLATE PROCESS, SELF-AVOIDANT WALK, SIMPLE SAMPLING, RADIOACTIVE DECAY, OPTION PRICE, MASS SERVICE SYSTEM, POTTS MODEL.

Object of research – complex systems of various natures (physical, socio-economic, technical), which are characterized by stochastic behavior or contain a significant number of variables, which makes an accurate analytical description impossible.

Purpose of work – conducting an analysis of the effectiveness of the Montr Carlo method of modeling complex system, as well as its software implementation.

Methods of research – Monte Carlo method, Hoshen-Kopelman method, stochastic modeling, mathematical expectation method, method of statistical.

The paper examines the application of the Monte Carlo method to complex systems. Various aspects of the method`s application is presented, and an example based on the options problem is given.

The results illustrate the dependence of solutions obtained using the Monte Carlo method on the number of iterations and a comparison of the obtained results with the formula for calculating the price of option using the Black-Scholes formula.

The results obtained can be used to numerically determine the price of options in case where the analytical formulas are very complex. The results can also be used to illustrate the convergence of numerical method and illustrate the influence of model parameters.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Метод Монте-Карло має широку низку можливостей для дослідження складних систем і процесів, які неможливо розв'язати аналітичними або класичними чисельними методами. Він забезпечує ефективне чисельне інтегрування у багатовимірних просторах, відтворює випадкову природу багатьох явищ і відзначається універсальністю застосування у фізиці, біології, економіці та інженерії. У ряді задач саме метод Монте-Карло виступає єдиним дієвим засобом аналізу та прогнозування поведінки складних систем.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є провести аналіз ефективності застосування методу Монте-Карло до моделювання складних систем а також його програмна реалізація. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «аналіз ефективності застосування методу Монте-Карло до моделювання складних систем»;

– дослідити сучасні методи до застосування методу Монте-Карло у моделюванні складних систем;

– розглянути низку прикладних задач та обрати модель для практичної реалізації моделі;

– зробити обчислювальні експерименти;

– провести аналіз отриманих результатів та зробити висновки.

Об'єктом дослідження є складні системи різної природи (фізичні, соціально-економічні, технічні), які характеризуються стохастичною поведінкою або містять значну кількість змінних, що унеможливлює точний аналітичний опис.

Предметом дослідження є метод Монте-Карло, та його застосування до чисельного аналізу складних стохастичних або детерміновано-хаотичних систем.

Методи дослідження. У роботі використовуються метод Монте-Карло, метод Хошена-Копельмана, стохастичне моделювання, метод математичного очікування, метод статистичної обробки результатів.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на конференції «Комп'ютерно-інтегровані технології автоматизації технологічних процесів на транспорті та у виробництві» (м. Харків, 25 листопада 2025 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Метод Монте-Карло: історія та основні положення

Перші варіанти методу були надзвичайно простими – їх створювали як інструмент для наближеної оцінки розв'язків аналітично складних проблем. Значна частина тієї ранньої роботи не була опублікована, тому найповніше уявлення про походження методу Монте-Карло можна отримати, звернувшись до збереженого листування та історичних описів його розвитку.

Хоча подальші розділи цієї роботи зосереджені переважно на складніших модифікаціях методу Монте-Карло, спеціально адаптованих для задач статистичної фізики, ранні, прості варіанти методу й сьогодні залишаються важливими. Їхнє практичне значення відчутно зросло завдяки стрімкому збільшенню обчислювальної потужності комп'ютерів протягом останніх десятиліть.

У практичному застосуванні метод Монте-Карло реалізується через послідовність кроків:

а) формулювання задачі у стохастичній формі – переведення вихідної задачі до задачі знаходження математичного сподівання випадкової величини;

б) генерація випадкових чисел – створення незалежної послідовності рівномірно розподілених випадкових величин (за допомогою генераторів псевдовипадкових чисел);

в) побудова вибірки – перетворення рівномірно розподілених чисел у випадкові величини з потрібними законами розподілу;

г) обчислення результатів – для кожної згенерованої випадкової точки обчислюється значення функції;

д) статистична обробка – обчислення середнього значення по всій вибірці, яке й буде наближенням шуканої величини.

Таким чином, результатом методу є статистична оцінка, яка за достатньо великої кількості випробувань наближається до істинного значення.

1.2 Застосування методу Монте-Карло до розв’язання різних задач

Розглянемо декілька прикладів застосування методу Монте-Карло, а саме: задачі перколяції, задачі самоуникаючого блукання та задачу радіоактивного розпаду.

1.2.1 Задача перколяції

Геометричною проблемою, яка вже тривалий час відіграє важливу роль у статистичній механіці, є перколяція. Процеси перколяції – це явища, в яких шляхом випадкового додавання окремих елементів (частинок або зв’язків) формується суцільна структура, що пронизує всю систему.

Загалом частинки можуть бути розподілені безперервно у просторі, і їх перекриття створює зв’язані області – кластери, які поступово з’єднуються, утворюючи єдиний зв’язний кластер, що охоплює всю решітку або систему.

Розберемо, як приклад, перколяцію сайтів: ґратка складається з періодичного масиву потенційних сайтів, які можуть бути зайняті. Найменший кластер утворюється тоді, коли зайнятий лише один сайт, а жоден із його найближчих сусідів не зайнятий. У системі можна визначити дві важливі характеристики:

а) ймовірність утворення охоплюючого (нескінченного) кластера;

б) параметр порядку, який відповідає частці зайнятих сайтів, що належать до нескінченного кластера.

Ці величини визначаються шляхом числового експерименту: для кожного значення ймовірності заповнення p генерується велика кількість реалізацій решітки, і підраховується частка тих, у яких формується охоплюючий кластер. У міру збільшення розміру решітки ймовірність появи нескінченного кластера прямує до нуля для $p < p_c$ та до одиниці для $p > p_c$. Таким чином, при деякому критичному значенні $p = p_c$ відбувається перехід перколяції, інша назва якого поріг перколяції.

Поведінка параметра порядку поблизу порогу перколяції описується співвідношенням, подібним до того, яке застосовується для критичної поведінки параметра порядку при температурних переходах. У скінченних ґратках ситуація дещо складніша: острівний кластер може утворитися навіть за невеликого p, коли система ще не досягла критичного стану. Отже, навіть при малих значеннях p ймовірність перколяції може бути ненульовою.

При випадковому розміщенні вузлів на решітці утворюються кластери різних розмірів, і перколяційні кластери, якщо вони виникають, мають фрактальну структуру. Характерна поведінка ймовірності перколяції при збільшенні p показує поступове зростання від нуля до одиниці, а для великих розмірів ґратки перехід стає різкішим.

Для кількісного опису системи використовується розподіл за розмірами кластерів – $n(s)$, який показує, скільки кластерів має розмір s. На порозі перколяції цей розподіл підкоряється степеневому закону:

$$n(s) \sim s^{-\tau}, \tag{1.1}$$

де τ – критичний показник.

Також визначається аналог «сприйнятливості» системи:

$$\chi = \sum_s s^2 n(s), \tag{1.2}$$

яка розходиться при $p = p_c$.

Для реалізації методу Монте-Карло в задачі перколяції застосовується наступна процедура: починають із порожньої решітки, випадковим чином заповнюють її сайти з імовірністю p, після чого знаходять усі зв’язані кластери. Якщо цікавий діапазон p знаходиться поблизу критичного значення, необхідно перевіряти, щоб одна і та сама точка не вибиралася двічі, інакше метод стає не-ефективним. Після досягнення бажаного заповнення p визначаються властивості системи: ймовірність перколяції, розмір найбільшого кластера, середній розмір кластера тощо.[2]

1.2.2 Задачі самоуникаючого блукання

На відміну від простого випадкового блукання, самоуникне блукання (СБ) описує рух, під час якого траєкторія не може перетинати сама себе. Такий підхід дозволяє моделювати поведінку полімерних ланцюгів, у яких мономери не можуть займати одне й те саме місце у просторі.

Хоча ці методи є досить простими, вони залишають багато відкритих наукових питань, що становлять сучасний дослідницький інтерес. Багато з цих проблем можна ефективно вивчати саме за допомогою методів Монте-Карло.

Прикладом є випадок зіркоподібного полімеру, адсорбованого своїм ядром на стінці. У двохвимірному випадку очікується, що розмір полімеру масштабується з кількістю мономерів певним степеневим законом. Проте для зіркоподібного полімеру виникає додаткове питання: як саме кількість «плечей» впливає на характер цього масштабування?

Для зіркоподібних полімерів із довгими плечима й великою кількістю розгалужень імовірність утворення конфігурацій, що відповідають умовам СБ, стає надзвичайно малою. Таким чином, звичайна процедура симуляції, коли «популяція» полімерів вирощується паралельно з кількох центрів і лише ті полімери, що «виживають» до останнього покоління, аналізуються статистично, виявляється неефективною.

Одним із найпростіших і водночас найефективніших застосувань методу Монте-Карло є обчислення визначених інтегралів, які складно розв’язати аналітичними методами.

Розглянемо випадок одновимірного інтеграла. Хоча приклади, що наводяться нижче, стосуються саме цієї ситуації, слід розуміти, що методи Монте-

Карло легко узагальнюються на багатовимірні інтеграли, де вони часто виявляються ще ефективнішими.

Простий розв’язок Монте-Карло цієї задачі базується на методі «влучення–промаху» (або прийняття–відхилення). Суть методу полягає в тому, що будується прямокутник, який охоплює область під графіком функції $f(x)$ у межах від a до b і від 0 до $f_{\max}$, де $f_{\max}$ – максимальне значення функції на цьому проміжку.

Далі за допомогою випадкових чисел, рівномірно розподілених у межах цього прямокутника, генерується велика кількість випадкових точок. Підраховується кількість точок, що потрапляють під криву $f(x)$. Частка таких точок, помножена на площу прямокутника, дає оцінку інтеграла. При достатньо великій кількості випробувань результат збігається до правильного значення.

Цей підхід є прикладом методу простої вибірки Монте-Карло. Його точність суттєво залежить від якості генератора випадкових чисел. Для оцінки надійності методу можна використовувати кілька незалежних послідовностей випадкових чисел і порівнювати отримані результати – це дозволяє оцінити похибку обчислення.

Нехай на площині випадковим чином вибирається велика кількість точок так, що $0 \le x \le 1$ і $0 \le y \le 1$. Для кожної точки обчислюється відстань від початку координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Потім визначається, скільки з цих точок потрапляють усередину чверті кола радіусом 1 (тобто мають $r < 1$).

Частка таких точок p дорівнює відношенню площі чверті кола до площі квадрата, тобто $p = \dfrac{\pi r^2 / 4}{1^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Звідси маємо оцінку $\pi \approx 4p$.

Процедуру можна повторити кілька разів, а дисперсія результатів використовується для оцінки похибки. Наприклад, при моделюванні з 10 000 точками результати збігаються до точного значення π з прийнятною точністю. Якщо ж взяти лише кілька сотень точок, то результат може відхилятися – це демонструє, наскільки важливий обсяг вибірки. Цей факт варто запам’ятати як основний урок методу Монте-Карло.

Існує модифікація цього підходу, коли значення x вибираються регулярно, рівновіддаленим. Перевагою такого варіанту є зменшення потреби у великій кількості випадкових чисел. Проте для функцій, що мають різкі коливання або великі градієнти на певних ділянках, така схема може збігатися повільно – тоді потрібно застосовувати інші методи.[3]

1.2.3 Задача радіоактивного розпаду

Розглянемо вибірку з N_0 ядер, що розпадаються зі швидкістю λ. Фізика процесу визначається рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \tag{1.4}$$

Його розв’язок має вигляд:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{1.5}$$

де N_0 – початкова кількість ядер, а параметр λ пов’язаний із періодом напіврозпаду.

У моделюванні час розбивають на дискретні інтервали Δt. Кожне нерозпадене ядро перевіряється на розпад протягом інтервалу часу з імовірністю $p = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$. Після кожного кроку часу визначається кількість ядер, що залишилися, і процес повторюється.

Дискретизацію часу слід вибирати розумно: якщо крок занадто малий, моделювання буде надто повільним; якщо занадто великий – втратиться точність через надто великі зміни між кроками.

Процес можна повторювати багаторазово, отримуючи серію незалежних експериментів. Для кожного значення часу визначається середнє число нерозпадних ядер і статистична похибка. Оскільки кожен експеримент незалежний, усі спостереження легко усереднюються.[4]

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Необхідно визначити справедливу (ринкову) ціну європейського опціону купівлі або продажу на фінансовий актив (наприклад, акцію), ціна якого змінюється випадковим чином у часі. Зміни вартості активу описуються стохастичним процесом, що моделює геометричний броунівський рух із параметрами середнього темпу зростання та волатильності. Для обчислення очікуваної вартості виплати опціону у момент закінчення контракту застосовується метод Монте-Карло, який базується на багаторазовому статистичному моделюванні можливих траєкторій зміни ціни базового активу та подальшому усередненні отриманих результатів із дисконтуванням до поточного моменту часу.

Метою є оцінити середнє значення майбутніх виплат за опціоном з урахуванням безризикової процентної ставки та стохастичної природи зміни ціни активу.

Потрібно обчислити справедливу ціну європейського опціону на базовий актив із ціною S_0, страйком X, строком дії T, безризиковою ставкою r та волатильністю σ, використовуючи метод Монте-Карло.

Ціна активу змінюється за стохастичним рівнянням геометричного броунівського руху:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, S(0) = S_0. \qquad (1.6)$$

Його розв’язок:

$$S_T = S_0 \exp[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z], Z \sim N(0,1). \quad (1.7)$$

Теоретична ціна опціону:

$$C = e^{-rT}[\max(S_T - X, 0)], P = e^{-rT}[\max(X - S_T, 0)]. \quad (1.8)$$

Методом Монте-Карло згенерувати n незалежних випадкових і для кожної реалізації провести обчислення.

1.4 Постановка задач дослідження

З огляду на проведений аналіз метою кваліфікаційної роботи є провести аналіз ефективності застосування методу Монте-Карло до моделювання складних систем а також його програмна реалізація. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «аналіз ефективності застосування методу Монте-Карло до моделювання складних систем»;

– дослідити сучасні методи до застосування методу Монте-Карло у моделюванні складних систем;

– розглянути низку прикладних задач та обрати модель для практичної реалізації моделі;

– зробити обчислювальні експерименти;

– провести аналіз отриманих результатів та зробити висновки.

Задачею дослідження є дослідження ефективності застосування методу Монте-Карло для моделювання складних систем різних напрямків, а також розробка алгоритмічних та програмних засобів його реалізації для відповідних систем. Основним об’єктами дослідження є чисельний розрахунок ціни фінансових опціонів, моделювання систем масового обслуговування та аналіз стохастичних процесів у фізиці.

У ході роботи будуть виконані наступні кроки:

а) аналіз теоретичної основи методу Монте-Карло, а саме розглянуто його принципи побудову, математичне обґрунтування та сфери застосування;

б) визначення переваг та недоліків порівняно з іншими чисельними методами;

в) розглянути прикладні задачі, у яких метод Монте-Карло має найбільшу ефективність;

г) розробка математичної моделі та алгоритмів реалізації обраних задач, а саме: вивести залежності для стохастичних змінних та провести аналіз отриманих результатів на базі отриманих експериментальних даних;

д) порівняти точність отриманих експериментальних даних порівняно з результатами використання інших методів;

е) зробити загальні висновки стосовно ефективності методу Монте-Карло для розв’язання складних задач.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗАННЯ

2.1 Застосування методу Монте-Карло до розрахунку ціни опціонів

Одним з основних напрямків використання методу Монте-Карло є аналіз великої кількості даних. Прикладом таких даних є ціни опціонів.

Опціон – це контракт, який надає право (але не зобов’язання) його власникові купити або продати обумовлену кількість фінансових активів за фіксованою ціною у визначений момент часу протягом терміну дії контракту в обмін на опціонну премію.

У перекладі "опціон" (англ. option) означає вибір. Саме можливість вибору і є основною характеристикою опціонів. Предметом опціонної угоди можуть бути різноманітні фінансові інструменти: валюта, акції, індекси, цінні папери, кредити, ф’ючерсні контракти, фондові індекси, казначейські векселі, державні облігації тощо.

Опціони бувають двох типів: опціони, які дають право купити-опціони купівлі – колл-опціони (call options), та опціони, які дають право продати-опціони продажу – пут-опціони (put options).

Опціони бувають європейського стилю (European-style) з фіксованим терміном виконання і американського стилю (American-style), які можуть бути пред’явленими власником опціону на виконання в будь-який момент часу до фіксованої крайньої дати закінчення контракту.

До стандартних опціонів відносять також середньоатлантичні опціони (бермудські опціони, квазі-американські) (Mid-Atlantic-style). Вони можуть буди виконані у деякі конкретні проміжки часу, які називають вікнами (можуть тривати кілька днів).

Ринкова вартість опціону визначається в результаті аукціонних торгів на опціонній біржі. Ціну, на яку погоджуються продавець і покупець опціону, називають премією.

Поширеною моделлю ціни акцій є геометричний броунівський рух, який визначають як розв’язок стохастичного диференціального рівняння:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)\delta W, S_0 = S(0) > 0\,, \tag{2.1}$$

де $S(t)$ – ціна акції в момент часу ;

μ – коефіцієнт зносу (зсуву);

σ – коефіцієнт дифузії (волатильність);

$\delta W = W(t + dt) - W(t) \sim N(0; dt)$ – приріст вінерівського процесу;

$W(t)$ – вінерівський випадковий процес (процес броунівського руху).

Аналітичний розв’язок стохастичного диференціального рівняння має вигляд:

$$S(t) = S(0)\exp(mt + \sigma W(t)), m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}. \tag{2.2}$$

Отже, як легко бачити ціна $S(t)$ є логнормально розподіленою з математичним сподіванням

$$M(S(t)) = e^{\mu t} S(0) \tag{2.3}$$

та дисперсією

$$D(S(t)) = e^{2\mu t} S_0^2 (e^{\sigma^2 t} - 1)\,. \tag{2.4}$$

З іншого боку, випадкова величина логарифмічного приросту $r(t) = \ln(S(t)\,/\,S(0))$ є нормально розподілена з параметрами

$$M(r(t)) = mt = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, D(r(t)) = \sigma^2 t\,. \tag{2.5}$$

За припущення про безарбітражність ринку виконується рівність

$$M(S(t)) = e^{ft} S(0), \tag{2.6}$$

тоді $\mu = f$, а $m = f - \frac{1}{2}\sigma^2$ – безризикова процентна ставка за неперервного нарощення процентів.

Введемо на проміжку $[0,T]$ рівномірну сітку $\{t_k = k\Delta t, k = 0,1,..., N\}$ з кроком $\Delta t = T / N$.

Нехай $r_k = \ln(S_k / S_{k-1})$ – логарифмічна дохідність за період $[t_{k-1}, t_k]$. Тоді отримаємо подання ціни у момент часу t_k:

$$S_k = S(t_k) = S(0)\exp(r_1 + r_2 + ... + r_k), k = 1,2,..., N; `S_0 = S(0), \tag{2.7}$$

$$r_k = \ln(S_k / S_{k-1}) \sim N(m_k; \sigma_k^2), m_k = m\Delta t, \sigma_k = \sigma\sqrt{\Delta t} m_i = m\Delta t \sigma_i = \sigma\sqrt{\Delta t}\ . \tag{2.8}$$

Зауважимо, що у загальному випадку величини логарифмічної дохідності r_k можуть мати довільний розподіл, який визначаємо емпірично.

Результат моделювання з номером j позначимо через S_k^j, кількість випробувань – n.

Тоді для розрахунку ціни опціонів за методом Монте-Карло можна отримати наступні формули:

$$C_E = \frac{e^{-fT}}{n} \sum_{j=1}^{n} (S_N^j - X)^+ , \tag{2.9}$$

$$P_E = \frac{e^{-fT}}{n} \sum_{j=1}^{n} (X - S_N^j)^+ . \tag{2.10}$$

2.2 Застосування методу Монте-Карло в системах масового обслуговування

Розглянемо на прикладі порядок застосування методу статистичного моделювання для визначення числових характеристик функціонування станції технічного обслуговування автомобілів (СТОА).

Приклад. Досліджується СТОА методом статистичного моделювання для однієї реалізації, яка має два канали і два місця для очікування в черзі. Інтенсивність надходження заявок $\lambda = 1{,}5$ заявки на годину, інтенсивність обслуговування одного каналу $\mu = 0{,}5$ заявки на годину.

Складаємо розмічений граф станів рис. 2.1:

S_0 – всі канали вільні;

S_1 – зайнятий один канал;

S_2 – зайняті обидва канали;

S_3 – обидва канали зайняті і одна заявка в черзі;

S_4 – обидва канали зайняті і дві заявки в черзі.

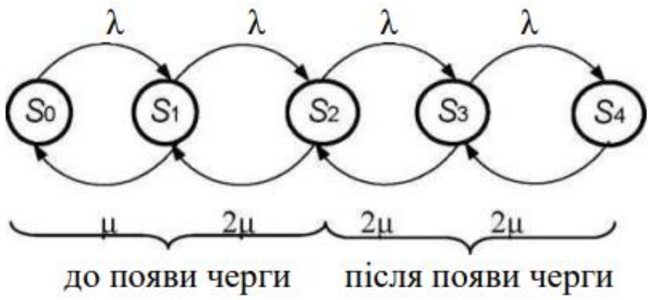

Рисунок 2.1 – Розмічений граф станів

Розігруємо інтервали часу прибуття і час обслуговування заявок, для чого скористаємося алгоритмом моделювання випадкової величини T, розподіленої за показниковим законом, тобто

$$T_i^* = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y_i); T_i^{**} = -\frac{1}{\mu}\ln(1-y_i), \qquad (2.11)$$

де T_i^* – інтервал часу надходження заявок на СМО;

T_i^{**} – час обслуговування i -ої заявки.

Складаємо таблицю часу прибуття і часу обслуговування і зображуємо процедуру моделювання графічно (рис. 2.2).

Для графічного зображення процесу моделювання роботи СМО візьмемо кілька координатних осей, які мають один і той же масштаб відліку часу. На першій осі відкладемо астрономічний час, на другій відзначимо моменти надходження заявок на обслуговування. На осі S_0 зобразимо стан системи, коли всі канали вільні, на осях S_1 і S_2 – стан першого і другого каналів, на осях S_3 і S_4 – стан першого і другого місць у черзі.[11]

До моменту t_1^* – надходження першої заявки, всі канали і всі місця в черзі вільні. У момент t_1^* приходить перша заявка і займає перший канал. Скільки часу він буде зайнятий, вирішується розігруванням.

Перше розігране значення часу обслуговування відкладаємо на осі S_1 від точки з абсцисою t_1^*, відзначаємо його жирною лінією. У момент t_2^* – приходу другої заявки, перший канал зайнятий, заявка займає другий канал. Розігруємо ще одне значення T_2^{**} – і позначаємо жирною лінією на осі S_2 від точки з абсцисою t_2^* і т. д.

Заявка, що прийшла в момент, коли всі канали і місця в черзі зайняті, отримує відмову (вона покидає СМО необслуженою).

Припустимо, що моделювання реалізації продовжено нами досить довго. Визначимо ймовірні характеристики СМО.

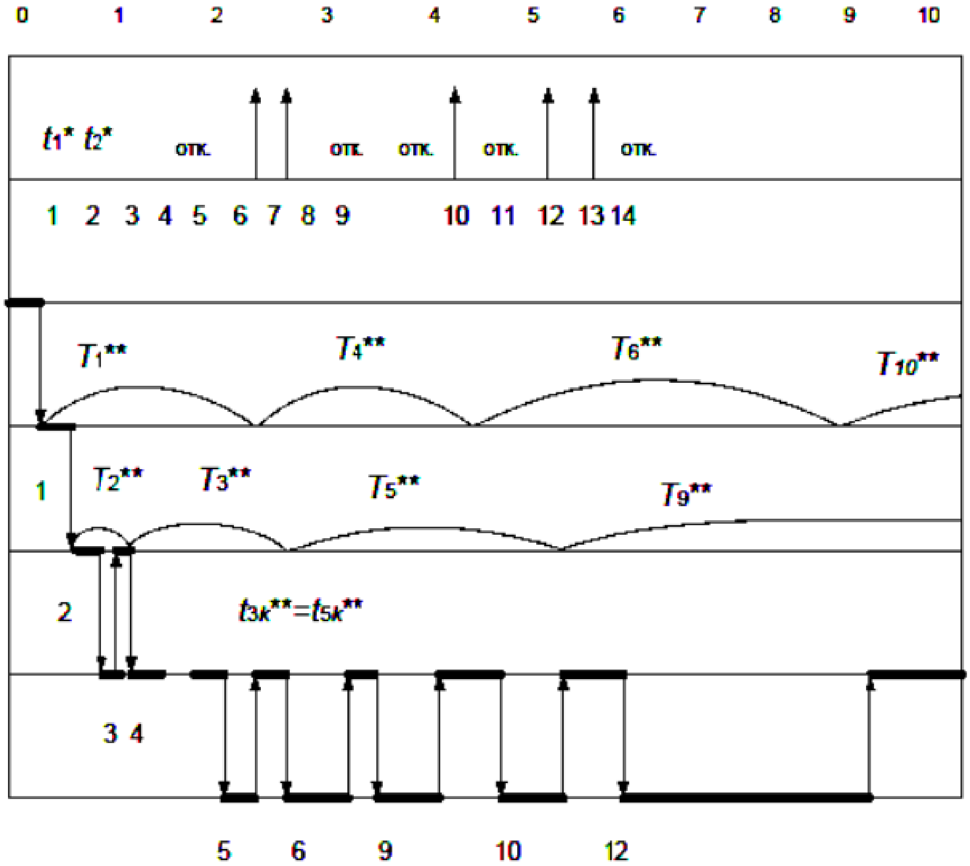

Рисунок 2.2 – Графічний процес моделювання

Імовірності P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 того, що система знаходиться в стані S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, знайдемо з відношень:

$$p_0 \approx \frac{\sum T_0}{T}; p_1 \approx \frac{\sum T_1}{T}; p_2 \approx \frac{\sum T_2}{T}; p_3 \approx \frac{\sum T_3}{T}; p_4 \approx \frac{\sum T_4}{T}; \qquad (2.12)$$

де $\sum T_0$, $\sum T_1$, $\sum T_2$, $\sum T_3$, $\sum T_4$ – суми часу знаходження системи в станах S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 (беруться з даних рис. 2.2);

T – розглядуваний інтервал часу (8 годин).

Очевидно, $\sum T_0 + \sum T_1 + \sum T_2 + \sum T_3 + \sum T_4 = T$.

Імовірність відмови знайдеться на великому проміжку часу T як відношення числа N^* заявок, які отримали відмову, до загального числа заявок, що надійшли в цей час:

$$p_{отк} = \frac{N^*}{N}, \tag{2.13}$$

– відносна пропускна здатність:

$$q = 1 - P_{отк}; \tag{2.14}$$

– абсолютна пропускна здатність:

$$Q = \lambda q; \tag{2.15}$$

– середнє число зайнятих каналів:

$$\overline{p} = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4); \tag{2.16}$$

– середнє число заявок в черзі:

$$\overline{m} = 0(p_0 + p_1 + p_2) + 1p_3 + 2p_4. \tag{2.17}$$

2.3 Застосування методу Монте-Карло в статистичній фізиці

Низку цікавих проблем, досліджених за допомогою моделювання Монте-Карло, можна умовно розглядати як частину біології, але оскільки формулювання ближче до статистичної фізики, а не до «реальної» біології, ми називатимемо їх фізикою, натхненною біологією. Цікавими прикладами такої роботи є вивчення генеалогічних дерев для простих нейтральних моделей замкнутої популяції зі статевим розмноженням та чітко розділеними поколіннями та дослідження моделей, що за своєю суттю нерівноважні, для саморушних частинок у біологічних системах (таких як косяки риб). Ці останні системи були досліджені за допомогою рівнянь скінченних різниць зі стохастичним шумом, як описано в попередньому розділі, але вони дають уявлення про інший вид «біологічно натхненної» системи.

Ці дослідження дають захопливі результати, хоча, як зазначалося раніше, зв'язок з реальною біологією дещо слабкий.

Вся проблема пошуку природних станів та шляхів згортання білка перетворилася на окрему галузь, внесок у яку робить фізика, математика та статистика на додаток до біології. Частково вона стала «мірником», за яким оцінюється ефективність різних методів щодо їхньої здатності знаходити низько розташований основний стан, що відповідає складеній конформації білкової моделі.

Спрощена модель HP на простій кубічній решітці вже є адекватною, щоб служити «випробувальним майданчиком». У цій моделі білок описується як гетерополімер, що складається з двох видів мономерів (гідрофобних, H, та полярних, P), які утворюють самоуникаючого блукання на решітці з привабливою взаємодією між гідрофобними сегментами, яку ми вважаємо одиницею. Основний стан, який часто вироджений, зазвичай має гідрофобне ядро та гідрофільну (полярну) зовнішню поверхню. Прикладом є модель HP з 64 мірами на квадратній решітці, основний стан якої показано на рис. 2.3.

Сортування суміші двох типів біологічних клітин було досліджено за допомогою модифікованої версії моделі Поттса з великими станами.

Модель описує колекцію з N клітин, визначаючи N вироджених спінів $\sigma(i, j) = 1, 2, ..., N$, де i, j ідентифікують вузол решітки. Комірка σ складається з усіх вузлів у решітці зі спіном a. Вводиться друга змінна, «тип» клітини τ, яка може мати різні значення, і може бути багато клітин кожного типу.

Пробний хід потім полягає у спробі змінити значення спіну в заданому вузлі на значення одного з його найближчих сусідів.

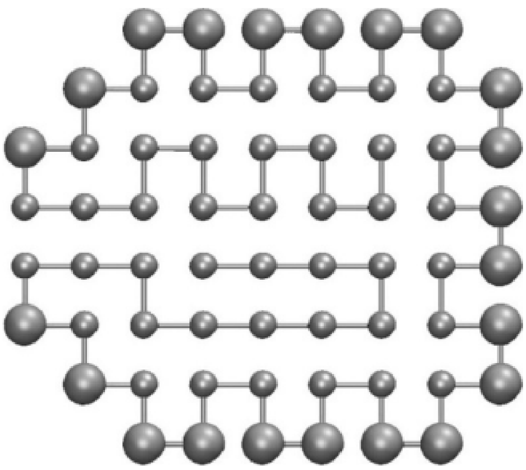

Рисунок 2.3 – Конфігурація основного стану для 64–мірної моделі HP

Цей модифікований гамільтоніан моделі Поттса включає поверхневі енергії між сусідніми типами клітин та обмеження площі (оскільки клітини не можуть зникнути).

Модель Поттса це модель у статистичній фізиці, що описує систему із взаємодією між сусідніми частинами, кожна з яких може перебувати в одному з станів q. Вона задається формулою:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{2.18}$$

де $J \in \mathbb{R}$ і δ_{uv} – символ Кронекера;

σ – конфігурація, що задається як функція $x \in V \to \sigma(x)$.

У подальшому дослідженні було виявлено, що рух клітин на великі відстані призводить до сортування з логарифмічним збільшенням масштабу довжини однорідних кластерів з часом. Нещодавня паралельна версія цього алгоритму дозволяє проводити масштабне моделювання морфогенезу клітин з 10^7 або більше клітинами.[11]

2.4 Інші застосування методу Монте-Карло

2.4.1 Метод Хошена-Копельмана

Метод Хошена-Копельмана являє собою розширений метод Монте-Карло. Він є простим і ефективним способом ідентифікації кластерів у решітці. Його реалізація полягає в послідовному проходженні рядків решітки та присвоєнні унікального номера кожній ділянці, що з'єднана з раніше перевіреними сайтами – тобто найближчими сусідами.

Цей процес добре ілюструється на прикладі першого рядка квадратної решітки. Однак складність прямого підходу стає очевидною під час розгляду наступних рядків, наприклад третього, де можуть виникати помилки маркування кластерів.

Звичайне рішення передбачає виконання другого проходу через решітку для виправлення таких помилок. Проте метод Хошена-Копельмана усуває ці неточності «на льоту», вводячи додаткову структуру даних – «мітки міток». Якщо під час аналізу два кластери виявляються пов'язаними, «мітка мітки» з більшим номером отримує посилання (від'ємне значення) на меншу, таким чином зберігаючи коректну ієрархію зв'язків між елементами.

Метод Хошена-Копельмана ефективно знаходить усі кластери на решітці, використовуючи мінімальну кількість пам'яті. Звісно, існує багато інших цікавих властивостей кластерів. Наприклад, можна виділити так званий «хребет» частину кластера, яка утворює зв'язаний шлях без звисаючих гілок між двома найвіддаленішими точками. Під час реалізації алгоритму Хошена-Копельмана ця інформація втрачається, однак інші типи пошукових алгоритмів такі як пошук у глибину або пошук у ширину дозволяють зберегти більше структурних деталей. Їхнім недоліком є те, що для цього доводиться жертвувати ефективністю використання пам'яті [7].

2.4.2 Визначення основного стану

Моделювання методом Монте-Карло для пошуку станів із низькою енергією. Метод Монте-Карло широко використовується для моделювання фізичних систем з метою знаходження станів із найнижчою можливою енергією. Для ілюстрації розглянемо класичну систему спінів Ізінга.

Початково вибирається деякий випадковий стан системи. Далі алгоритм проходить крізь усі вузли решітки, послідовно визначаючи зміну енергії при перевороті кожного спіна. Якщо перевертання зменшує енергію системи, спін змінює своє значення; інакше він залишається незмінним, після чого процес переходить до наступного вузла.

Таке моделювання можна повторювати, використовуючи різні початкові конфігурації, щоб перевірити, чи приводять вони до одного й того ж стану мінімальної енергії або до нових, більш енергетично вигідних станів.

Для систем зі складними енергетичними ландшафтами (де енергія змінюється при варіюванні певного параметра x) часто існує багато локальних мінімумів енергії, з яких важко вийти за допомогою лише одиночних переворотів спінів. Наприклад, антифазні домени – це великі області впорядкованих структур, які «зміщені» одна відносно одної й розділені межами з численними незадоволеними спінами.

У таких випадках доцільно вводити кілька одночасних спін-фліпів або інші алгоритмічні модифікації, щоб ефективніше долати ці «пастки» та усувати дефекти. У будь-якому разі важливо проводити моделювання, починаючи з різних початкових станів, і перевіряти, чи система сходиться до одного й того ж основного стану.

Особливий інтерес становлять задачі, де ландшафт вільної енергії є складним і нерівномірним: існує багато добре розділених мінімумів, через що система легко «застрягає» в локальному мінімумі. Такі ситуації обумовлені не лише енергетичними бар’єрами, а й ентропійними обмеженнями, що знижують імовірність переходу між конфігураціями.

Висновок за розділом 2

У розділі було проілюстровано, що метод Монте-Карло є універсальним і потужним інструментом для дослідження складних стохастичних систем у різних галузях.

Завдяки моделюванню випадкових процесів, метод Монте-Карло дає змогу:

– обчислення вартості фінансових витрат, моделюючи динаміку цін за стохастичними рівняннями;

– аналіз роботи систем масового обслуговування, визначаючи ймовірності станів, пропускну здатність, характеристики черг;

– дослід складних фізичних моделей – від білкових конформацій до клітинних взаємодій та моделей Поттса-Ізінга;

– виявлення і аналіз кластерів на решітках, використовуючи метод Хошена-Копельмана.

Наведені приклади ілюструє здатність методу Монте-Карло моделювати системи, які неможливо описати аналітично. Ефективність методу роблять його одним із ключових у сучасних наукових дослідженнях та у практичному застосуванні.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 PyCharm

PyCharm – це інтегроване середовище розробки для мови програмування Python. Надає засоби для аналізу коду, графічної ілюстрації результатів, інструмент для запуску юніт тестів.

Мова Python була обрана мовою програмування, оскільки має просту структуру реалізації, а доволі швидко аналізує велику кількість даних, що є основним для методу Монте-Карло.[28]

3.2 Алгоритм розв’язання задачі методом Монте-Карло

Розглядається задача ціни опціонів, яка зводиться до обчислення очікуваного дисконтованого виграшу за стохастичною моделлю руху ціни базового активу. Метод Монте-Карло дозволяє отримати оцінку справедливої вартості опціону за наступним алгоритмом:

а) Встановлення природи досліджуваної стохастичної величини. Вивчають природу досліджуваної стохастичної величини, її залежність від інших випадкових та детермінованих величин.

б) Імітація поведінки вхідних параметрів. Досліджують вхідні дані, їх емпіричний розподіл та можливість моделювання відомими розподілами.

в) Здійснення моделювання. На основі виявлених функціональних залежностей від вхідних величин, будують наближення шуканої випадкової величини в аналітичній чи алгоритмічній формі. Воно дозволяє отримати результат моделювання для конкретних вхідних даних.

г) Багаторазове повторення процесу та розрахунок емпіричних характеристик. Повторюючи моделювання багато разів, отримають емпіричну вибірку, за якою розраховують емпіричні характеристики: емпіричні функції розподілу а щільність, оцінки математичного сподівання, дисперсії та інших характеристик.

У математичному вигляді, алгоритм виглядає наступним чином:

Будуємо модель логнормального руху:

$$S_T = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} . \tag{3.1}$$

У дискретному вигляді:

$$dT = \frac{T}{NK} . \tag{3.2}$$

Середній приріст:

$$dm = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dT . \tag{3.3}$$

Стандартне відхилення:

$$ds = \sigma\sqrt{dT} . \tag{3.4}$$

3.3 Опис програми

Початкові данні які використовуються у програмі мають наступні значення:

– T – час до погашення (скільки років до виконання опціону);

– S_0 – початкова ціна активу;

– σ – стандартне відхилення відносної зміни ціни;

– r – ставка банку;

– K – ціна виконання опціону;

– NK – кількість кроків у методі Монте-Карло.

Програма бере початкові данні, які вводить користувач у окремий текстовий файл. У програмі реалізована можливість ведення декількох наборів даних водночас.

Після отримання даних, програма проводить розрахунок за моделлю Блека-Шоулса, яка прогнозує теоретичну ціну на опціони, розраховуючи, що опціон, який накладається неявним образом на базовий актив, є незмінним. Ці данні потрібні для порівняння із результатами отриманими за нашим методом.

На початкових даних будуємо метод Монте-Карло за наведеним алгоритмом.

Отримаємо графічну ілюстрацію, яка ілюструє різницю результатів застосування обох методів.

Висновки за розділом 3

У розділі наведена обрана мова програмування та обґрунтування, чому саме вона використовується для програмної реалізації. Також наведено основні етапи застосування методу Монте-Карло, як у вигляді математичних формул, так і у теоретичному вигляді.

Також у розділі розповідається яким чином відбувається програмна реалізація для визначення ціни опціонів за методом Монте-Карло із поясненнями означень початкових даних, які використовуються у програмній реалізації.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Надалі наведено три чисельних експерименти з оцінювання ціни європейського опціону методом Монте-Карло з подальшим порівнянням із аналітичним розв’язком за формулою Блека-Шоулса.

Різниця у цих експериментах полягає у використанні різних наборів початкових ринкових параметрів, для ілюстрації різного рівня стохастичної дисперсії моделі та, відповідно, до різної швидкості збіжності і точності методу порівняно із формулою Блека-Шоулса.

4.1 Результати за експериментом 1

Початкові данні:

$$T = 0.5,\ S_0 = 40,\ \sigma = 0.335,\ r = 0.25,\ K = 42,\ NK = 20.$$

Результат роботи програми зображено на рисунку 4.1.

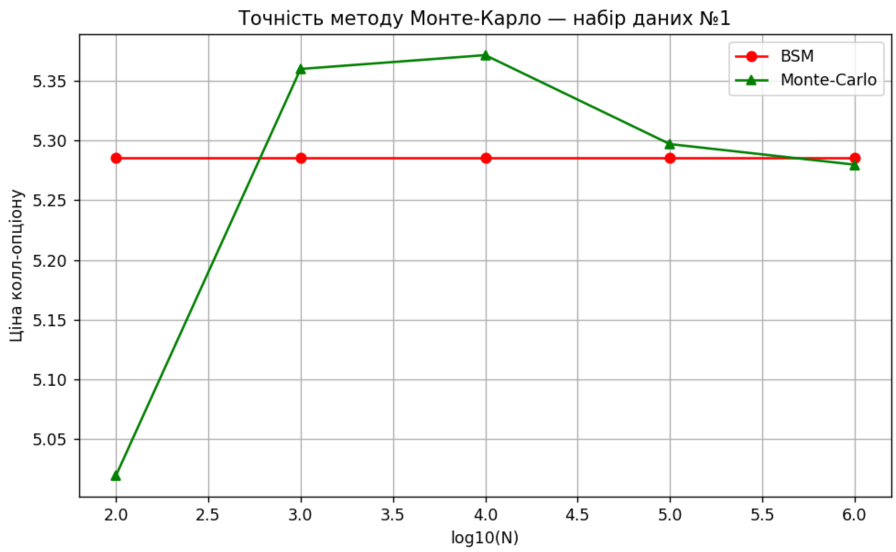

Рисунок 4.1 – Результати за даними 1

За рисунком 4.1 можемо побачити, що за формулою Блека-Шоулса ціна є стабільною $C = 5.286$.

У свою чергу, за методом Монте-Карло, ціна приймає наступні значення при відповідних значеннях N:

$$N = 100 : C = 5.028;$$
$$N = 1000 : C = 5.357;$$
$$N = 10000 : C = 5.37;$$
$$N = 100000 : C = 5.298;$$
$$N = 1000000 : C = 5.282.$$

4.2 Результати за експериментом 2

Початкові данні:

$$T = 1,\ S_0 = 50,\ \sigma = 0.25,\ r = 0.1,\ K = 55,\ NK = 20.$$

Результат роботи програми зображено на рисунку 4.2.

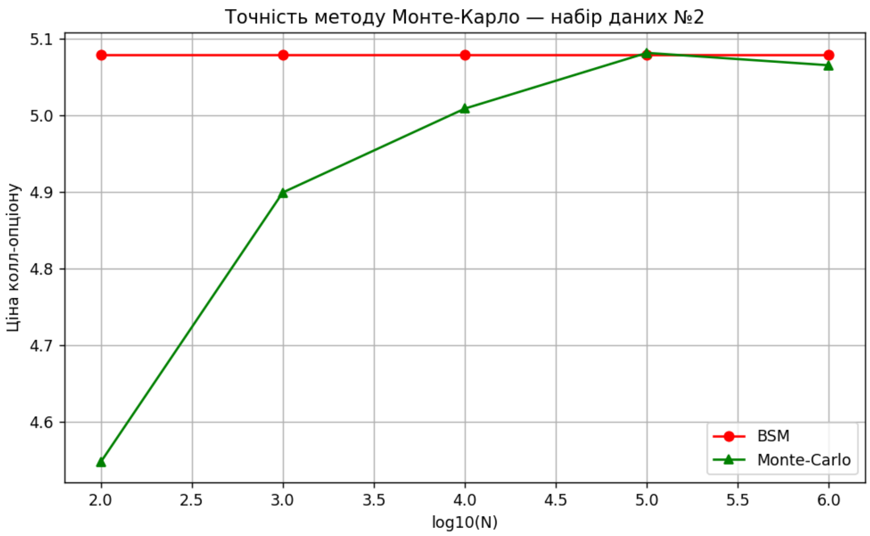

Рисунок 4.2 – Результати за даними 2

За рисунком 4.2 можемо побачити, що за формулою Блека-Шоулса ціна є стабільною $C = 5.078$.

У свою чергу, за методом Монте-Карло, ціна приймає наступні значення при відповідних значеннях N:

$$N = 100 : C = 4.554;$$
$$N = 1000 : C = 4.9;$$
$$N = 10000 : C = 5.005;$$
$$N = 100000 : C = 5.087;$$
$$N = 1000000 : C = 5.073.$$

4.3 Результати за експериментом 3

Початкові данні:

$$T = 0.75,\ S_0 = 30,\ \sigma = 0.4,\ r = 0.05,\ K = 32,\ NK = 15.$$

Результат роботи програми зображено на рисунку 4.3.

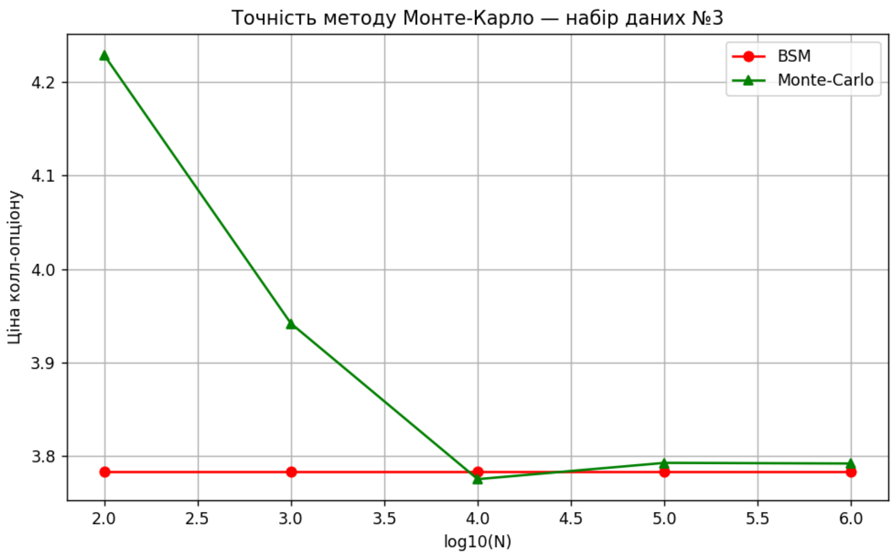

Рисунок 4.3 – Результати за даними 3

За рисунком 4.3 можемо побачити, що за формулою Блека-Шоулса ціна є стабільною $C = 3.780$.

У свою чергу, за методом Монте-Карло, ціна приймає наступні значення при відповідних значеннях N:

$$N = 100 : C = 4.231;$$
$$N = 1000 : C = 3.94;$$
$$N = 10000 : C = 3.778;$$
$$N = 100000 : C = 3.788;$$
$$N = 1000000 : C = 3.789.$$

Висновки за розділом 4

У результаті можемо побачити, що при малому значенні ітерацій, похибка досягає:

– для набору значень 1: $\varepsilon = 0.33$;

– для набору значень 2: $\varepsilon = 0.52$;

– для набору значень 3: $\varepsilon = 0.45$.

Що є суттєвим недоліком, однак із збільшенням кількості, значення похибки зменшується, і у результаті ми отримуємо більш точні значення, порівняно із формулою Блека-Шоулса, що і підтверджує що метод Монте-Карло є кращим, для аналізу результатів за великою кількістю експериментів.

ВИСНОВКИ

В роботі було розглянуто стохастичну модель динаміки вартості фінансового активу на основі геометричного броунівського руху, виведено аналітичні співвідношення для визначення математичного сподівання виплат за опціонами типу «колл» та «пут». На цій основі реалізовано алгоритм Монте-Карло імітацій для оцінки вартості опціонів шляхом статистичного усереднення результатів багатьох незалежних випробувань.

Результати показали, що в залежності від волатильності базового активу σ, зростає похибка при малій кількості експериментів. Чим більше значення параметру σ, тим більша похибка. Також у результаті експериментів можна зробити висновок, що зі збільшенням кількості симуляцій метод Монте-Карло демонструє стійку збіжність до аналітичного значення. Швидкість збіжності залежить від співвідношення базового активу до страйкової ціни.

Результати можна застосовувати для оцінки вартості похідних фінансових інструментів, моделювання поведінки фінансових ринків за наявності стохастичних факторів. Також для аналізу ризиків оптимізації інвестиційних стратегій, для навчальних і наукових цілей при вивченні методів статистичного моделювання та прикладної математики. Окрім цього, метод Монте-Карло можна використовувати у задачах перколяції, задачі самоуникаючого блукання і задачах радіоактивного розпаду.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Фармагей С. К. Метод Монте-Карло у задачі перколяції. *Комп'ютерно-інтегровані технології автоматизації технологічних процесів на транспорті та у виробництві* : матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених. Харків : ХНАДУ, 2025. С. 52-55.

2. Landau D. P., Binder K. Monte Carlo Simulations in Statistical Physics: study guide Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2014. 536 p.

3. Krauth W., Statistical Mechanics: Algorithms and Computations. Oxford: Oxford University Press, 2006. 343 p.

4. Байда Є. І. Метод Монте-Карло : навч.-метод. посіб. Харків : Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т», 2024. 74 с.

5. Прокопишин І. А. Розрахунок ціни опціонів методом Монте-Карло : метод. вказівки до лабораторної роботи № 3. Львів : ЛНУ ім. Ів. Франка, 2022. 24 с.

6. Літнарович Р. М. Дослідження точності апроксимації результатів психолого-педагогічного експерименту методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1 : Побудова істинної моделі. Рівне : РІВМУРОЛ, 2008. 46 с.

7. Біліченко В. В., Кужель В. П. :Моделювання технологічних процесів підприємств автомобільного транспорту: нав. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2017, 163 с.

8. Bielajew A. F., Fundamentals of the Monte Carlo method for neutral and charged particle transport. Ann Arbor, 2001. 172 p.

9. Томашевський В. М. Моделювання систем : підруч. Київ : Видавнича група ВНУ, 2005. 352 с.

10. Буртняк І. В. Імітаційне моделювання : навч.-метод. посіб. Івано-Франківськ, 2021. 97 с.

11. Бідняк М. Н. Виробничі системи на транспорті : теорія і практика. Вінниця : УНІВЕРСУМ, 2006. 176 с.

12. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика : навч.-метод. посіб. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. 494 с.

13. Ясинська Л. І., Ясинський В. К., Юрченко В. І. Імітаційне статистичне моделювання на ЕОМ : навч.-метод. посіб. Чернівці : Зелена Буковина, 1999. 345 с.

14. Байда Є. І. Основи математичної статистики та теорії ймовірності : навч.-метод. посіб. Харків : НТУ “ХПІ”, 2020. 37 с.

15. Нікуліна О. М. Северин В. П. Чисельні методи моделювання та оптимізації управління динамічними системами : навч.-метод. посіб. Харків: ХПІ, 2024. 144с.

16. Ладогубець Т. С. Методи оптимізації без використання похідних : навч.-метод. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 45с.

17. Сікора Я. Б. Методи оптимізації та дослідження операцій: навч.-метод. посіб. Житомир : ВДВ ЖДУ ім. Івана Франка, 2019. 148 с.

18. Веригіна І. В., Островська О. В., Сугакова О. В.. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч.-метод. посіб. Київ : КПІ ім Ігоря Сірковського, 2022. 254 с.

19. Wang H. Monte Carlo Simulation with Applications to Finance: study guide. Boca Raton : Taylir & Francis, 2022. 292 p.

20. Peter Jackel. Monte Carlo Methods in Finance : study guide. Chechester : Wiley, 2002. 232 p.

21. Mitchell F. J. Monte Carlo Simulation: Methods, Assessment and Applications : study guide. New York : Nova Publishers, 2017. 167 p.

22. Fearnhead P., Nemeth C., Oates C. Scalable Monte Carlo for Bayesian Learning : study guide. Cambridge : University of Cambridge, 2024. 250 p.

23. Sanz-Alonso D., Al-Ghattas O. A First Course in Monte Carlo Methods : study guide. Oxford : University of Oxford, 2024. 180 p.

24. Мокін В. Б., Дратований М. В. Наука про дані: машинне навчання та інтелектуальний аналіз даних : навч.-метод. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2024. 264 с.

25. Штовба С. Д., Козачко О. М. Machine learning: стартовий курс : навч.-метод. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2020. 81с.

26. Гороховатський В. О., Творошенко І. С. Методи інтелектуального аналізу та оброблення даних : навч.-метод. посіб. Харків : ХНУРЕ, 2021. 92 с.

27. Квєтний Р. Н., Іванчук Я. В., Богач І. В., Софина О. Ю., Барабан М. В. Методи та алгоритми комп'ютерних обчислень : навч.-метод. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2023. 280 с.

28. Васильєв О. М. Програмування в PYTHON Теорія і практика : навч.-метод. посіб. Київ : Видавництво Ліра-К, 2023. 462 с.

29. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика : навч.-метод. посіб. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. 494 с.

30. Malvin H. K., Paula A. W. Monte Carlo Methods : study guide. New York : Wiley, 2008. 217 p.