УДК519.6

**О.О. Литвин**

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна, loo71@bk.ru

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗАЛИШКУ НАБЛИЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ КУБІЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЗЛАМАЛА-ЖЕНІШЕКА НА ТРИКУТНИКУ

В даній роботі метод побудови явних інтегральних представлень залишкових членів вперше узагальнюється на випадок наближення диференційовних функцій інтерполяційними кубічними поліномами Зламала-Женішека.

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЗЛАМАЛА-ЖЕНІШЕКА НА ТРИКУТНИКУ, ЗАЛИШОК НАБЛИЖЕННЯ, ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМА ЗАЛИШКУ НАБЛИЖЕННЯ

## Вступ

Питання інтегрального представлення залишкових членів формул наближення диференційовних функцій було, є і буде одним з найскладніших в обчислювальній математиці. Інтегральні представлення цінні тим, що вони дають точну формулу для залишку наближення диференційовних функцій тим або іншим оператором наближення. В противагу сказаному слід відмітити, що відомі оцінки похибки наближення, які можуть бути отримані з інтегральних представлень, використовують деякі параметри, які задані не точно, а належать деякому інтервалу. Наприклад, оцінка наближення диференційовної функції $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ поліномом Тейлора степеня $n$ може бути отримана з інтегрального представлення залишкового члена похибки [див. приклад 1] у формі Лагранжа, Коші, Пеано, Шлемільха-Роше [1]. Нижче наведемо деякі відомі формули інтегрального представлення залишкових членів, які широко використовуються на практиці. Викладений загальний метод їх побудови використаний в даній роботі для побудови інтегрального представлення залишку наближення диференційовних функцій інтерполяційними кубічними поліномами Зламала-Женішека на довільному трикутнику.

## 1. Аналіз літературних джерел

В працях [1-14] сформульовані та доведені теореми існування та єдиності поліномів заданого степеня, які інтерполюють функцію $f(x,y)$ та її частинні похідні до заданого порядку у вершинах трикутника та у деяких точках на сторонах або всередині трикутника. В працях Ю.Н. Субботіна [9], [12], Байдакової Н.В. [13], Матвєєвої Ю.В. [14] досліджувалися оцінки наближення диференційовних функцій такими поліномами. Слід відмітити, що ці оцінки не використовували явних інтегральних представлень залишку наближення.

## 2. Відомі формули інтегрального представлення залишкових членів

1. Інтегральна формула для залишку наближення функції $f(x) \in C^n[a,b],\ n \ge 1$ поліномом Тейлора

$$T_{n-1}f(x) = \sum_{s=0}^{n-1} D^s f(x_0)\frac{(x-x_0)^s}{s!},$$

$$D^0 f(x_0) = f(x_0),\ D^s f(x_0) = \left.\frac{d^s f(x)}{dx^s}\right|_{x=x_0},\ s = 1,2,\ldots,$$

$$D^j T_{n-1} f(x)\Big|_{x=x_0} = D^j f(x)\Big|_{x=x_0},\ j = \overline{0,n-1}$$

за степенями має вигляд [14]

$$R_n f(x) = f(x) - T_{n-1}f(x) = \int_{x_0}^{x} D^n f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt =$$

$$= (x-x_0)^n \int_0^1 D^n f(x_0 + t(x-x_0))\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt.$$

Якщо в інтегралі зробити заміну

$$t = x_0 + (x-x_0) \Rightarrow dt = (x-x_0)du,$$
$$u = 0 \Rightarrow t = x_0,\ u = 1 \Rightarrow t = x.$$

то отримаємо інший вираз для залишку узагальнення якого будемо використовувати у двовимірному випадку

$$R_n f(x) = (x-x_0)^n \int_0^1 (D^n f)(x_0 + u(x-x_0))\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}du =$$

$$= \int_0^1 \frac{d^n f(x_0 + u(x-x_0))}{du^n}\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}du\,.$$

2. Інтегральна формула для залишку наближення функції $f(x) \in C^r[a,b],\ 1 \le r \le M$ інтерполяційним поліномом Лагранжа степеня $M-1$

$$L_{M-1}f(x) = \sum_{k=1}^{M} f(x_k)h_k(x),\ a = x_1 < \ldots < x_M = b,$$

$$h_k(x) = \prod_{i=1, i\ne k}^{M}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)},$$

$$L_{M-1}f(x)\big|_{x=x_i} = f(x)\big|_{x=x_i},\ i = \overline{1,M}$$

має вигляд [16]

$$R_M f(x) = f(x) - L_{M-1}f(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} h_k(x)\int_{x_k}^{x} D^r f(t)\frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt, 1 \le r \le M.$$

3. Інтегральна формула для залишку наближення функції $f(x) \in C^r[a,b], r \ge p \ge 2$ інтерполяційним

поліномом Ерміта степеня $n-1$, $n = Mp$

$$E_{n-1}f(x)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{p-1}D^s f(x_k)\frac{(x-x_k)^s}{s!}h_{k,s}(x),$$

$$h_{k,s}(x)=w_k(x)\left\{w_k(x)^{-1}\right\}_{x_k}^{p-s-1}, w_k(x)=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}(x-x_i)^p,$$

$$\left\{w_k(x)^{-1}\right\}_{x_k}^{p-s-1}=\sum_{j=0}^{p-s-1}D^j\left[w_k(x)^{-1}\right]\Big|_{x=x_k}\frac{(x-x_k)^j}{j!},$$

$$D^j E_{n-1}f(x)\Big|_{x=x_i}=D^j f(x)\Big|_{x=x_i}, i=\overline{1,M}, j=\overline{0,p-1}$$

має вигляд [15]

$$R_M f(x)=f(x)-E_{M-1}f(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{p-1}\frac{(x-x_k)^s}{s!}h_{k,s}(x)\int_{x_k}^{x}D^r f(t)\frac{(x_k-t)^{r-s-1}}{(r-s-1)!}dt, p\le r\le n,$$

$$h_{k,s}(x)=\prod_{j=1,j\neq k}^{M}(x-x_j)^p\left\{\prod_{j=1,j\neq k}^{M}(x-x_j)^{-p}\right\}\Bigg|_{x_k}^{(p-s-1)},$$

$$\left\{g(x)\right\}\Big|_a^{(p-s-1)}=\sum_{s=0}^{p-s-1}D^s g(a)\frac{(x-a)^s}{s!}.$$

### 3. Загальний метод побудови вказаних формул

Цей метод можна сформулювати так. Встановлюється, що інтерполяційні формули Лагранжа та Ерміта є точними на поліномах степеня $n-1$. Наступним кроком методу є запис кожної величини $f(x_k)$ та $D^s f(x_k)$ за допомогою формули Тейлора у вигляді

$$f(x_k)=\sum_{j=0}^{r-1}D^j f(x)\frac{(x_k-x)^j}{j!}+$$
$$+\int_0^1\frac{d^r f(x_k+t(x-x_k))}{dt^r}\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt, k=\overline{1,n}.$$

Підставляючи ці формули у формулу Лагранжа і враховуючи, що вона є точною на поліномах степеня $n-1$, приходимо до написаної в прикладі 2 формули для залишку. Аналогічно, при доведенні відповідної формули для залишку наближення поліномами Ерміта, використовуються такі формули Тейлора

$$D^s f(x_k)=\sum_{j=0}^{r-s-1}D^{s+j}f(x)\frac{(x_k-x)^j}{j!}+$$
$$+\int_0^1\frac{d^r f(x_k+t(x-x_k))}{dt^r}\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt, k=\overline{1,M}.$$

### 4. Постановка задачі

Для побудови кубічних інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека на трикутнику потрібно знати значення функції у вершинах і в центрі трикутника та значення перших частинних похідних у вершинах трикутника. Тому задача полягає у побудові точної формули для інтегрального представлення залишку наближення функцій вказаними інтерполяційними поліномами, метод побудови якої дозволив би знайти оцінки похибки для функцій $r$ раз диференційовних ($2\le r\le 4$). Описаний вище загальний метод побудови явних інтегральних представлень залишкових членів вперше узагальнюється на випадок наближення диференційовних функцій інтерполяційними кубічними поліномами Зламала-Женішека.

### 5. Основні твердження даної роботи

Вважаємо заданими систему точок $A_k(X_k,Y_k)\in D=[0,1]^2, k=1,\dots,M$, яку ми тріангулюємо – розбиваємо на трикутники $T_{pqr}\subset D$ з вершинами $A_p,A_q,A_r$, та значення

$$D^\alpha f(X_k,Y_k), 0\le|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\le 1, f(X_{pqr},Y_{pqr}),$$

$$X_{pqr}=\frac{X_p+X_q+X_r}{3}, Y_{pqr}=\frac{Y_p+Y_q+Y_r}{3}.$$

Наведемо явні формули для базисних поліномів третього степеня поліноміальної кубічної інтерполяції Зламала-Женішека на трикутнику $T_{pqr}\subset D$ (див. [16])

$$w_{p,q}(x,y)=\begin{vmatrix}x & y & 1\\ X_p & Y_p & 1\\ X_q & Y_q & 1\end{vmatrix}=$$
$$=(y-Y_p)(X_q-X_p)-(Y_q-Y_p)(x-X_p),$$

$$h_{pqr}(x,y)=$$
$$=\frac{w_{p,q}(x,y)}{w_{p,q}(X_{pqr},Y_{pqr})}\frac{w_{q,r}(x,y)}{w_{q,r}(X_{pqr},Y_{pqr})}\frac{w_{r,p}(x,y)}{w_{r,p}(X_{pqr},Y_{pqr})},$$

$$h_{r,\beta}^{pqr}(x,y)=$$
$$=\frac{(x-X_r)^{\beta_1}(y-Y_r)^{\beta_2}}{\beta!}\cdot w_{p,q}^2(x,y)\cdot\left\{\frac{1}{w_{p,q}^2(x,y)}\right\}_{(X_r,Y_r)}^{1-|\beta|},$$

де

$$\left\{\frac{1}{u_{p,q}(x,y)}\right\}_{(X_r,Y_r)}^{1-|\beta|}=$$
$$=\sum_{0\le|\gamma|\le 1-|\beta|}\left(D^\gamma\frac{1}{u_{p,q}(x,y)}\right)_{(X_r,Y_r)}\frac{(x-X_r)^{\gamma_1}(y-Y_r)^{\gamma_2}}{\gamma!},$$
$$\gamma!=\gamma_1!\gamma_2!$$

Ці функції є поліномами третього степеня з властивостями

$$h_{pqr}(X_{pqr},Y_{pqr})=1, \tag{1}$$

$$D^\gamma h_{pqr}(X_i,Y_i)=0, 0\le|\gamma|\le 1, i\in\{p,q,r\}, \tag{2}$$

$$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2), |\gamma|=\gamma_1+\gamma_2, D^\gamma=\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}}, D^{0,0}h_{p,q,r}=h_{p,q,r}$$

та

$$h_{k,\beta}^{pqr}(X_\ell,Y_\ell)=\delta_{k,\ell}\delta_{0,|\beta|}; k,\ell\in\{p,q,r\},$$
$$0\le|\beta|\le 1, \beta=(\beta_1,\beta_2), |\beta|=\beta_1+\beta_2, \tag{3}$$
$$D^\gamma h_{k,\beta}^{pqr}(X_\ell,Y_\ell)=\delta_{k,\ell}\delta_{\gamma_1,\beta_1}\delta_{\gamma_2,\beta_2},$$
$$|\gamma|=1, \gamma=(\gamma_1,\gamma_2), |\gamma|=\gamma_1+\gamma_2.$$

Тобто вони є базисними функціями при побудові операторів двовимірної кубічної інтерполяції на кожному трикутнику $T_{pqr} \subset D$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що довільний трикутник має вершини $A_1, A_2, A_3$ . В цьому випадку оператор [15]

$$Of(x,y) = \sum_{k=1}^{3} h_{k,0,0}(x,y) f(X_k, Y_k) + \sum_{k=1}^{3} h_{k,1,0}(x,y) f^{(1,0)}(X_k, Y_k) + \sum_{k=1}^{3} h_{k,0,1}(x,y) f^{(0,1)}(X_k, Y_k) + \Big[ f(X_{pqr}, Y_{pqr}) - \sum_{k=1}^{3} h_{k,0,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) f(X_k, Y_k) - \sum_{k=1}^{3} h_{k,1,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) f^{(1,0)}(X_k, Y_k) - \sum_{k=1}^{3} h_{k,0,1}(X_{pqr}, Y_{pqr}) f^{(0,1)}(X_k, Y_k) \Big] h(x,y)$$

є оператором поліноміальної кубічної інтерполяції Зламала-Женішека на трикутнику з властивостями

$$D^{\alpha} Of(X_p, Y_p) = D^{\alpha} f(X_p, Y_p), p = 1,2,3;$$
$$0 \le |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \le 1, Of(X_{pqr}, Y_{pqr}) = f(X_{pqr}, Y_{pqr}), \quad (4)$$
$$X_{pqr} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, Y_{pqr} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

Згідно з теорією [2-5] ці оператори є точними на кубічних поліномах 3-го степеня

$$Of(x,y) = f(x,y) \quad \forall f(x,y) = \sum_{0 \le |\beta| \le 3} a_{\beta} x^{\beta_1} y^{\beta_2} . \quad (5)$$

Для доведення цього достатньо відмітити, що поліном $\sum_{0 \le |\beta| \le 3} a_{\beta} x^{\beta_1} y^{\beta_2}$ є лінійною комбінацією десяти лінійно-незалежних функцій $x^{\beta_1} y^{\beta_2}, 0 \le |\beta_1 + \beta_2| \le 3$ і система лінійних алгебраїчних рівнянь (4) для знаходження невідомих коефіцієнтів $a_{\beta}$ має розв'язок і цей розв'язок єдиний. Існування цього розв'язку випливає з того, що кубічний поліном $Of(x,y)$ задовольняє умови (4). Крім того, з припущення, що існує два таких інтерполяційних поліноми, які задовольняють умови (4), випливає, що їх різниця задовольняє однорідним інтерполяційним умовам, тобто обидва такі поліноми повинні бути однаковими. Таким чином, з тотожності (5) можна написати такі властивості вказаних операторів.

Властивість 1. $Oc = c \quad \forall c \in R$, тобто оператор $Of$ є точним на сталих.

Наслідок 1. $\sum_{k=1}^{3} h_{k,0,0}(x,y) \equiv 1, (x,y) \in R^2$ .

Наслідок 2. $\sum_{k=1}^{3} h_{k,0,0}(x,y) f(x,y) + \Big[ f(x,y) - \sum_{k=1}^{3} h_{k,0,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) f(x,y) \Big] h(x,y) = f(x,y)$ .

Властивість 2. Якщо $f(x,y) = x^m, 1 \le m \le 3$ , то

$$\sum_{k=1}^{3} \Big[ h_{k,0,0}(x,y) X_k^m + h_{k,1,0}(x,y) m X_k^{m-1} \Big] + \Big\{ X_{pqr}^m - \sum_{k=1}^{3} \Big[ h_{k,0,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) X_k^m + h_{k,1,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) m X_k^{m-1} \Big] \Big\} \times h(x,y) = x^m .$$

Властивість 3. Якщо $f(x,y) = y^n, 1 \le n \le 3$ , то

$$\sum_{k=1}^{3} \Big[ h_{k,0,0}(x,y) Y_k^n + h_{k,0,1}(x,y) n Y_k^{n-1} \Big] + \Big\{ Y_{pqr}^n - \sum_{k=1}^{3} \Big[ h_{k,0,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) Y_k^n + h_{k,0,1}(X_{pqr}, Y_{pqr}) n Y_k^{n-1} \Big] \Big\} \times h(x,y) = y^n .$$

Властивість 4. Якщо

$f(x,y) = x^m y^n, 1 \le m + n \le 3, m \ge 1, n \ge 1$ , то

$$\sum_{k=1}^{3} \Big[ h_{k,0,0}(x,y) X_k^m Y_k^n + h_{k,1,0}(x,y) m X_k^{m-1} Y_k^n + h_{k,0,1}(x,y) X_k^m n Y_k^{n-1} \Big] + \Big\{ X_{pqr}^m Y_{pqr}^n - \sum_{k=1}^{3} \Big[ h_{k,0,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) X_k^m Y_k^n + h_{k,1,0}(X_{pqr}, Y_{pqr}) m X_k^{m-1} Y_k^n + h_{k,0,1}(X_{pqr}, Y_{pqr}) X_k^m n Y_k^{n-1} \Big] \Big\} \times h(x,y) \equiv x^m y^n ,$$

$$O(x-u)^{\alpha_1} (y-v)^{\alpha_2} \Big|_{u=x, v=y} = 0, \quad 1 \le \alpha_1 + \alpha_2 \le 3.$$

Ці властивості дозволяють довести наступну теорему.

**Теорема 1.** Для залишку $Rf(x,y) = (I - O) f(x,y)$ наближення функції $f(x,y) \in C^4(\overline{T}_{pqr})$ справедливе таке інтегральне представлення

$$R(x,y) = R00(x,y) + R10(x,y) + R01(x,y) + Rsr(x,y),$$

де

$$R00 f(x,y) = \sum_{v=1}^{3} h(x,y,p,q,r,0,0,v) \times \int_0^1 \frac{\partial^4 f((x,y) + t(x_v - x, y_v - y))}{\partial t^4} \frac{(1-t)^3}{3!} dt,$$

$$R10 f(x,y) = \sum_{v=1}^{3} h(x,y,p,q,r,1,0,v) \times \int_0^1 \frac{\partial^3 f^{(1,0)}((x,y) + t(x_v - x, y_v - y))}{\partial t^3} \frac{(1-t)^2}{2!} dt,$$

$$R01 f(x,y) = \sum_{v=1}^{3} h(x,y,p,q,r,0,1,v) \times \int_0^1 \frac{\partial^3 f^{(0,1)}((x,y) + t(x_v - x, y_v - y))}{\partial t^3} \frac{(1-t)^2}{2!} dt,$$

$$Rsrf(x,y) = h(x,y) \Bigg[ \int_0^1 \frac{\partial^4 f((x,y) + t(X_{sr} - x, Y_{sr} - y))}{\partial t^4} \frac{(1-t)^3}{3!} dt - \bar{R}00 f(x,y) - \bar{R}10 f(x,y) - \bar{R}01 f(x,y) \Bigg],$$

де

$$\bar{R}00f(x,y)=\sum_{v=1}^{3}h(X_{sr},Y_{sr},p,q,r,0,0,v)\times$$
$$\times\int_0^1\frac{\partial^3 f((x,y)+t(x_v-x,y_v-y))}{\partial t^3}\frac{(1-t)^3}{3!}dt,$$
$$\bar{R}10f(x,y)=\sum_{v=1}^{3}h(X_{sr},Y_{sr},p,q,r,1,0,v)\times$$
$$\times\int_0^1\frac{\partial^3 f^{(1,0)}((x,y)+t(x_v-x,y_v-y))}{\partial t^3}\frac{(1-t)^2}{2!}dt,$$
$$\bar{R}01f(x,y)=\sum_{v=1}^{3}h(X_{sr},Y_{sr},p,q,r,0,1,v)\times$$
$$\times\int_0^1\frac{\partial^3 f^{(0,1)}((x,y)+t(x_v-x,y_v-y))}{\partial t^3}\frac{(1-t)^2}{2!}dt.$$

*Доведення*. Замінимо значення функції $f(x,y)\in C^4\left(\overline{T}_{pqr}\right)$ та значення її частинних похідних першого порядку у кутових точках і в центрі трикутника відповідними формулами Тейлора

$$f(X_k,Y_k)=\sum_{0\le s+t\le r}D^{s,t}(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+$$
$$+\int_0^1\frac{\partial^{r+1}}{\partial t^{r+1}}f(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\frac{(1-t)^r}{r!}dt,$$
$$1\le r\le 4,$$

$$f(X_k,Y_k)=\sum_{0\le s+t\le 3}D^{s,t}f(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+$$
$$+\int_0^1\frac{\partial^4}{\partial t^4}f(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\frac{(1-t)^3}{3!}dt,$$

$$f^{(1,0)}(X_k,Y_k)=\sum_{0\le s+t\le 2}D^{1+s,t}f(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+$$
$$+\int_0^1\frac{\partial^3}{\partial t^3}f^{(1,0)}(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\times\frac{(1-t)^2}{2!}dt,$$

$$f^{(0,1)}(X_k,Y_k)=\sum_{0\le s+t\le 2}D^{s,t+1}f(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+$$
$$\int_0^1\frac{\partial^3}{\partial t^3}f^{(0,1)}(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\times\frac{(1-t)^2}{2!}dt,$$

$$f(X_{pqr},Y_{pqr})=$$
$$=\sum_{0\le s+t\le 3}D^{s,t}f(x,y)\frac{(X_{pqr}-x)^s(Y_{pqr}-y)^t}{s!t!}+$$
$$+\int_0^1\frac{\partial^4}{\partial u^4}f(x+u(X_{pqr}-x),y+u(Y_{pqr}-y))\frac{(1-t)^3}{3!}dt.$$

В результаті отримаємо

$$Of(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\left\{\sum_{0\le\alpha+\beta\le 1}\left[h_{k,0,0}(x,y)-\right.\right.$$
$$\left.-h_{k,0,0}(X_{pqr},Y_{pqr})h(x,y)\right]\times$$
$$\times\left[\sum_{0\le s+t\le 3}D^{s,t}f(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^1\frac{\partial^4}{\partial t^4}f(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\frac{(1-t)^3}{3!}dt\right]\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left\{\sum_{0\le\alpha+\beta\le 1}\left[h_{k,1,0}(x,y)-h_{k,1,0}(X_{pqr},Y_{pqr})h(x,y)\right]\times\right.$$
$$\times\left[\sum_{0\le s+t\le 2}D^{s,t}f^{(1,0)}(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^1\frac{\partial^3}{\partial t^3}f^{(1,0)}(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\frac{(1-t)^2}{2!}dt\right]\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left\{\sum_{0\le\alpha+\beta\le 1}\left[h_{k,1,0}(x,y)-h_{k,1,0}(X_{pqr},Y_{pqr})h(x,y)\right]\times\right.$$
$$\times\left[\sum_{0\le s+t\le 2}D^{s,t}f^{(0,1)}(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^1\frac{\partial^3}{\partial t^3}f^{(0,1)}(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\frac{(1-t)^2}{2!}dt\right]\right\}+$$
$$+h(x,y)\left\{\sum_{0\le s+t\le 3}D^{s,t}f(x,y)\frac{(X_{pqr}-x)^s(Y_{pqr}-y)^t}{s!t!}+\right.$$
$$\left.+\int_0^1\frac{\partial^4}{\partial t^4}f(x+t(X_{pqr}-x),y+t(Y_{pqr}-y))\frac{(1-t)^3}{3!}dt\right\}.$$

Перепишемо цю формулу у вигляді

$$Of(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\left\{f(x,y)+\right.$$
$$+\sum_{1\le s+t\le 3}D^{s,t}f(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+$$
$$\left.+\int_0^1\frac{\partial^4}{\partial t^4}f(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\frac{(1-t)^3}{3!}dt\right\}\times$$
$$\times\left[h_{k,0,0}(x,y)-h_{k,0,0}(X_{pqr},Y_{pqr})h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left\{\sum_{0\le s+t\le 2}D^{1+s,t}f(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+\right.$$
$$\left.+\int_0^1\frac{\partial^3}{\partial t^3}f^{(1,0)}(x+t(X_k-x),y+t(Y_k-y))\frac{(1-t)^2}{2!}dt\right\}\times$$
$$\times\left[h_{k,1,0}(x,y)-h_{k,1,0}(X_{pqr},Y_{pqr})h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left\{\sum_{0\le s+t\le 2}D^{s,t+1}f(x,y)\frac{(X_k-x)^s(Y_k-y)^t}{s!t!}+\right.$$

$$+\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f^{(0,1)}\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^2}{2!}dt\Bigg\}\times$$
$$\times\left[h_{k,0,1}(x,y)-h_{k,0,1}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+h(x,y)\times$$
$$\times\Bigg\{f(x,y)+\sum_{1\le s+t\le 3} D^{s,t} f(x,y)\frac{\left(X_{pqr}-x\right)^s\left(Y_{pqr}-y\right)^t}{s!t!}+$$
$$+\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f\left(x+t\left(X_{pqr}-x\right), y+t\left(Y_{pqr}-y\right)\right)\frac{(1-t)^3}{3!}dt\Bigg\}.$$

В результаті для залишку наближення отримаємо формулу

$$f(x,y)-Of(x,y)=f(x,y)-f(x,y)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{3}\left[h_{k,0,0}(x,y)-h_{k,0,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]-$$
$$-\sum_{1\le s+t\le 3} D^{s,t} f(x,y)\sum_{k=1}^{3}\Bigg\{\frac{\left(X_k-x\right)^s\left(Y_k-y\right)^t}{s!t!}\times$$
$$\times\left[h_{k,0,0}(x,y)-h_{k,0,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+D^{1,0}\frac{\left(X_k-x\right)^s\left(Y_k-y\right)^t}{s!t!}\times$$
$$\times\left[h_{k,1,0}(x,y)-h_{k,1,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+D^{0,1}\frac{\left(X_k-x\right)^s\left(Y_k-y\right)^t}{s!t!}\times$$
$$\times\left[h_{k,0,1}(x,y)-h_{k,0,1}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+\frac{\left(X_{pqr}-x\right)^s\left(Y_{pqr}-y\right)^t}{s!t!}h(x,y)\Bigg\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^3}{3!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,0,0}(x,y)-h_{k,0,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f^{(1,0)}\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^2}{2!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,1,0}(x,y)-h_{k,1,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f^{(0,1)}\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^2}{2!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,0,1}(x,y)-h_{k,0,1}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+h(x,y)\times$$
$$\times\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f\left(x+t\left(X_{pqr}-x\right), y+t\left(Y_{pqr}-y\right)\right)\frac{(1-t)^3}{3!}dt.$$

Враховуючи, що

$$f(x,y)-$$
$$-f(x,y)\sum_{k=1}^{3}\left[h_{k,0,0}(x,y)-h_{k,0,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]=0,$$

та групуючи доданки в останній формулі, отримаємо

$$f(x,y)-Of(x,y)=$$
$$=\sum_{1\le s+t\le 3} D^{s,t} f(x,y) O\left(\left(x-u\right)^s\left(y-v\right)^t\right)\Big|_{u=x,v=y}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^3}{3!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,0,0}(x,y)-h_{k,0,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f^{(1,0)}\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^2}{2!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,1,0}(x,y)-h_{k,1,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f^{(0,1)}\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^2}{2!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,0,1}(x,y)-h_{k,0,1}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+h(x,y)\times$$
$$\times\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f\left(x+t\left(X_{pqr}-x\right), y+t\left(Y_{pqr}-y\right)\right)\frac{(1-t)^3}{3!}dt.$$

Таким чином, для залишку наближення отримаємо

$$f(x,y)-Of(x,y)=$$
$$=\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^3}{3!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,0,0}(x,y)-h_{k,0,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f^{(1,0)}\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^2}{2!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,1,0}(x,y)-h_{k,1,0}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f^{(0,1)}\left(x+t\left(X_k-x\right), y+t\left(Y_k-y\right)\right)\frac{(1-t)^2}{2!}dt\times$$
$$\times\left[h_{k,0,1}(x,y)-h_{k,0,1}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)h(x,y)\right]+h(x,y)\times$$
$$\times\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f\left(x+t\left(X_{pqr}-x\right), y+t\left(Y_{pqr}-y\right)\right)\frac{(1-t)^3}{3!}dt.$$

Теорему 1 доведено.

## Висновки

Тут у всіх випадках під знаком інтегралів приймають участь похідні $f^{(\alpha)}, |\alpha|=r=4$. Але і для $|\alpha|=r=2$ або $|\alpha|=r=3$ таким методом теж можна отримати інтегральне зображення залишку.

В подальшому планується знайти оцінку похибки для випадку, коли $f(x,y)\in C^m\left(\overline{T}_{pqr}\right), m=2,3,4$ та порівняти отримані результати з оцінками, отриманими іншими авторами без використання інтегральних формул для залишку.

Відмітимо, що для $|\alpha|=r=2$ та для $|\alpha|=r=3$ таких оцінок взагалі нема.

**Список літератури: 1.** Математическая энциклопедия: Гл.ред. И.М.Виноградов, [Текст] / т.5. Слу-Я –М., "Советская энциклопедия", 1984. -1248 стб., ил. **2.** *Zlamal, M.*

A finite element procedure of the second order accuracy [Текст] / M. Zlamal. // Numer. Math., 14 (1970), 394-402. **3.** *Zenisek, A.* Interpolation polynomials on the triangle [Текст] / A. Zenisek. // Numer. Math. 1970. Vol. 15. S. 283-296. **4.** *Zlamal, M.* Mathematical aspect of the finite element method [Текст] / M. Zlamal., A. Zenisek. // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method (V. Kolar et. al. eds.) Praha: Acad. VED. 1971. P. 15-39. **5.** *Варга, Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе: Пер. с англ. [Текст] / Р. Варга. – М.: Мир, 1974. – 126 с. **6.** *Babushka, I.* On the engle condition in the finite element method [Текст] / I. Babushka, A.K. Aziz. // SIAM J. Numer. Anal. 1976. V. 13. №2. P. 214-226. **7.** *Bramble, J.H.* Triangular elements in the finite element method [Текст] / J.H. Bramble, M. Zlamal. // Math. Comp. 1970. v. 24. P. 809-820. **8.** *Субботин, Ю.Н.* Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции [Текст] / Ю.Н. Субботин // Труды МИАН СССР, 1989. – Т. 189. – С. 117-137. **9.** *Латыпова, Н.В.* Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике [Текст] / Н.В. Латыпова // Вестн. Удмрт. ун-та. Сер. Математика. – 2003. – С. 3-10. **10.** *Zenisek, A.* Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type [Текст] / A. Zenisek // Math. Comp. 1995. V. 64. №211 P. 929-941. **11.** *Субботин, Ю.Н.* Новый кубический элемент в МКЭ [Текст] / Ю.Н. Субботин // Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: УрО РАН. – 2005. – V. 11, №2. – С. 120-130. **12.** *Байдакова, Н.В.* Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике [Текст] / Н.В. Байдакова // Труды Института математики и механики. Теории функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: УрО РАН. 2005. V. 11. №2. P. 47-52. **13.** *Матвеева, Ю.В.* Об интерполяции кубическими многочленами третей степени на треугольнике с использованием смешанных производных [Текст] / Ю.В. Матвеева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. математика. Механика. Информатика. – 2007. – Т. 7, Вып. 1. – С. 28-32. **14.** *Никольский, С.М.* Курс математического анализа. [Текст] / С.М. Никольский // М.: Наука, 1973. — Том 1. – 431 с. **15.** *Литвин, О.М.* Побудова 2D кубічних інтерполяційних сплайнів класу $C^1(D)$ [Текст] / О.М. Литвин, О.О. Литвин, О.І. Денисова // Вісник Запорізького університету, 2011. – №1. – С. 66-74. **16.** *Литвин, О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. [Текст] / О.М. Литвин – К.: Наукова думка, 2005. – 333 с.

***Поступила до редколегії 12.11.2012***

УДК 519.6

**Интегральное представление остатка приближения дифференцируемых функций интерполяционными кубическими полиномами Зламала-Женишека** / О.О. Литвин // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. – 2013. – № 1 (80). – С. 62-67.

Впервые обобщается метод построения явных интегральных представлений остаточных членов на случай приближения дифференцируемых функций интерполяционными кубическими полиномами Зламала-Женишека.

Библиогр.: 16 назв.

UDC 519.6

**Integral representation of the balance approximation of differentiable functions by interpolating cubic polynomials Zlamals-Zhenisheks** / O.O. Lytvyn// Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2013. – № 1 (80). – P. 62-67.

First generalized method of constructing explicit integral representations of the remainder terms in the case of approximation of differentiable functions by interpolating cubic polynomials Zlamala-Zhenisheka.

Ref.: 16 items.