

О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕНЫ СТРУКТУРЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ

В. А. Каменев

Харьков

Еще не существует общей теории анализа и синтеза нелинейных систем регулирования любого порядка. Однако разработаны приближенные методы исследования, одним из которых является метод гармонического баланса. Этот метод может быть применен для исследования систем с переменной структурой [1, 2, 3].

Рассмотрим более общий случай, характеризующийся наличием постоянного смещения. Статическая характеристика, а также характер входного и выходного сигнала показаны на рис. 1.

При разложении нелинейной функции $F(x, \rho x)$ в ряд Фурье появляется постоянная составляющая, вследствие чего гармоническая линейризация нелинейности принимает новую форму [4]:

$$F(x, \rho x) = F^0(x^0, \bar{A}, \omega) + a(\bar{A}, x^0, \omega)x^* + \frac{b(\bar{A}, x^0, \omega)}{\omega}\rho x^* + \quad (1)$$

+ высшие гармоники, где

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + \bar{A} \sin \varphi, \bar{A} \omega \cos \varphi) d\varphi; \quad (2)$$

$$a = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + \bar{A} \sin \varphi, \bar{A} \omega \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi; \quad (3)$$

$$b = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + \bar{A} \sin \varphi, \bar{A} \omega \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi; \quad (4)$$

x^0 — постоянное смещение;
 A — амплитуда автоколебаний;
 ω — частота автоколебаний;
 φ — текущая координата угла.

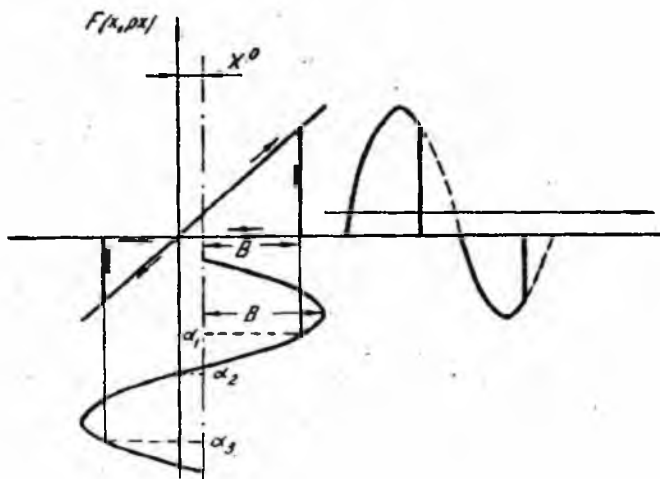


Рис. 1. Статическая характеристика переключающего элемента, характер входного и выходного сигналов.

Из рис. 1 видно, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \pi - \arcsin \frac{B}{A}, \\ \alpha_2 &= \pi + \arcsin \frac{x^0}{A}, \\ \alpha_3 &= 2\pi - \arcsin \frac{B}{A}. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем называть углом переключения структуры $\alpha = \arcsin \frac{B}{A}$. Имея в виду, что

$$F(x, px) = \begin{cases} A \sin \varphi & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \alpha_1 \\ 0 & \text{при } \alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_2 \\ A \sin \varphi & \text{при } \alpha_2 \leq \varphi \leq \alpha_3 \\ 0 & \text{при } \alpha_3 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

и учитывая значения (5), формулы (2), (3) и (4) после интегрирования можно записать в виде

$$F^0 = \frac{A}{2\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A} \right)^2} \right], \quad (6)$$

$$a = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha - \arcsin \frac{x^\circ}{\bar{A}} + \frac{x^\circ}{\bar{A}} \times \sqrt{1 - \left(\frac{x^\circ}{\bar{A}} \right)^2} \right], \quad (7)$$

$$b = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{B}{\bar{A}} \right)^2 - \left(\frac{x^\circ}{\bar{A}} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

В случае, если $X^\circ = 0$, формулы (6), (7) и (8) принимают вид

$$F^\circ = 0, \quad a = \frac{1}{\pi} \left(\pi - \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right), \quad (9)$$

$$b = \frac{1}{\pi} \left(\frac{B}{\bar{A}} \right)^2. \quad (10)$$

Графики, построенные по формулам (9), (10) в зависимости от отношения $\frac{B}{\bar{A}}$, приведены на рис. 2.

Для исследования влияния угла переключения структуры на устойчивость системы регулирования рассмотрим дифференциальное уравнение пятого порядка. Чтобы определить периодическое решение, характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы запишем в виде

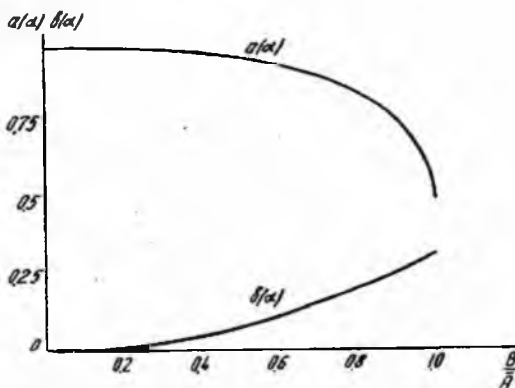


Рис. 2. Зависимость коэффициентов гармонической линеаризации a и b от угла переключения структуры.

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 \left[a(\alpha, \omega) + \frac{b(\alpha, \omega)}{\omega} p \right] = 0, \quad (11)$$

где $a_0 - a_5$ — коэффициенты.

Для отыскания параметров $\bar{A}$ и ω искомого синусоидального решения положим $p = j\omega$ и выделим действительную и мнимую части:

$$X(\alpha, \omega) = a_1 \omega^4 - a_3 \omega^2 + a_5 a(\alpha, \omega) = 0, \quad (12)$$

$$Y(\alpha, \omega) = a_2 \omega^3 - a_0 \omega^5 - \left[a_4 + a_5 \frac{b(\alpha, \omega)}{\omega} \right] \omega = 0.$$

Коэффициент усиления системы a_5 может быть определен из системы уравнений (12) по формуле

$$a_5 = \frac{\omega^3 (a_3 - a_1 \omega^2)}{a(\alpha, \omega)}. \quad (13)$$

Используя (13), можно построить зависимость коэффициента усиления системы (в режиме автоколебаний) от угла переключения структуры α . Чтобы найти частоту автоколебаний, решим систему уравнений (12) относительно отношения

$$\frac{b(\alpha, \omega)}{a(\alpha, \omega)} = \frac{a_2 \omega^2 - a_0 \omega^4 - a_4}{\omega (a_3 - a_1 \omega^2)}. \quad (14)$$

Уравнение (14) легко решить графически. Для этого необходимо построить зависимости отношения $\frac{b(\alpha, \omega)}{a(\alpha, \omega)}$ от частоты автоколебаний ω и от угла переключения структуры α . Сюда же наносится график $a(\alpha, \omega)$ и функции угла переключения структуры α . Задавая значения ω , можно легко определить α и $a(\alpha, \omega)$, а затем по формуле (13) найти необходимые значения коэффициента a_5 . Последовательность определения $a(\alpha, \omega)$ показана стрелками на рис. 3.

Устойчивость периодического решения проверяется выполнением условия

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \Omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \Omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)^* > 0, \quad (15)$$

где Ω — частота периодического решения.

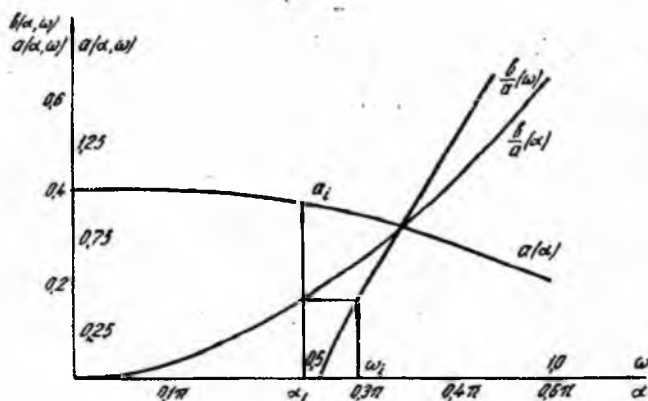


Рис. 3. Последовательность определения коэффициента гармонической линеаризации $a(\alpha, \omega)$ и угла переключения структуры α .

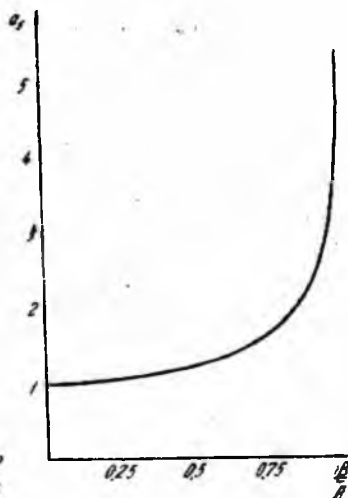


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления системы от угла переключения структуры α .

Взяв частные производные по α и Ω от уравнения (11) с учетом (9) и (10), условие (15) запишем в виде

$$\sin \alpha (3a_2\Omega^2 - 5a_0\Omega^4 - a_4) - \cos \alpha (4a_1\Omega^3 - 2a_3\Omega) > 0. \quad (16)$$

Пример. Пусть $a_0 = 0,216$; $a_1 = 0,53$; $a_2 = 3,83$; $a_3 = 3,92$; $a_4 = 1$. Последовательность решения системы уравнений (12) показана на рис. 3 для одного значения α .

На рис. 4 приведена зависимость коэффициента усиления системы a_3 от отношения $\frac{B}{A}$: с увеличением угла переключения структуры устойчивость системы повышается.

Алгоритм переключения структуры, как это следует из рис. 1, может быть представлен в виде

$$U \begin{cases} F(x) & \text{при } x \frac{dx}{dt} > 0, \\ 0 & \text{при } x \frac{dx}{dt} < 0, \end{cases} \quad (17)$$

где U — сигнал на выходе переключающего элемента.

Как следует из формулы (17), для реализации необходимого закона переключения необходима информация только о знаках регулируемой величины и ее производной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы с переменной структурой и их применение в задачах автоматизации полета. Под ред. Б. Н. Петрова и С. В. Емельянова. Изд-во «Наука», 1968.
2. К. К. Жильцов. О гармонической линеаризации систем с логическим законом управления. «Автоматика и телемеханика», т. 26, № 2, 1966.
3. В. С. Хабаров. К вопросу построения частотных характеристик одного класса САР с переменной структурой. «Автоматика и телемеханика», т. 26, № 8, 1965.
4. Современные методы проектирования систем автоматического управления. Под ред. Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова, Ю. И. Топчиева. Изд-во «Машиностроение», 1967.