УДК 510.62

*Г. Г. ЧЕТВЕРИКОВ*, канд. техн. наук, *И. Ю. ШУБИН*

# ОБ ИМПЛИКАТИВНОЙ АЛГЕБРЕ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Получив универсальную алгебру конечных предикатов произвольного порядка *, были введены двуместные операции над конечными предикатами: дизъюнкция и конъюнкция. Введем одноместную операцию отрицания. Наличие операции отрицания конечного предиката произвольного порядка позволит в ряде слу-

* *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Математические средства. Х., 1984. 114 с.

чаев записывать выражения в более компактной форме. Определим операцию отрицания аксиоматически, задав ее тождествами:

$$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A}\,\bar{B}; \tag{1}$$

$$\overline{AB} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}; \tag{2}$$

$$\overline{x_j^{a_l}} \equiv x_j^{a_1} \vee x_j^{a_2} \vee \dots \vee x_j^{a_{l-1}} \vee x_j^{a_{l+1}} \vee \dots \vee x_j^{a_k}. \tag{3}$$

Здесь $A$, $B$ — произвольные тождества универсальной АКП произвольного порядка, $a_i (i=1, 2, \dots, k)$ — произвольные элементы множества $A_j$ $(j=1, 2, \dots, n)$. Справедливость аксиом отрицания подтверждается проверкой тождеств для всевозможных вариантов значений тождеств $A$, $B$.

Введем также двуместную операцию в универсальной АКП произвольного порядка — *импликацию предикатов* $\supset$, определив ее следующим образом:

$$A \supset B \equiv \bar{A} \vee B. \tag{4}$$

Буквы $A$ и $B$ обозначают произвольные формулы универсальной алгебры. Операцию импликации будем считать младшей по отношению к операциям конъюнкции и дизъюнкции. Заменой в базисе универсальной АКП операции дизъюнкции на операцию импликации получим новую универсальную алгебру произвольного порядка с базисом, состоящим из операций конъюнкции, импликации и элементарных предикатов. Назовем такую алгебру универсальной импликативной алгеброй конечных предикатов произвольного порядка.

Введем следующим образом понятие импликанты: предикат $g$ является *импликантой* предиката $f$, если для любого набора значений аргументов, при котором $g=1$, выполняется $f=1$.

Опишем некоторые свойства импликант конечных предикатов произвольного порядка.

**Теорема 1.** *Для того чтобы конечный предикат произвольного порядка $g$ был импликантой конечного предиката $f$, необходимо и достаточно выполнение условия* $g \supset f \equiv 1$ **(5)**.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть предикат $g$ является импликантой предиката $f$. Тогда для любого фиксированного набора значений переменных $\sigma = (s_1, s_2, \dots, s_r)$, где $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_r = s_r$, ($s_1$, $s_2$, ..., $s_r$ — значения переменных), если $g(s_1, s_2, \dots, s_r) = 1$, то $f(s_1, s_2, \dots, s_r) = 1$.

Это означает, что $g(s_1, s_2, \dots, s_r) \supset f(s_1, s_2, \dots, s_r) \equiv 1$. Следовательно, $g \supset f \equiv 1$.

*Достаточность.* Предположим, что справедливо тождество (5). Это означает, что при любом наборе $\sigma = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ справедливо $g(s_1, s_2, \dots, s_r) \supset f(s_1, s_2, \dots, s_r) = 1$. Предположим теперь $g(s_1, s_2, \dots, s_r) = 1$, тогда $1 \supset f(s_1, s_2, \dots, s_r) = 1$, откуда (согласно тождеству (4)) $0 \vee f(s_1, s_2, \dots, s_r) = 1$. Следовательно, $f(s_1, s_2, \dots, s_r) = 1$. Отсюда следует, что предикат $g$ является импликантой предиката $f$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если $f$, $g$, $h$ — произвольные конечные предикаты, связанные тождеством $f \equiv g \vee h$, то предикат $g$ является импликантой предиката $f$.*

Доказательство. Пусть $f \equiv g \vee h$. Если $g(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 1$, то $f(s_1, s_2, \ldots, s_n) = g(s_1, s_2, \ldots, s_n) \vee h(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 1 \vee h(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 1$. Теорема доказана.

*Простой импликантой* предиката произвольного порядка $f$ назовем элементарную конъюнкцию, обладающую следующими свойствами: она является импликантой предиката $f$ и никакая ее собственная часть, т. е. элементарная конъюнкция, полученная из исходной выбрасыванием некоторых предикатов узнавания, не является импликантой предиката $f$.

**Теорема 3.** *Дизъюнкция любого числа импликант конечного предиката произвольного порядка является импликантой этого предиката.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — импликанты конечного предиката $f$. Это означает, что

$$g_1 \supset f \equiv 1;\ g_2 \supset f \equiv 1, \ldots;\ g_r \supset f \equiv 1,$$

тогда

$$g_1 \vee g_2 \vee \ldots \vee g_r \supset f \equiv \overline{g_1 \vee g_2 \vee \ldots q_r} \vee f \equiv$$

$$\equiv \bar{g}_1 \bar{g}_2 \ldots \bar{g}_r \vee f \equiv (\bar{g}_1 \vee f)(\bar{g}_2 \vee f) \ldots (\bar{g}_r \vee f) \equiv$$

$$\equiv (g_1 \supset f)(g_2 \supset f) \ldots (g_r \supset f) \equiv 1.$$

Теорема доказана.

Под *имплицентой* конечного предиката произвольного порядка будем понимать такой конечный предикат соответствующего порядка, что если для любого набора переменных, на котором конечный предикат $g = 0$, имеет место $f = 0$, то говорят, что предикат $g$ есть имплицента предиката $f$ и что имплицента $g$ накрывает своими нулями нули предиката $f$.

Если конечный предикат $g$ есть имплицента предиката $f$, то предикат $\bar{g}$ есть импликанта $\bar{f}$, и наоборот. Предикат $g$ является имплицентой предиката $f$ в том, и только в том случае, когда $f \supset g \equiv 1$. В самом деле, если $g$ есть имплицента предиката $f$, то $\bar{g} \supset \bar{f} \equiv 1$, откуда $\bar{\bar{g}} \vee \bar{f} \equiv 1$, $\bar{f} \vee g \equiv 1$, и окончательно, $f \supset g \equiv 1$. Двигаясь тем же путем в противоположную сторону, получим обратное утверждение.

Элементарную дизъюнкцию $d$ назовем *собственной частью* элементарной дизъюнкции $\delta$, если $d$ можно получить из $\delta$ выбрасыванием каких-либо предикатов узнавания. Назовем *простой имплицентой* предиката $f$ любую элементарную дизъюнкцию, обладающую следующими свойствами: она является имплицентой предиката $f$ и никакая ее собственная часть не является имплицентой предиката $f$. Если $f \equiv gh$, где $f$, $g$, $h$ — некоторые конечные предикаты, то предикат $g$ — имплицента предиката $f$. Действительно, пусть $f \equiv gh$, если $g(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0$, то $f(s_1, s_2, \ldots, s_n) \equiv g(s_1, s_2, \ldots, s_n) \wedge h(s_1, s_2, \ldots, s_n) \equiv 0 \cdot h(s_1, s_2, \ldots, s_n) \equiv 0$.

Конъюнкция любого числа имплицент конечного предиката является импликцентой этого предиката. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — импликценты предиката $f$. Это означает $f \supset g_1 \equiv 1, f \supset g_2 \equiv 1, \ldots,$ $f \supset g_r \equiv 1$. Тогда $f \supset g_1 g_2 \ldots g_r \equiv \bar{f} \vee g_1 g_2 \ldots g_r \equiv$

$$\equiv (\bar{f} \vee g_1)(\bar{f} \vee g_2)\ldots(\bar{f} \vee g_r) \equiv (f \supset g_1)(f \supset g_2)\ldots(f \supset g_r) \equiv 1.$$

Систему $S$ имплицент конечного предиката произвольного порядка назовем *полной*, если любой нуль из таблицы значений предиката $f$ накрывается нулями хотя бы одной импликценты системы $S$. Предикат может иметь несколько различных полных систем имплицент. Конъюнкция всех имплицент полной системы $S$ конечного предиката совпадает с этим предикатом. Система всех простых имплицент любого конечного предиката называется сокращенной КНФ.

Конъюнктивным ядром конечного предиката назовем множество всех таких его простых имплицент, исключение каждой из которых из системы всех простых имплицент делает эту систему неполной. Элементы конъюнктивного ядра входят в состав любой полной системы простых имплицент. Система простых имплицент конечного предиката называется приведенной, если она полна и никакое ее собственное подмножество не является полной системой. Конъюнкция всех простых имплицент приведенной системы называется тупиковой КНФ конечного предиката. Предикат может иметь не более одной различной тупиковой формы. Тупиковая КНФ предиката с наименьшим числом узнаваний называется минимальной КНФ. Каждому конечному предикату соответствует множество обозначающих его конъюнктивных нормальных форм. Отыскание в этом множестве формулы с наименьшим числом предикатов узнаваний (то есть минимальной КНФ) назовем канонической задачей конъюнктивной минимизации.

Введенная импликативная алгебра конечных предикатов произвольного порядка по своим выразительным возможностям является аналогичной дизъюнктивной АКП произвольного порядка. Введенная алгебра полна, так как с помощью приведенных тождеств и доказанных теорем можно средствами импликативной алгебры записать любой конечный предикат произвольного порядка. К тому же на основании тождеств импликации и свойств импликанты и имплиценты можно строить алгоритмы минимизации нормальных форм представления конечных предикатов, что дает мощный инструмент построения систем распознавания, основанных на теории алгебры конечных предикатов.

*Поступила в редколлегию 13.04.88*