

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА  
УКРАИНЫ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
“Харьковский авиационный институт”

Вартанян В.М., Романенков Ю.А., Ревенко Д.С., Кащеева В.Ю.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ**

2012

УДК 629.735.33.002.3:620.22-419:621.884

P65

Формалізовано процес як структурного, так і параметричного синтезу прогнозних моделей.

Сформульовано принципи визначення настроювальних параметрів при ідентифікації моделі динамічного процесу, що забезпечують робастність методів, а також враховані якісна і кількісна невизначеність початкових статистичних даних.

Наведено відомості щодо інструментальних засобів рішення задач прогнозування і деякі обчислювальні особливості алгоритмів.

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. О.С. Куценко,  
д-р техн. наук, проф. І.Б. Туркін

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПО ЧАСОВИХ РЯДАХ**

**P65** [Текст]: монографія / В.М. Вартамян, Ю.О. Романенков, Д.С. Ревенко, В.Ю. Кашеєва. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського «Харьк. авіац. ін-т», 2012. – 266 с.

ISBN

Формализован процесс как структурного, так и параметрического синтеза прогнозных моделей.

Сформулированы принципы определения настроечных параметров при идентификации модели динамического процесса, обеспечивающие робастность методов, а также учтены качественная и количественная неопределенность исходных статистических данных.

Приведены сведения об инструментальных средствах решения задач прогнозирования и некоторые вычислительные особенности алгоритмов.

Іл. 79. Табл. 31. Бібліогр.: 214 назв.

**УДК 629.735.33.002.3:620.22-419:621.884**

Затверджено на засіданні вченої ради Національного аерокосмічного університету ім. Н.Є. Жуковського "ХАІ" 25 січня 2012 р. (протокол № 5) як монографія.

ISBN

© Вартамян В.М., Романенков Ю.О., Ревенко Д.С., Кашеєва В.Ю., 2012

© Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
РАЗДЕЛ 1. АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ВЫБОРУ ПРОГНОЗНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ .....	7
1.1. Прогнозирование: сущность, цели, виды прогнозов .....	7
1.2. Современные научные направления развития системы прогнозирования .....	19
1.3. Обзор и анализ методов прогнозирования .....	21
1.4. Обзор методов прогнозирования по временным рядам .....	36
Литература к разделу 1 .....	57
РАЗДЕЛ 2. СТРУКТУРНЫЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МОДЕЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ .....	66
2.1. Теоретические сведения и история развития моделей экспоненциального сглаживания .....	66
2.2. Модели, базирующиеся на простом экспоненциальном сглаживании .....	68
2.3. Рекомендации по выбору настраиваемых параметров, обеспечивающих адекватность модели .....	72
2.4. Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания .....	75
2.4.1. Метод выбора константы сглаживания, учитывающий ошибку первоначального прогноза .....	80
2.4.2. Метод выбора константы сглаживания, учитывающий наличие в модели сглаживающей постоянной для тренда .....	81
2.4.3. Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания с учетом интервальной неопределенности .....	84
2.4.4. Метод комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервальных динамических рядов .....	91
2.4.5. Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания для статистических рядов интервальных данных ....	108
2.4.6. Необходимые алгебраические условия адекватности полиномиальных интервальных моделей динамических	

процессов .....	118
2.5. Структурный синтез модели экспоненциального сглаживания .....	126
2.6. Моделирование и расчет показателей сбытовой деятельности торгового предприятия .....	132
2.6.1. Корреляционный анализ исходных данных.....	132
2.6.2. Прогнозирование объема продаж методом экспоненциального сглаживания .....	134
2.6.3. Прогнозирование объема продаж при помощи модифицированной модели экспоненциального сглаживания.....	138
2.6.4. Нахождение константы сглаживания путем решения обратной задачи для известных данных .....	142
2.7. Использование инструментов MS EXCEL в задачах прогнозирования по временным рядам .....	144
2.8. Программное обеспечение интервальных вычислений.....	171
Литература к разделу 2.....	175
РАЗДЕЛ 3. ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА «ГУСЕНИЦА»-SSA.....	190
3.1. Теоретические сведения о методе «Гусеница»-SSA.....	190
3.2. Ряды конечного ранга, управляемые линейными рекуррентными формулами .....	196
3.3. Оценка частотных параметров модели Тейла-Вейджа в задачах краткосрочного прогнозирования .....	213
3.4. Синтез смешанных прогнозных моделей коротких временных рядов .....	227
3.5. Применение средств сингулярного анализа в задачах виброакустической диагностики авиационных двигателей.....	230
3.6. Синтез интервальной линейной рекуррентной модели сверхдлинного временного ряда .....	238
3.7. Основные характеристики программы Caterpillar .....	253
Литература к разделу 3.....	262

## ВВЕДЕНИЕ

По оценкам специалистов в настоящее время существуют сотни методов прогнозирования, вместе с тем, отмечается, что речь идет о разновидностях тех или иных основных методов прогнозирования, которых, на самом деле, десятки. Их выбор еще более ограничен, если базой для прогнозирования являются временные ряды, как количественная мера, отображающая изменение показателей динамических процессов во времени через равные его интервалы. Востребованность этих методов высока и растет по мере накопления статистического материала, а приложения разнообразны: экономика, техника, астрономия, медицина, геология и т.д. В соответствии с этим расширяется круг пользователей этих методов, а вместе с ним число программных продуктов, предлагаемых для их инструментальной реализации, чаще всего, в интерактивном режиме. Все эти естественные и позитивные тенденции приводят к альтернативности выбора конкретного метода и необходимости обоснования «траектории» его применения, начиная от параметрических настроек модели до трактовки полученных результатов. При этом следует принимать во внимание наличие или отсутствие априорной информации об исследуемом динамическом процессе, корректность исходных данных (их достоверность и полноту), адекватность вида и типа этих данных, методическую и инструментальную ошибку выбранного метода и реализующих его инструментальных средств. Естественным является желание выбора наименее сложного процесса прогнозирования, который должен быть соотнесен с допустимой погрешностью результата, которая определяется целью прогнозирования и спектром (ценой) возможных решений, принимаемых заказчиком.

Говоря о методах прогнозирования, следует понимать их вторичность по отношению к прогнозной модели или модели динамического процесса. Разница состоит в том, что прогнозная модель описы-

вает способ получения последующего значения члена временного ряда по известным предыдущим, основываясь на некоторой концепции или гипотезе о характере поведения процесса (это свойственно для моделей экспоненциального сглаживания). Такая модель гипотетически должна обеспечить возможность получения ожидаемого результата хотя бы в пределах одного шага прогнозирования. Так, например, если неизвестный процесс описывается функцией  $y[n] = \sin(x[n])$ , то прогнозная модель  $y[n] = x[n]$  достаточно точно дает результаты для малых значений  $x$ , что широко используется в инженерной практике. При этом ее достоинством является простота, а ограниченность применения (если интервал изменения  $x$  достаточно широк) компенсируется коррекцией прогнозной модели, начиная с шага, когда погрешность прогноза станет неудовлетворительной. Более ценным, с точки зрения значимости результата, является идентификация модели динамического процесса. Такая возможность предоставляется, например, в методе сингулярно-спектрального анализа «Гусеница». В этом случае прогнозирование развития процесса является лишь одной из возможностей предоставляемых моделью. Другими возможностями являются: декомпозиция исследуемого процесса на составляющие, что позволяет лучше понять физическую природу явления, ретроспективное восстановление исследуемого процесса, получение не только пошаговых, но и любых других значений показателей процесса.

В настоящей работе сделана попытка формализовать процесс как структурного, так и параметрического синтеза прогнозных моделей, сформулировать принципы формирования настроечных параметров при идентификации модели динамического процесса, обеспечивающие робастность метода, а также учесть качественную и количественную неопределенность исходных статистических данных. В работе также приведены сведения об инструментальных средствах решения перечисленных задач и некоторые вычислительные особенности реализуемых алгоритмов.

# РАЗДЕЛ 1

## АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ВЫБОРУ ПРОГНОЗНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

### 1.1. Прогнозирование: сущность, цели, виды прогнозов

Большинство принимаемых управленческих решений относятся к будущим событиям, которые невозможно контролировать сегодня, однако их оценка и предсказание необходимы для перспективного планирования.

Органической частью планирования является составление прогнозов, являющихся основой для разработки стратегии управления хозяйствующей структурой, показывающих возможные направления ее будущего развития в тесном взаимодействии с окружающей средой.

Определение возможного набора необходимых путей и средств претворения в жизнь намечаемой программы действий называют прогнозированием (греч. Prognosis - «знание наперед»). В процессе прогнозирования проводятся количественные и качественные изыскания на основе анализа темпов и пропорций хозяйственного развития, накопленного в прошлом опыта, а также текущих допущений насчет будущего. Таким образом, прогнозирование представляет собой технологию разработки моделей развития управляемого объекта.

Результатом прогнозирования является прогноз - научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта и его среды в будущем, об альтернативных путях его развития, выраженное в словесной, математической, графической или другой форме.

С помощью прогноза определяются области и возможности, в рамках которых могут быть сформулированы цели экономического развития, выявлены направления, важнейшие проблемы,

которые должны стать объектом разработки и принятия решений [1, с. 9].

На практике прогноз – это предплановый документ, фиксирующий вероятную степень достижения поставленной цели в зависимости от масштаба и способа будущих действий.

Широкая популярность прогнозов объясняется естественным стремлением к уменьшению влияния неизвестных и неконтролируемых факторов на результаты деятельности за счет получения дополнительной информации о том, что неизвестно вообще или известно неточно. Прогнозы используются при принятии решений в различных производственных и непроизводственных областях. Таким образом, вся плановая и практическая работа на предприятии или в организации связана с необходимостью прогнозирования.

В последние годы отечественные предприятия проявляют все больший интерес к прогнозированию, и в связи с этим заметно повысился спрос на прогнозные исследования.

Основы научного прогнозирования были заложены в начале 20 века выдающимся русским экономистом В.А. Базаровым-Рудневым, который в своих работах (1924-1928 гг.) сформулировал принципиально новый подход к будущему, ввел понятие генетического (впоследствии поискового) и телеологического (впоследствии нормативного) прогнозов. Несколько позже американские ученые предложили концепцию эксплораторного и нормативного прогнозирования [2].

Активное развитие теории прогнозирования развернулось в послевоенные годы прошлого столетия, особенно с начала 50-х годов, когда стал осуществляться системный подход к прогнозированию, были разработаны специализированные методы и методики прогнозирования.

В 60-70-х годах теория прогнозирования уже используется

на практике для повышения эффективности принятия решений, хотя на тот момент многие методы не были еще глубоко теоретически разработаны и достаточно опробованы, а многие методики еще носили фактически экспериментальный характер.

Как наука прогностика сформировалась в 70-80 годы XX столетия в условиях научно-технического прогресса и стремительных темпов общественного развития. Особо прогностическая система научных исследований получила неоспоримое признание и наиболее мощно развивалась в сферах долгосрочного технологического предвидения.

По мере развития прогностики совершенствовались методы прогнозирования, разрабатывались и реализовались на практике специальные способы, процедуры, методические приемы прогностических исследований, осуществлялся поиск путей и способов алгоритмизации методик прогнозирования.

В области теории и практики разработки прогнозов необходимо отметить труды зарубежных ученых – Г. Тейла и Дж. Брайта, которые сформировали теоретическую базу экономического прогнозирования, а также В. Леонтьева, Дж. Мартино, Дж. Фон Неймана, О. Моргенштерна, Дж. Форрестера и др., доказавших в теории и на практике ценность прогнозов в принятии управленческих решений, О. Хелмера и Т. Гордона, разработавших метод «Delphy», К.Д. Льюиса, М.Д. Кендэла.

Общеизвестны работы крупных ученых СССР А.И. Анчишкина, И.В. Бестужева-Лады, В.М. Гееца, В.Г. Гмошиского, А.Т. Гринберга, Г.М. Доброва, А.Г. Ивахненко, Г.С. Кильдишева, Л.В. Канторовича, В.А. Лисичкина, Ю.П. Лукашина, Б.Г. Рябушкина, И.П. Федоренко, А.А. Френкеля, Е.М. Четыркина, академика В.М. Глушкова, предложившего метод программного прогнозирования, являющийся обобщением метода «Delphy» и метода «PERT», который служит для определения вероятности наступ-

ления тех или иных событий и оценки вероятного времени их наступления.

Работой по формированию классификаций в прогностике в разное время занимались российские и зарубежные учёные: С.А. Айвазян, Э.И. Бежаева, В.П. Божко, В.М. Бухштабер, М.С. Гаспарян, Г.М. Добров, А.М. Дубров, И.С. Енюков, В.Н. Забелин, В.Н. Коробов, В.С. Мхитарян, С.А. Попов, Н.А. Полякова, Е.В. Пряхина, Л.И. Трошин, В.В. Шмелев, Э. Янч, Б. Болч, Дж. Джонстон, Э. Кейн, Дж. Ким, У. Клекка, И. Мандель, Ч. Мьюллер, Г. Харман, К. Хуань.

В настоящее время в условиях экономической нестабильности, когда часто необходимо принимать решения, обеспечивающие не столько развитие, сколько выживание предприятий, наиболее остро ощущается потребность в качественном и грамотном экономическом прогнозировании.

Известный российский ученый в области социально-экономического прогнозирования И.В. Бестужев-Лада дает следующее определение экономическому прогнозу: «Экономический прогноз в системе планирования – это не просто предсказание возможного развития, а научное обоснование целенаправленной хозяйственной стратегии, путей и мер активного воздействия на экономику» [3].

Основным требованием, предъявляемым к прогнозу, является не только и не столько умение предвидеть будущее, сколько разработка программ достижения установленных на будущее ориентиров (целей) развития предприятия, а также рычагов управления, позволяющих направлять его деятельность по тому или иному варианту развития, обеспечивая эффективность перехода из настоящего в желаемое будущее состояние. И чем лучше руководитель, принимающий решения, сможет предсказать внешние и внутренние условия применительно к будущему, тем

выше шансы на составление осуществимых планов. Тот руководитель, который принимает решения, опираясь на понимание современных аппаратов прогнозирования и разумное их использование, несомненно, имеет преимущество по сравнению с тем, кто пытается планировать будущее без учета какой-либо дополнительной информации.

Однако необходимо учесть, что прогнозы полезны для планирования только в том случае, если компоненты прогноза тщательно продуманы, а ограничения, содержащиеся в прогнозе, откровенно названы. Для этого необходимо [4]:

- задать требуемую точность прогноза, исходя из того, какие решения будут на его основе приниматься;

- определить изменения, которые должны произойти, чтобы прогноз оказался достоверным, оценить вероятность наступления соответствующих событий;

- определить компоненты прогноза и позаботиться об источниках данных;

- определить, насколько ценен опыт прошлого в составлении прогноза, есть ли основания для составления прогноза на основе этого опыта, насколько просто или недорого будет получить надежную информацию об опыте прошлого;

- определить, насколько структурированным должен быть прогноз.

Таким образом, общая логическая последовательность разработки прогноза сводится к следующим основным этапам:

*1-й этап* – разработка программы исследования: формулируются цели и задачи прогнозирования, уточняется задание на прогноз, характер, масштабы, объект, период упреждения и горизонт прогнозирования, определяются методы, структура и организация исследования;

*2-й этап* – сбор необходимой информации для прогнозиро-

вания. Для разработки прогнозной модели требуется достоверная статистическая информация об исследуемой системе;

*3-й этап* – отбор статистических данных, их уплотнение, проверка на достоверность для обеспечения точности прогнозирования, системный анализ и обобщение;

*4-й этап* – численное моделирование на основе собранной статистической информации (создание прототипа прогнозной модели, наиболее соответствующей особенностям собранных данных и способной обеспечить минимальную ошибку прогноза, оценивание модели и ее диагностическая проверка);

*5-й этап* – экстраполяция выбранной модели (предусматривает фактическое получение требуемого прогноза);

*6-й этап* – оценка достоверности и точности, а также обоснованности (верификация) прогноза. Оценка полученного прогноза состоит в сравнении вычисленных величин с действительно наблюдаемыми значениями. Для этой цели часть наиболее свежей фактической информации обычно исключается из множества анализируемых данных и применяется прогнозирование на недавно прошедшие периоды, для которых исследуемые величины уже известны. Если результаты совпадают, есть основания с большей уверенностью считать степень достоверности прогноза высокой, если нет – необходимо провести поиск и устранение ошибок или недочетов в методике разработки прогноза;

*7-й этап* – разработка рекомендаций для принятия решений в сфере управления.

Успешность прогнозирования зависит от таких условий: объема и качества информации о прогнозируемом процессе или объекте, правильности формулирования задачи прогнозирования и обоснованности выбора способа ее решения, наличия необходимых вычислительных средств и вычислительного аппарата в соответствии с выбранным методом. Важнейшее из этих условий

– формулирование задачи, поскольку именно она определяет требования к объему и качеству информации, математический аппарат и точность прогноза. Информация о прогнозируемом объекте (процессе) черпается из результатов контроля деятельности, статистики.

Формулирование задания на прогноз осуществляют исходя из иерархического уровня прогнозируемых показателей, периода основания прогноза (ретроспекции) – отрезка времени, на котором строятся динамические ряды развития параметров исходной модели в прошлом и настоящем, периода упреждения прогноза (проспекции) – отрезка времени, на который рассчитан прогноз, а также требуемого горизонта прогнозирования. При этом следует учитывать, что возможности прогнозирования часто ограничены по диапазону времени, особенно это касается экономических прогнозов, а также по диапазону объектов исследования, т.к. не все явления поддаются прогнозным оценкам.

По уровню прогнозируемого показателя и общим масштабам прогнозирования целесообразно выделять макро-, мезо- и микропрогнозы [5, с. 6]. Все, что связано с прогнозированием показателей, характеризующих деятельность фирм, компаний и предприятий, относится к микроуровню. Мезо- (региональный и отраслевой уровни) и макропрогнозы используются, как правило, при описании внешней среды.

По времени упреждения прогнозы делятся на оперативные, краткосрочные, среднесрочные, долгосрочные, сверхдолгосрочные или дальнесрочные. Временная градация прогнозов является относительной и зависит, как правило, от характера прогноза. Наиболее распространенными являются следующие представления о сроках прогнозов: краткосрочные – от нескольких месяцев до одного – двух лет, среднесрочные – 3-7 лет, долгосрочные – до 20 лет и более [1, с. 12].

Краткосрочные – предполагают серьезные количественные изменения и содержат общие количественные оценки. На основе краткосрочных прогнозов осуществляется текущее планирование хозяйственных операций.

Среднесрочные – охватывают перспективу между кратко- и долгосрочной, предполагают необходимость применения как количественных, так и качественных оценок с преобладанием количественных над качественными.

Долгосрочные – в них оценки принимают качественно-количественный характер, т.е. приходится учитывать неизбежность серьезных изменений преимущественно качественных.

На базе средне- и долгосрочных прогнозов осуществляется стратегическое планирование.

Прогнозы на период свыше 20 лет называют сверхдолгосрочными или дальнесрочными. При таком прогнозировании ограничиваются обычно лишь общими качественными оценками на уровне общих закономерностей развития объектов, т.к. давать какие-то конкретные количественные оценки становится все более затруднительно. При планировании деятельности предприятия необходимо учитывать, что чем длиннее прогнозный период, тем обобщеннее становится прогноз, и тем значительней может быть отклонение фактических данных от прогнозируемых.

Иногда при классификации прогнозов выделяют оперативные прогнозы, применяемые для оценки и прогнозирования текущего состояния [6, с. 14].

Оперативные прогнозы (в пределах месяца) содержат, как правило, детально-количественные оценки и основываются на предположении о том, что в прогнозируемом периоде с объектом исследования не произойдет никаких изменений, кроме некоторых частных количественных.

В последнее время на практике все более используются

краткосрочные прогнозы, что объясняется следующим:

- характером современной нестационарной динамики развития процессов и явлений (в кризисных условиях использование долгосрочных прогнозов нецелесообразно);

- неопределенностью будущего (она возрастает в геометрической прогрессии с удалением предполагаемого события во времени);

- строгим и формализованным аппаратом методов краткосрочного прогнозирования;

- широким практическим распространением краткосрочных методов прогнозирования [7, 8].

Следует также отметить, что формирование экономических прогнозов на основе фиксированного календарного периода в современных условиях, характеризующихся неустойчивостью внешней среды, имеет существенные недостатки и ограничивает их практическое применение. Для обеспечения практического использования прогнозов периоды прогнозирования необходимо связывать с реальными экономическими процессами, особенностями конкретного объекта прогнозирования, выделяя различные циклы, этапы, фазы его развития.

Кроме временного существуют и другие признаки классификации прогнозов: по типу прогноза (поисковые и нормативные или нормативно-целевые), по степени вероятности будущих событий (вариантные и инвариантные), по способу представления результатов прогноза (точечные и интервальные), в зависимости от этапа планирования деятельности организации (целевые, плановые, проектные, программные, организационные), по охвату объектов исследования (глобальные, региональные, локальные), по методу или способу анализа, по целевой установке и другие.

Поисковые прогнозы в свою очередь разделяются на исследовательские, изыскательские, трендовые, генетические.

Нормативно-целевые прогнозы определяют общие цели и стратегические ориентиры предприятия на будущий период, оценку развития предприятия, исходя из этих целей. Нормативное прогнозирование опирается, как правило, на качественные методы исследования.

Вариантный прогноз основывается на предположении о значительной неопределенности будущей среды и, следовательно, наличии нескольких вероятных вариантов развития событий.

Инвариантный прогноз предполагает только один вариант развития будущих событий, применяется в условиях высокой степени определенности будущей среды и базируется, как правило, на экстраполятивном подходе.

Точечный прогноз предполагает, что данный вариант развития включает единственное значение прогнозируемого показателя.

Интервальный прогноз предусматривает некоторый диапазон значений (интервал) прогнозируемого показателя.

При составлении прогноза берутся во внимание реальные условия существования и развития объекта прогнозирования, в связи с чем применяют традиционный или новаторский подходы к прогнозированию.

Традиционный (экстраполятивный) подход широко применяется в прогнозировании и, так или иначе, отражается в большинстве методов прогнозирования. Он предполагает, что развитие объекта происходит гладко и непрерывно, поэтому прогноз может быть простой проекцией (экстраполяцией) прошлого в будущее. Для составления такого прогноза необходимо вначале оценить прошлые показатели деятельности предприятия и тенденции их развития (тренды), затем перенести эти тенденции в будущее.

Новаторский (альтернативный) подход стал широко приме-

няться в 80-е годы и в настоящее время быстро распространяется в практике внутрифирменного планирования. Он базируется на том, что внешняя и внутренняя среда бизнеса подвержена постоянным изменениям, вследствие чего развитие предприятия происходит не только гладко и непрерывно, но и скачкообразно и прерывисто, и предусматривает определенное число альтернативных вариантов будущего развития предприятия.

Имеют место и другие подходы к классификации прогнозов. Так, Г. Добров [9] предлагает прогнозы разделять на такие:

- исследовательские - базируются на познанных тенденциях и закономерностях, призваны выявить и сформулировать возможность и перспективные направления развития;

- программные - базируются на познанных общественных потребностях, а также на результатах исследовательских прогнозов, создают предпосылки для формирования программы возможных путей, мер и условий для достижения определенных целей и решения поставленных задач;

- организационные - базируются на знаниях и представлениях об общих закономерностях, а также на результатах исследовательских и программных прогнозов, формулируют обоснованную гипотезу развития комплекса организационных мер управления, дают оценку перспектив роста при данной организации развития.

Прогнозы также классифицируют по целевой установке [10] и по степени формализации [11].

Прогнозы, используемые в маркетинге, классифицируют по таким критериям [12]: по форме предоставления результата прогнозы (количественные и качественные), по величине периода упреждения (краткосрочные, среднесрочные, долгосрочные), по охвату прогнозированием объекта исследования (общие и частные).

По степени пространственной и временной согласованности результатов прогноза выделяют [11, с. 20]:

- одномерное прогнозирование - прогнозирование отдельных объектов без дальнейшего согласования разнородных объектов;

- многомерное прогнозирование - прогнозирование отдельных объектов с дальнейшим согласованием результатов;

- перекрестное прогнозирование - установление причинно-следственных зависимостей между экзогенными переменными и их влиянием на прогнозируемый объект;

- сквозное прогнозирование – имитация поведения системы в целом, включая пространственное и временное их исследование и полное согласование результатов.

Независимо от вида прогноза основной задачей прогнозирования является обнаружение связей между прошлым и будущим, между информацией о процессе в контролируемый период времени и характером протекания процесса в дальнейшем, и наиболее точное описание этих связей.

Выполнение этой задачи обеспечивает достижение основной цели прогнозирования – уменьшение того уровня неопределенности, в пределах которого руководитель должен принимать решения, получение научно обоснованных вариантов тенденций развития или изменения показателей состояния управляемого объекта во времени и пространстве, составление достаточно точного, практического, сбалансированного и полезного прогноза, который можно эффективно использовать в управлении, выгода от использования которого превысит затраты на его разработку.

## **1.2. Современные научные направления развития системы прогнозирования**

В современных экономических условиях, которые отличаются высоким уровнем сложности и неопределенности, особо возрастает важность анализа и прогнозирования основных макроэкономических показателей, характеризующих состояние и функционирование экономики в целом [13, с. 27].

При этом выбор комплекса макроэкономических моделей для анализа и прогнозирования макроэкономических показателей национальной экономики, сохраняющей характеристики экономики переходного периода, является непростой задачей. Большинство известных прикладных макроэкономических прогнозных моделей малопригодны для прогнозирования процессов, которые имеют место в странах с трансформацией рыночной системы, что требует развития специфических моделей для национальной экономики, которые бы учитывали ее структурные особенности [14, с. 58].

В табл. 1.1 проведен обзор научных направлений развития системы прогнозирования по различным предметным областям, которые являются весомым научным вкладом украинских ученых в развитие современной прогностики за период 1991-2009 гг. Обзор составлен на основании источника [15].

Несмотря на возросший интерес исследователей и ученых к проблеме разработки методов и моделей прогнозирования, все еще остаются нераскрытыми и дискуссионными множество вопросов современной прогностики.

Таблица 1.1

**Современные научные направления развития  
системы прогнозирования**

Научное направление	Разработки и предметная область исследования	Представители научного направления
1	2	3
Теория и методология экономического прогнозирования	Обоснование механизма макроэкономического прогнозирования и планово-рыночного регулирования в условиях рыночной экономики; формирование концептуальных основ экономического прогнозирования и планирования	Б. Панасюк
	Разработка макромоделей экономического роста народного хозяйства, методов решения балансовых задач; разработка методических подходов к прогнозированию и разработке программ	В. Беседин
	Обоснование планово-индикативного и бюджетного планирования в условиях рынка	Д. Полозенко
	Методологические принципы статистического моделирования и прогнозирования социально-экономических процессов	А. Еремина
Макроэкономическое моделирование и прогнозирование	Макроэкономическая модель прогнозирования экономики Украины; стратегия развития экономики Украины на среднесрочный период; сценарии развития макроэкономической ситуации в Украине до 2011 года; прогнозирование развития экономики, объемов производства и ВВП	В. Геец, Б. Кваснюк, С. Кораблин, И. Крючкова, В. Точилин
	Разработка и обоснование практического применения макроэкономических моделей Украины	И. Лукьяненко, Л. Красникова
	Исследования устойчивости и адаптивного управления экономическими системами, моделирование и прогнозирование экономической безопасности	Т. Клебанова, В. Заруба, Н. Кизим
	Модели УКРАКРО, модель экономического кругооборота национальной экономики, методика оценки уровня теневой экономики, технология моделирования взаимосвязанных макроэкономических показателей	А. Бакаев
	Разработка макроэкономических моделей экономики Украины, прогнозирование ВВП, платежного баланса, эконометрические модели внешнеэкономической деятельности	А. Черняк, А. Алексеев, Н. Костина
	Прогнозирование и моделирование нелинейной динамики макроэкономических процессов	Л. Сергеева, Н. Максишко
	Комплексное прогнозирование макроэкономического развития Украины	М. Скрипниченко
	Комплексные модели прогнозирования основных макроэкономических индикаторов	Т. Булай

1	2	3
Бюджетное прогнозирование	Многофункциональные модели системы «Бюджет Украины» и системы «Прогноз ВВП» (поддержка решений разработки экономической политики страны)	В. Михалевич, И. Сергиенко
Геоэкономическое прогнозирование	Оценка макроэкономической динамики открытой экономики Украины, перспективы развития черноморского экономического сотрудничества	В. Буркинский
Налоговое прогнозирование	Разработка экономико-математической модели налогообложения, разработка методов прогнозирования налоговых поступлений, прогнозные модели налогообложения малых предприятий	А. Алексеев, Т. Кравец, С. Мищенко
Инвестиционное прогнозирование	Разработка методики прогнозирования инвестиционного климата	П. Городничев, К. Городничева
	Разработка стратегий инвестиционной привлекательности регионов Украины	П. Саблук, Н. Кисель, М. Коденская
Инновационное прогнозирование	Разработка методики инновационного прогнозирования, проблемы стратегического инновационного прогнозирования	В. Порохня

### 1.3. Обзор и анализ методов прогнозирования

Качество прогноза в значительной мере зависит от выбора метода прогнозирования. В современных сложных условиях рыночного хозяйствования, характеризующихся высокой динамичностью, нестабильностью рыночной среды и сложностью самих объектов прогнозирования, выбор конкретного метода прогнозирования является одной из наиболее важных задач.

Под методом прогнозирования подразумевают способ теоретического и практического действия, направленного на разработку прогноза, включающего совокупность приемов, которые позволяют на основе ретроспективных данных, экзогенных (внешних) и эндогенных (внутренних) связей объекта прогнозирования, а также их изменений, вывести суждение с определенной вероятностью относительно будущего развития этого объекта [11, с. 18].

Обоснованность выбора метода прогнозирования определя-

ется постановкой задачи перед исполнителем, условиями применения прогноза, важностью прогноза для принятия дальнейших решений, наличием материальных и временных ресурсов.

На выбор конкретного метода прогнозирования также оказывают влияние динамические характеристики объекта прогнозирования, вид и характер информационного обеспечения, выбранный период упреждения прогноза, требования к результатам прогнозирования.

При выборе метода прогнозирования предпочтение отдается таким, которые просты в использовании, являются малозатратными, и вместе с тем дают возможность обеспечить качество, полноту, достоверность, надежность, точность и своевременность прогноза.

В настоящее время существует широкий круг методик и методических подходов к прогнозированию. Выбор прогностического аппарата и умелое его использование в целях прогнозирования является довольно сложной проблемой, о чем свидетельствует отсутствие единого общепризнанного набора конкретных методик и процедур прогнозирования. Каждый из методов прогнозирования имеет свои достоинства и недостатки, и фактически все методы являются взаимодополняющими.

Из большого многообразия методов прогнозирования, их свыше 150, используются на практике значительно меньше, всего 15-20. Многие из этих методов относятся скорее к отдельным процедурам, которые учитывают те или иные нюансы объекта прогнозирования, отличаются от базовых или друг от друга количеством частных приемов и последовательностью их применения.

Среди этих методов есть такие, которые требуют наличия значительного количества начальных данных, и такие, которые разработаны для прогнозирования в условиях недостатка досто-

верной количественной информации. Соответственно их можно разделить на две большие группы: методы вероятностно-математические (или количественные) и эвристические, основанные на субъективных оценках.

В группе эвристических методов доминируют интуиция, опыт, творчество и воображение лица или группы лиц, которые готовят прогноз. Эти методы можно разделить на ролевые игры, опросы потребителей о намерениях и экспертные опросы. Ролевые игры, описанные в специальной литературе [16], наиболее эффективны при использовании внутри компании с участием менеджеров, отвечающих за конкретные бизнес-направления.

Современные вероятностно-математические методы прогнозирования основаны на использовании различных математических теорий: теории функционального анализа, теории рядов, теории экстраполяции и интерполяции, теории вероятности и математической статистики, теории случайных функций и случайных процессов, теории корреляционного анализа, теории распознавания образов. Эта группа методов требует от аналитика высокой компетентности и хорошей математической подготовки, а также использования специального программного обеспечения.

В настоящее время происходит интеграция эвристических и вероятностно-математических методов, что позволяет получать более точные оценки будущих событий.

С целью обслуживания процесса выбора метода прогнозирования при решении задачи разработки прогноза и для обеспечения изучения и анализа методов прогнозирования осуществляется их классификация. Существуют различные подходы к классификации методов прогнозирования.

В основе прогнозирования, как считает И.В. Бестужев-Лада, лежат три взаимодополняющих источника информации о будущем [2]:

1) оценка перспектив развития, будущего состояния прогнозируемого явления на основе опыта;

2) условное продолжение в будущее (экстраполяция) тенденций, закономерности развития которых в прошлом и настоящем достаточно хорошо известны;

3) модель будущего состояния того или иного явления, процесса, построенная в соответствии с ожидаемым или желательным изменением ряда условий, перспективы развития которых определены.

В зависимости от способа обработки этой информации выделяют три дополняющих друг друга способа разработки прогнозов и выбора модели прогнозирования: анкетирование, экстраполирование и моделирование.

Анкетирование (интервьюирование, опрос) – опрос населения, экспертов с целью упорядочить, придать некую объективность субъективным оценкам прогнозного характера. При этом способе разработки прогноза особенно большое значение имеют экспертные оценки, основанные на очных и заочных, индивидуальных и коллективных опросах экспертов, а опросы населения в практике прогнозирования применяются сравнительно редко.

Экстраполирование – изучение предшествующего развития объекта и построение динамических рядов развития показателей прогнозируемого явления на протяжении периода основания прогноза в прошлом с последующим упреждением прогноза перенесением закономерностей развития в прошлом и настоящем на будущее (ретроспекция и проспекция прогнозных разработок).

Моделирование – построение поисковых и нормативных моделей с учетом вероятного или желательного изменения прогнозируемого явления на период упреждения прогноза по имеющимся прямым или косвенным данным о масштабах и направле-

нии изменений. Наиболее эффективная прогнозная модель – система уравнений. Однако имеют значение все возможные виды моделей в широком смысле этого термина: сценарии, имитации, графы, матрицы, подборки показателей, графические изображения и т.д.

Такую же классификацию способов прогнозирования с выделением модели прогнозирования предлагает П.С. Завьялов [17] (рис. 1.1).

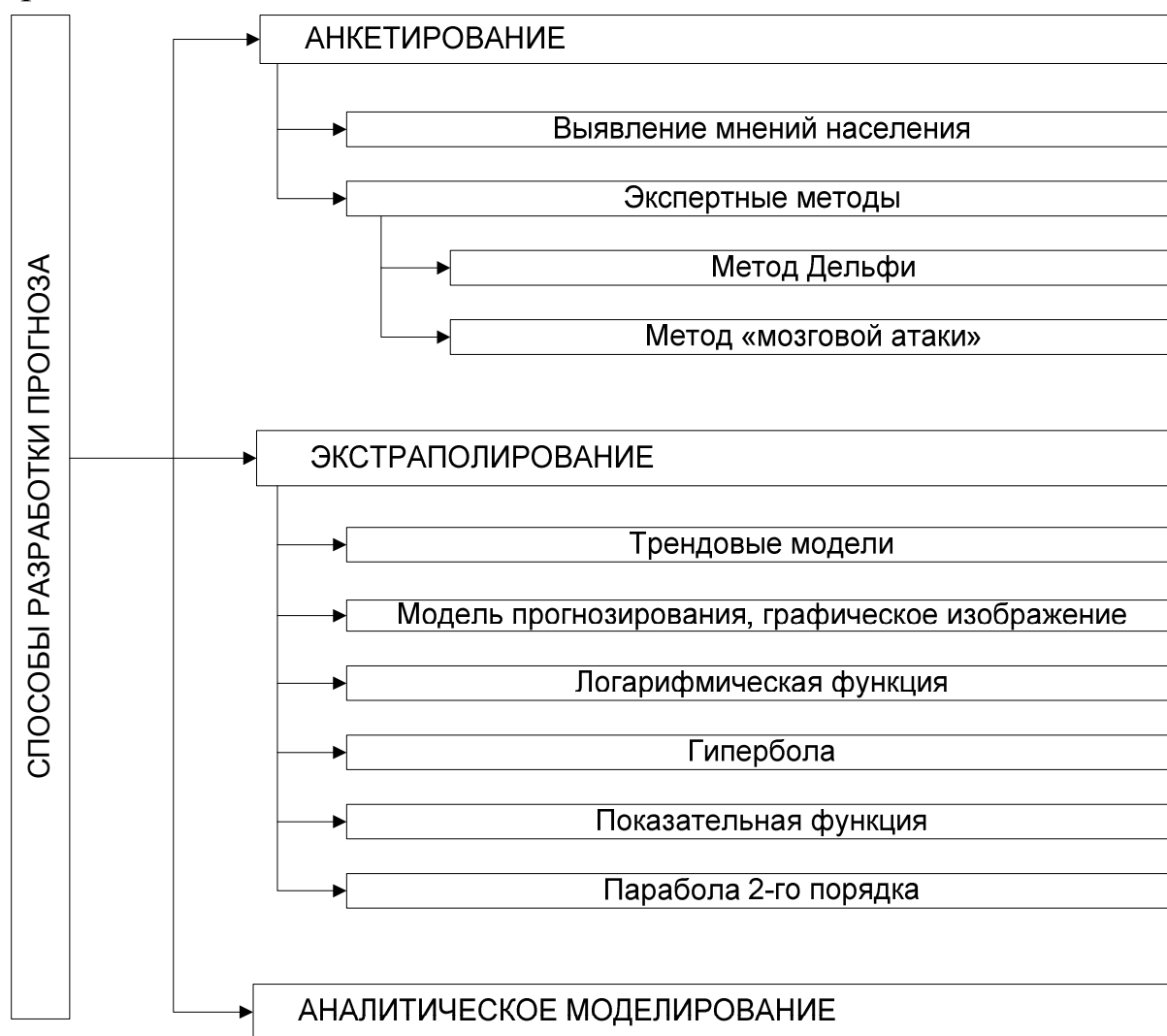


Рис. 1.1. Выбор способа и модели прогнозирования

Приведенное разделение способов прогнозирования условно, потому что на практике эти способы взаимно перекрещиваются и дополняют друг друга. Прогнозная оценка обязательно

включает в себя элементы экстраполяции и моделирования. Процесс экстраполяции невозможен без элементов оценки и моделирования. Моделирование подразумевает предварительную оценку и экстраполирование.

Интерес представляет подход, основанный на разделении методов прогнозирования по двум измерениям (рис. 1.2): степени свободы процесса прогнозирования от субъективности и большей или меньшей степени аналитичности процесса прогнозирования [18].



Рис. 1.2. Типология методов прогнозирования

В крайних точках этих измерений – субъективные и объективные методы и методы наивные и причинно-следственные.

Субъективные методы – используемые для формирования прогноза, но не изложенные в явной форме и неотделимые от лица, делающего прогноз.

Объективные методы – четко сформулированные процессы прогнозирования, которые могут быть воспроизведены другими

лицами.

Первое измерение фактически противопоставляет количественные методы качественным, в которых преобладают интуиция, творчество, воображение.

При использовании наивных методов прогноз формируется на базе наблюдений за прошлыми изменениями исследуемой переменной без учета в явной форме основных движущих факторов.

При использовании причинно-следственных (казуальных) методов идентифицированы движущие факторы, и их будущие вероятные значения спрогнозированы.

Второе измерение противопоставляет методы экстраполяции методам, объясняющим взаимосвязи, независимо от их количественного или качественного характера.

Экспертные суждения имеют место в том случае, когда прогноз основан не на объективных данных, а скорее на мнении менеджера, покупателя, специалиста. Эксперт основывает свое суждение на группе причинных факторов, оценивая вероятность их проявления и влияния на уровень спроса. При этом, как правило, берутся во внимание суждения лиц, принимающих решения, оценка торгово-посреднического персонала и намерения покупателей. Достоинство экспертного метода по сравнению с чисто интуитивным подходом – возможность обмена и сопоставления идей вследствие наличия явно выраженной казуальной структуры.

Эвристические и экстраполяционные методы применяются обычно в случаях, когда аналитическая структура прогнозного процесса слаба, но прогноз опирается на объективную маркетинговую информацию. Это относительно простые методы, основанные на предшествующем опыте или на довольно сложной экстраполяции данных о прошлых продажах. К ним относятся метод

цепочки отношений, анализ покупательной способности, анализ и декомпозиция трендов, метод экспоненциального сглаживания.

Объясняющие (экспликативные) модели отличаются от других моделей математического моделирования тем, что причинная структура в них устанавливается и проверяется экспериментально, в условиях, поддающихся объективному наблюдению и измерению.

Как правило, к числу наиболее важных классификационных признаков методов прогнозирования относят такие: степень формализации, способ получения и обработки информации, направление и предназначение прогнозирования, процедуру получения параметров прогнозирования и т.д.

Так, И.В. Бестужев-Лада предлагает за основу классификации принять разделение методов прогнозирования по степени формализации [19]. По такому признаку все методы прогнозирования делятся на интуитивные (экспертные) и формализованные (фактографические).

Интуитивные методы в большей мере соответствуют нормативному прогнозированию скачкообразных процессов. Эти методы прогнозирования используют в тех случаях, когда из-за значительной сложности объекта прогнозирования невозможно рассчитать влияние множества факторов. Интуитивные методы прогнозирования делятся на группы индивидуальных и коллективных экспертных оценок. К первым относятся методы интервью, аналитических докладных записок, написания прогнозного сценария и др. Ко вторым – методы анкетирования, обсуждения комиссией, «мозговых атак» (коллективной генерации идей) и др. Применение методов прогнозирования, основанных на коллективном мышлении, позволяет повысить точность результатов и получить продуктивные идеи.

Формализованные методы прогнозирования базируются на

фактическом информационном материале о прошлом и настоящем развитии объекта прогнозирования и чаще всего применяются при поисковом прогнозировании для эволюционных процессов. Эти методы делятся на группы экстраполяционных, системно-структурных, ассоциативных методов и методов опережающей информации. К первым относятся методы наименьших квадратов, экспоненциального сглаживания, вероятностного моделирования и адаптивного сглаживания. Ко вторым - методы функционально-иерархического моделирования, морфологического анализа, сетевого моделирования, структурной аналогии, матричный метод. К третьим - методы имитационного моделирования и историко-логического анализа. К четвертым – методы анализа потоков публикаций, оценки значимости открытий, изобретений, нововведений, анализа патентной или аналогичной ей информации. Имеются и другие разновидности методов всех четырех групп, которые, по сути, являются разновидностью перечисленных или их дальнейшей конкретизацией.

Подобную классификацию методов прогнозирования с разделением методов на интуитивные и форматизированные предлагает коллектив авторов в источнике [11].

Известные на Западе специалисты в области маркетинга Е. Дихтль и Х. Хершген в основу классификации ставят разделение методов прогнозирования на количественные и качественные [20].

При этом к основным количественным методам относят такие: экстраполяцию тренда, прогнозирование на основе индикаторов, регрессионный анализ, к качественным – метод Делфи и метод сценариев.

Количественные методы дают возможность осуществить оценку будущего на основе прошлых данных с помощью математических и статистических методов и используются чаще для

краткосрочного прогнозирования, реже – для среднесрочного. К преимуществам количественных методов можно отнести сравнительно невысокие затраты на прогнозирование и быстрое получение результата. Однако они требуют детального структурирования проблемы. Применение количественных методов целесообразно, когда есть основания считать, что деятельность в прошлом имела определенную тенденцию, которую можно продолжить в будущем, и когда имеющейся информации достаточно для выявления статистически достоверных тенденций или зависимостей. Когда отсутствует достаточное количество необходимой информации, или когда количественная модель получается чрезмерно сложной или дорогой, необходимо прибегнуть к качественным методам прогнозирования.

Качественные методы дают возможность осуществить оценку будущего с помощью знаний и интуиции. Временной диапазон у этих методов более широкий, они дают возможность делать как среднесрочные, так и долгосрочные прогнозы, однако такие прогнозы «страдают» субъективностью и требуют значительного времени на их разработку.

Э. Янч выделяет четыре группы методов прогнозирования с учетом различий между нормативным и исследовательским прогнозами [10]:

- 1) интуитивные;
- 2) изыскательские;
- 3) нормативные;
- 4) методы с обратной связью.

Интерес представляет классификация методов прогнозирования, предложенная российскими специалистами Лисичкиным В.А. и Лисичкиной М.В. [21], которая построена в виде генеалогического дерева (рис.1.3).

Классификация представляет совокупность методов совре-

менного прогнозирования в виде упорядоченной системы, где каждый уровень классификации характеризуется своим классификационным признаком. Эта классификация, как и описанная в источнике [19], предполагает разделение всех методов прогнозирования по информационному основанию на две основные группы: фактографические и экспертные.

По этому же признаку в классификации дополнительно выделена группа комбинированных методов, занимающих особое место в экономическом прогнозировании. К комбинированным относятся методы со смешанной информационной основой, в которых в качестве первичной используют как фактографическую, так и экспертную информацию. Комбинированные методы используются при построении достаточно сложных социально-экономических прогнозов, где очень важна обработка как качественной, так и количественной информации [22, с. 20].

На следующем уровне методы прогнозирования разделяются далее на подгруппы по принципу обработки информации.

Так, среди фактографических методов выделяются группы статистических и опережающих методов, а экспертные методы разделяются на прямые и с обратной связью.

Третий уровень классификации разделяет методы прогнозирования по классификационному признаку «аппарат методов». Группа статистических методов прогнозирования включает методы, основанные на анализе динамических характеристик (параметров) объекта прогнозирования.

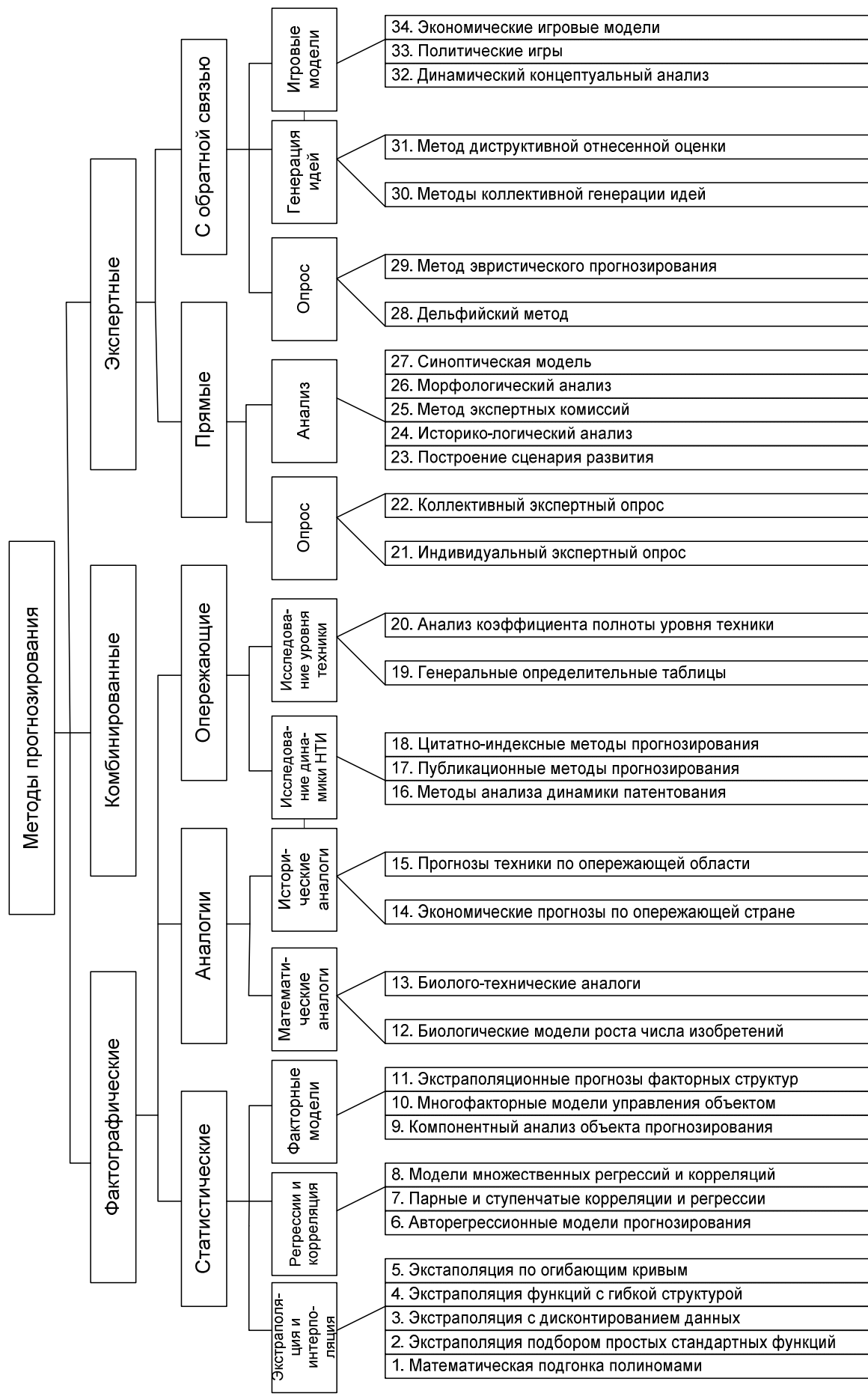


Рис. 1.3. Дерево системы методов современного прогнозирования

Среди них наибольшее распространение получили методы экстраполяции и интерполяции. Опережающие методы основаны на использовании свойства научно-технической информации опережать реализацию научно-технических достижений. Среди методов этой группы выделяется публикационный, предусматривающий анализ и оценку динамики публикаций.

Нижний уровень представляют узкие группы методов прогнозирования, которые являются модификациями или разновидностями какого-либо наиболее общего метода.

На основании данной классификации и, используя предложенный авторами подход, основанный на сопоставлении классов объектов прогнозирования с классами методов прогнозирования, предлагается установить некоторую область методов, которые наилучшим образом соответствуют этому классу объекта, и таким образом проводить выбор метода при решении задачи разработки прогноза. Однако, как отмечают сами авторы, такой подход может быть использован только для ориентации при выборе метода прогнозирования под конкретный объект и не исчерпывает проблемы выбора метода полностью. Эта процедура является творческой, неформализуемой и наиболее сложной в общем комплексе проблем анализа и прогнозирования объекта.

На рис.1.4 приведена классификация методов прогнозирования, разработанная на основе анализа литературных источников [1, 5, 6, 9, 10, 11, 22].

Исследование различных классификационных схем методов прогнозирования позволяет выделить в качестве основных классов фактографические, экспертные и комбинированные методы, специализация которых обусловлена спецификой целей и задач, количеством и качеством исходной информации, периодом упреждения прогноза.

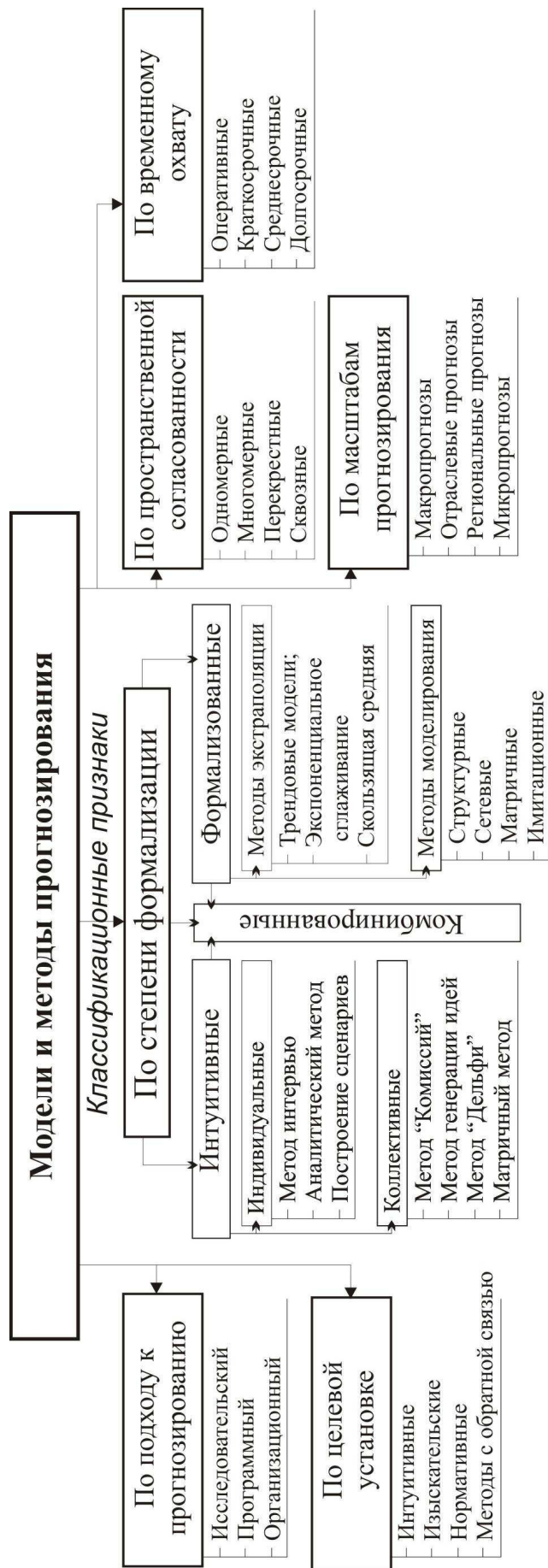


Рис. 1.4. Классификация методов и моделей прогнозирования

Выбор наиболее эффективного метода прогнозирования тесно связан с целью исследования, спецификой информации и заключается в определении относительно классификации методов прогнозирования характеристик каждого метода, перечня требований к ретроспективной информации и прогнозному фону.

Техника прогнозирования продолжает развиваться, и разрабатываются все новые и новые методы. Появление компьютеров, оснащенных соответствующим программным обеспечением, дало возможность использовать в целях прогнозирования очень сложный математический аппарат анализа данных, разрабатывать новые методы прогнозирования и совершенствовать уже известные. Так, большинство методов прогнозирования, используемых сегодня, были разработаны в прошлом столетии, однако некоторые получили свое развитие только в последнее время, например, процедуры Бокса-Дженкинса (Box-Jenkins) и нейронные сети, используемые для целей прогнозирования.

Бурное развитие электронно-вычислительной техники повысило доверие к методам прогнозирования, включающим сложную технику обработки данных, и сделало общедоступным использование существующих современных инструментов прогнозирования, базирующихся на количественных методах расчетов. В связи с этим в последние годы экспертное прогнозирование все больше уступает место прогнозированию, полученному посредством численных методов.

По мнению известного авторитета в области прогнозирования С. Макридакиса [23], прогнозы, использующие только оценку, не являются такими точными, как те, которые получены посредством численных методов.

К тому же стоимость прогнозирования, выполненного оценочными методами, часто оказывается значительно выше по сравнению с затратами на прогноз, выполненный с использова-

нием количественных методов.

Однако нельзя пренебрегать прогнозированием на основе качественных методов, которые эффективны и незаменимы как при средне- и долгосрочном прогнозировании, так и при прогнозировании в условиях отсутствия достаточного количества необходимой и достоверной информации об объекте прогнозирования.

Например, в последнее время приобретает все большую популярность метод оценки прогнозов сотрудниками компании. Это объясняется наличием знаний и необходимого опыта работы в предметной области, а также определенной интуиции в отношении развития рынка. Большое значение при прогнозировании также имеет проведение опросов потребителей с целью выявить их предпочтения и ожидания, на основе чего моделируется будущее.

Таким образом, для получения качественного прогноза необходимо эффективно свести воедино результаты количественной техники прогнозирования и качественной оценки, сохранив достоинства и исключив недостатки каждого из этих подходов, отдавая предпочтение количественным методам, и одновременно с механическими процедурами оперирования числовыми данными непременно применять оценку и здравый смысл.

#### **1.4. Обзор методов прогнозирования по временным рядам**

Задачи прогнозирования временных рядов находят практическое применение во многих сферах. Выбор конкретного метода прогнозирования зависит от объективности информации о прогнозируемом объекте, от вероятности наступления качественных изменений объекта, от наличия или отсутствия зависимостей

внутри массивов данных, от наличия или отсутствия повторяемости событий (сезонности).

Несмотря на многообразный набор методов прогнозирования, от простейших приемов усреднения до программно-аппаратных систем поддержки принятия решений, в реальной практике используются лишь некоторые. Например, в целях бизнеса, исходя из практической пользы и простоты использования, в основном применяют субъективные и некоторые количественные методы. Это объясняется тем, что в современных условиях ведения бизнеса человеческая интуиция все еще остается незаменимой и имеет преимущества перед численными методами, особенно когда внешние и внутренние факторы, оказывающие влияние на исследуемые показатели, изменяются слишком часто и непредсказуемо, а информация, на которую опираются численные методы, не всегда является прозрачной и достоверной, что снижает доверие к результатам прогнозирования.

Из совокупности статистических методов прогнозирования широкое практическое применение находят наиболее простые, а сложные, требующие специального образования, знаний, навыков, умелого пользования современным математическим аппаратом и прикладными пакетами программ, продолжают оставаться недостаточно востребованными.

Кроме того, чем сложнее метод, тем больше времени занимает процедура прогнозирования от подготовки данных до получения окончательного результата, и, чем сложнее метод, тем выше стоимость используемых прогностических систем. При этом не всегда удается достичь более высокой точности прогнозов применением сложных статистических методов прогнозирования.

Эти причины, а также консерватизм и недостаточная информированность руководителей и менеджеров фирм, тормозят проникновение научного прогнозирования в практику, хотя в на-

учных кругах прогрессивность и практическая польза от внедрения этих методов не вызывают сомнений.

Интерес представляют исследования специалистов [12] по оценке эффективности применения на практике в системах маркетинга количественных методов прогнозирования (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Применение количественных методов прогнозирования  
в системах маркетинга

Методы прогнозирования	Применение, % от числа предприятий (n=334)	Оценка надежности	Частота применения
1. Экстраполяция трендов	73.7	средняя	часто
2. Метод скользящей средней	67.7	средняя	часто
3. Регрессионный анализ	35.9	высокая	иногда
4. Экспоненциальное сглаживание	32.9	средняя	иногда
5. Моделирование	15.9	низкая	редко
6. Модель «Затраты-выпуск»	14.4	средняя	редко
7. Цепи Маркова	4.2	низкая	редко

Как видно из табл. 1.2, на практике наиболее часто используются методы прогнозной экстраполяции. Они хорошо зарекомендовали себя при краткосрочном прогнозировании по ретроспективной информации, значительно реже используются при определении среднесрочных прогнозов и совсем не применимы для долгосрочного прогнозирования, которое требует учета не столько ретроспективных, сколько перспективных направлений развития прогнозируемого объекта или явления.

Среди методов прогнозной экстраполяции популярной является экстраполяция трендов, выявляющая во временном ряде основную тенденцию с продлением ее в будущее. Этот метод пре-

дельно прост и дает возможность прогнозировать приблизительный «средний» результат, обеспечивающий неплохую точность на коротком промежутке времени. Модель не защищена от случайных флуктуаций, не учитывает сезонные колебания, поэтому плохо описывает ряды динамики со стабильными скачкообразными изменениями.

Метод скользящей средней применяется при краткосрочном прогнозировании: каждое последующее значение среднего рассчитывается на основе сдвигающегося вперед набора предыдущих значений. Отрицательной стороной использования метода скользящей средней является образование сдвигов в колебаниях уровней ряда, обусловленных «скольжением» интервалов укрупнения. Это может привести к появлению «обратных» колебаний, когда выпуклая «волна» заменяется на вогнутую.

Метод экспоненциального сглаживания прогнозирует будущие значения временных рядов на основании экспоненциального уменьшения влияния первых значений ряда в пользу более поздних наблюдений.

Метод экспоненциального сглаживания используется при коротко- и среднесрочном прогнозировании. На практике также применяется многократное экспоненциальное сглаживание, которое используется для прогнозирования развития процесса (явления).

Этот метод не требует большой информационной базы, но предполагает интенсивный анализ с точки зрения информационной ценности разных членов временной последовательности. В числе преимуществ метода также необходимо отметить его точность, которая увеличивается с увеличением числа уровней динамического ряда. При этом модели, которые описывают динамику показателя, имеют простое математическое формулирование. Недостатком метода является то, что отсутствует точный ме-

тод для выбора оптимальной величины константы сглаживания  $\alpha$ .

Перечисленные способы анализа и прогнозирования временных рядов дают очень упрощенное и не всегда точное представление о тенденции в ряду динамики, поэтому требуют корректного их применения.

Следует также отметить, что применение скользящей и экспоненциальных средних в качестве основы для прогностической оценки имеет смысл лишь при относительно небольшой колеблемости уровней временного ряда.

Необходимой предпосылкой обеспечения достоверности и качества прогноза в современных условиях должно выступать обеспечение адаптации статистических моделей к изменяющимся условиям развития. Поэтому на практике эффективными оказываются адаптивные методы, которые позволяют строить самокорректирующиеся модели, которые учитывая результат прогноза, сделанного на предыдущем шаге, разную информационную ценность членов динамического ряда, способны оперативно реагировать на условия, которые изменяются, и таким образом давать более точные прогнозы.

Хороший прогноз при прогнозировании по временным рядам можно получить при наличии детерминированного ряда, развитие которого определено и предполагается, что в будущем не произойдет каких-либо существенных изменений факторов, оказывающих влияние на ряд. Как правило, отдача от прогнозирования достигается при применении комплексных решений, включающих не только методы прогноза, но и средства оптимизации.

Для прогнозирования показателей бизнес-процессов по временным рядам используют статистические методы. Группа статистических методов включает методы, основанные на анализе характеристик (параметров, показателей) объекта прогнозирова-

ния, разложенных в хронологической последовательности. Среди таких методов наибольшее распространение получили экстраполяция, интерполяция, параметрический метод и др.

В настоящее время статистические методы прогнозирования заняли видное место в экономической практике. С развитием компьютерной техники, совершенствованием информационных технологий, распространением пакетов прикладных программ (ППП) эти методы стали важным инструментом в деятельности плановых, аналитических, маркетинговых отделов производственных предприятий и объединений, торговых, страховых компаний, банков, правительственных учреждений. Стремительное распространение ППП позволило сделать доступными и наглядными современные методы и подходы статистического прогнозирования. При этом применение эконометрического программного обеспечения позволяет создать для пользователя уникальную среду, в которой статистическая обработка данных становится научным исследованием, позволяющим получать многовариантные решения.

Процесс анализа и прогнозирования временных рядов с помощью статистических систем, как правило, включает следующие этапы:

- ввод данных в систему;
- визуализацию данных с помощью различных типов графиков;
- преобразование данных, адекватное выбранным статистическим методам;
- реализацию алгоритмов статистических методов;
- вывод результатов анализа в виде графиков и таблиц с числовой и текстовой информацией;
- интерпретацию полученных результатов.

Исследователь освобождается от проведения трудоемких

расчетов, построения таблиц и графиков, на его долю приходится творческая работа: постановка задачи, выбор методов прогнозирования, оценка качества полученных моделей, интерпретация результатов.

При использовании традиционных подходов и методов для прогнозирования важнейших экономических показателей на макро-, мезо- и микроуровнях часто выдвигается гипотеза о том, что основные тенденции и факторы, выявленные на предыстории, сохраняются и для периода упреждения (на прогнозируемом периоде). Таким образом, процесс экстраполяции выявленных закономерностей, тенденций базируется на предположении об инерционности анализируемых экономических систем.

В последнее время в процессе коренных социально-экономических преобразований подвижность этих систем возрастает. Наблюдаются существенные изменения в развитии промышленного комплекса, возрастает быстрота реакции на конъюнктуру внешнего и внутреннего рынков, на правительственные решения, на новые социально-экономические условия.

В связи с этим для прогнозирования таких сложных процессов требуется гибкий и современный статистический инструментарий, дающий возможность строить модели по коротким временным рядам, опираясь в основном на малое количество самых свежих данных, наделяя модели адаптивными свойствами.

Рассмотрим некоторые методы статистического прогнозирования.

В основе краткосрочных методов прогнозирования лежат принципы анализа временных рядов. Предусматривается, что имеется ретроспективная информация в виде значений прогнозируемого показателя, который наблюдается за определенный промежуток времени, то есть временной ряд  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Самым простым способом прогнозирования по временному

ряду является экстраполяция. Основанием для прогнозирования методами экстраполяции динамических рядов является, как уже было отмечено, инерционность социально-экономических процессов, которая особенно проявляется в краткосрочном периоде. Экстраполяция предполагает использование трендовых моделей, скользящего среднего или экспоненциального сглаживания.

Трендовые модели основываются на математическом выравнивании временного ряда посредством выбора функциональной зависимости. Выбор конкретной формы функциональной зависимости осуществляется на основе расчета коэффициентов, отражающих степень соответствия значений, получаемых посредством трендовой модели, фактическим ее значениям. Т.е. параметры модели оцениваются по имеющейся статистической базе, а затем основные тенденции (тренды) экстраполируются на заданный интервал времени. Причем все уровни ряда в одинаковой мере влияют на параметры уравнения и, таким образом, в одинаковой мере определяют и уровень прогнозируемых показателей.

Методология прогнозирования по трендовым моделям предполагает подгонку нескольких моделей для каждого временного ряда, их сравнение на основе статистических критериев и отбор наилучших из них для прогнозирования.

Часто фактические значения временного ряда, используемые для построения трендовой модели, не могут быть аппроксимированы какой-либо одной из простейших функциональных зависимостей (линейной, степенной, логарифмической, экспоненциальной и др.) для всей совокупности имеющихся данных в течение достаточного длительного временного интервала, что существенно ограничивает возможности метода и исключает его применение при средне- и долгосрочном прогнозировании. Поэтому трендовые модели могут использоваться только при краткосрочном прогнозировании и неприменимы к временным рядам

со стабильными скачкообразными изменениями.

Исключить случайные колебания значений уровней временного ряда можно с помощью нахождения «усредненных» значений.

Если имеет место допущение, что средний уровень ряда не имеет тенденции к изменению или эти изменения незначительны, используют модель, построенную на простом усреднении значений временного ряда [24], при этом ряд усредняется по достаточно длительному интервалу времени

$$Y(t+1) = \frac{Y(t) + Y(t-1) + \dots + Y(1)}{t}.$$

Такая модель является более устойчивой к флуктуациям, поскольку в ней сглаживаются случайные выбросы относительно среднего и делаются предсказания, основываясь на среднем значении ряда, тренде и сезонной компоненте. Таким образом, прогнозируемый уровень ряда будет равен среднему значению уровней в прошлом.

В случаях, когда имеющиеся данные динамического ряда не позволяют обнаруживать какую-либо тенденцию развития исследуемого процесса из-за случайных и периодических колебаний исходных данных, прибегают к методу скользящей средней, основанному на скользящем (пошаговом) усреднении. Метод экстраполяции по скользящей средней часто применяют для целей краткосрочного прогнозирования.

При прогнозировании с использованием скользящей средней используют два подхода: метод простой скользящей средней и метод взвешенной скользящей средней. Используя скользящую среднюю для выравнивания исходного ряда наблюдений, заменяют значение ряда  $y_t$  в середине интервала усреднения на ее среднее  $\bar{y}_t$  (простое или взвешенное) [11, с. 108]. Таким образом, при использовании скользящей средней происходит замена фак-

тических уровней временного ряда расчетными, имеющими значительно меньший разброс, чем исходные данные. При этом средние значения показателей ряда рассчитываются по группам данных за определенный интервал времени, причем каждая последующая группа образуется со сдвигом на один шаг, и средние как бы скользят от одного периода к другому, обновляясь и впитывая новую информацию.

В результате подобной операции первоначальные колебания временного ряда сглаживаются, а основная тенденция развития выражается при этом уже в виде некоторой плавной линии.

Скользящие средние позволяют сгладить как нерегулярные, так и периодические колебания, выявить имеющуюся тенденцию в развитии процесса и поэтому служат важным инструментом при фильтрации временного ряда [25, с. 43].

Когда предполагается, что более поздние значения временного ряда могут оказывать большее влияние на прогноз, применяют модель, основанную на использовании скользящего среднего по нескольким последним точкам временного ряда

$$Y(t+1) = \frac{Y(t) + Y(t-1) + \dots + Y(t-T)}{T+1}.$$

Таким образом, при прогнозировании исходят из простого предположения, что следующий во времени показатель по своей величине будет равен средней, рассчитанной за последний интервал времени.

Число значений для подсчета скользящей средней выбирается в зависимости от того, насколько важны старые значения исследуемого показателя в сравнении с новыми.

Несмотря на простоту и достаточно частое использование, метод простой скользящей средней может привести в ряде случаев к ошибочным выводам:

1. Используя несколько раз простую скользящую среднюю с

лагом  $m$  для нерегулярного ряда, можно получить ряд с целиком закономерным продолжением (эффект Слуцкого).

2. Поскольку веса одинаковы для всех уровней  $y_t$ , то в случае, если тренд изменяется не по линейному закону, можно получить недостоверные значения  $\bar{y}_t$ .

3. На средние значения  $\bar{y}_t$  влияют как предыдущие, так и следующие уровни, что при построении прогнозных моделей может противоречить причинно-следственным связям между уравнениями.

4. Если выбранный лаг усреднения  $m$  сопоставим или близок к периоду возможной периодической составляющей, которая имеет приблизительно постоянную амплитуду, то в сглаженной кривой ее влияние практически будет устранено, что может существенно способствовать утрате исследуемой информации [22].

Сглаживание временных рядов с помощью скользящих средних позволяет достаточно наглядно определить вид тренда, но при этом теряются начальные и конечные уровни ряда. Кроме того, тренд, полученный с помощью скользящих средних, не имеет количественного выражения, т.е. скорость изменения ряда неизвестна. При малом числе наблюдений метод часто приводит к искажению тенденций, а выбор величины интервала сглаживания бывает трудно обосновать, хотя от этого зависит форма кривой [1, с. 39].

Процедуры скользящих средних опираются на известную теорему Вейерштрасса [26], согласно которой «любая функция при самых общих допущениях может быть локально (т.е. в органичном интервале изменения ее аргумента  $t$ ) представлена алгебраическим полиномом подходящей степени».

Объединение наивных моделей с усредняющими моделями, когда используются среднее, тренд и сезонная компонента, и в то же время придается больший вес последним наблюдениям поло-

жено в основу метода экспоненциального сглаживания. Метод экспоненциального сглаживания представляет собой своеобразную модификацию метода скользящего усреднения и в настоящее время является популярным методом прогнозирования временных рядов.

Суть этого метода в том, что временной ряд сглаживается с помощью взвешенной скользящей средней, в которой веса распределяются по экспоненциальному закону, причем более старым наблюдениям приписываются экспоненциально убывающие веса. При таком сглаживании каждое новое значение (прогноз) рассматривается как взвешенное среднее текущего наблюдения и сглаженного ряда.

На основе метода экспоненциального сглаживания, предусматривающего разную ценность уровней временного ряда, строится адаптивное прогнозирование [6, с. 66].

Адаптивные методы считаются одним из наиболее перспективных направлений исследования и прогнозирования одномерных временных рядов. Они лежат в основе построения самокорректирующихся моделей, способных учитывать результат прогноза, сделанного на предыдущем шаге, «впитать» новую информацию, приспособиться к этой информации и отразить тенденцию развития, существующую в данный момент.

Адаптивное прогнозирование применяется тогда, когда предполагается, что более ценной является информация последнего периода, и следует в первую очередь обратить внимание на развитие тенденции, существующей в данный момент, а не тенденции, сложившейся в среднем на всем рассматриваемом периоде. При этом при прогнозировании полностью не отбрасывается информация за прошлые периоды, а учитывается различная информационная ценность уровней временного ряда в зависимости от их возраста и степени «устаревания» данных с помощью

определенной системы весов, в соответствии с которой вес каждого наблюдения уменьшается по экспоненте по мере его отдаления от момента, для которого определяется сглаженное значение, откуда и появилось название этого метода.

Формула простого экспоненциального сглаживания, дающая возможность представить прогноз в виде суммы фактического и сглаженного значения предыдущего наблюдения, взятых с определенным весом, имеет следующий вид:

$$S_t = \alpha X_{t-1} + (1 - \alpha) S_{t-1},$$

где  $X_{t-1}$  – наблюдаемое значение в предшествующий период;  $S_{t-1}$  – прогнозное значение предыдущего периода;  $\alpha$  – константа сглаживания (параметр сглаживания), характеризующая вес текущего наблюдения при расчете экспоненциальной средней.

Результат сглаживания зависит от параметра  $\alpha$ , который выбирается теоретическим и эмпирическим способом и находится в пределах  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

От значения этого параметра зависит, как быстро будет уменьшаться вес предыдущего наблюдения. Если исходные данные характеризуются небольшой изменчивостью, то постоянная сглаживания близка к 0. Если наибольшее значение имеют самые последние наблюдения, то  $\alpha$  необходимо выбирать близкое к 1. Однако необходимо учитывать, что при увеличении  $\alpha$  ухудшаются «фильтрационные» возможности экспоненциальной средней [27]. В ряде случаев величину параметра сглаживания целесообразно выбирать в интервале от 0,1 до 0,3 [28, с. 31]. Поиск компромиссного значения константы сглаживания составляет задачу оптимизации модели. В [29] предложен метод получения параметра сглаживания на основе ретроспективного анализа исходных данных путем решения обратной задачи прогнозирования.

Скольльзящие средние и экспоненциальное сглаживание от-

носятся к числу наиболее распространенных методов экстраполяции трендов, однако, как правило, не используются как самостоятельные при прогнозировании, но успешно применяются как вспомогательные при обработке данных и подготовке к решению задач прогнозирования. Однако следует отметить, что применение скользящей и экспоненциальных средних в качестве основы для прогностической оценки имеет смысл лишь при относительно небольшом колебании уровней временного ряда [27].

На данный момент разработаны модели экспоненциального сглаживания, которые возможно применять для динамических процессов с наличием тренда (аддитивного и мультипликативного) и сезонной составляющей.

В середине прошлого века Ч. Хольт предложил усовершенствованный метод экспоненциального сглаживания - метод двухпараметрического экспоненциального сглаживания, впоследствии названный его именем [24]. В предложенном алгоритме значения уровня и тренда сглаживаются с помощью экспоненциального сглаживания. Причем параметры сглаживания у них различны.

$$\begin{cases} \Omega_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(\Omega_{t-1} - T_{t-1}), \\ T_t = \beta(\Omega_t - \Omega_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \\ \hat{Y}_{t+p} = \Omega_t + pT_t. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение описывает сглаженный ряд общего уровня. Второе уравнение служит для оценки тренда. Третье уравнение определяет прогноз на  $p$  отсчетов по времени вперед.

Постоянные сглаживания могут подбираться путем перебора по этим параметрам с определенным шагом.

Частным случаем метода Хольта является метод Брауна, когда  $\alpha = \beta$ .

Недостатком методов Хольта и Брауна является то, что при

прогнозировании значений ряда не учитываются сезонные колебания.

Модель Винтерса (Winters) учитывает влияние последних переменных, тренд и сезонность. Ее называют трехпараметрическим экспоненциальным сглаживанием.

Система уравнений, описывающих метод Винтерса выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \Omega_t = \alpha \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1 - \alpha)(\Omega_{t-1} - T_{t-1}), \\ T_t = \beta(\Omega_t - \Omega_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \\ S_t = \gamma \frac{Y_t}{\Omega_t} + (1 - \gamma)S_{t-s}, \\ \hat{Y}_{t+p} = (\Omega_t + pT_t)S_{t-s+p}. \end{cases}$$

Дробь в первом уравнении служит для исключения сезонности из  $Y(t)$ . После исключения сезонности алгоритм работает с «чистыми» данными, в которых нет сезонных колебаний. Появляются они уже в самом финальном прогнозе, когда «чистый» прогноз, посчитанный почти по методу Хольта, умножается на сезонный коэффициент.

Для прогнозирования также применяются регрессионные модели, связывающие прогнозируемую зависимую переменную с несколькими выбранными независимыми.

При использовании таких моделей важным является правильный подбор коэффициентов регрессии, а также проверка адекватности построенной модели.

Известные во всем мире статистики Г.Е.П. Бокс (G.E.P. Box) и Г.М. Дженкинс (G.M. Jenkins) разработали принципиально новый и достаточно мощный класс алгоритмов для прогнозирования временных рядов [30].

Логическое построение моделей Бокса-Дженкинса можно

представить так [16]:

$$\begin{aligned}AR(p) + MA(q) &\Rightarrow ARMA(p, q) \Rightarrow ARMA(p, q)(P, Q) \Rightarrow \\ &\Rightarrow ARIMA(p, q, r)(P, Q, R) \Rightarrow \dots\end{aligned}$$

Одной из наиболее используемых среди этих моделей является модель авторегрессии (процесс авторегрессии). Эта модель описывает временной ряд, содержащий элементы, которые последовательно зависят друг от друга. Эту зависимость можно выразить в такой простейшей форме:

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где  $X_t$  – зависимая переменная в момент времени  $t$ ,  $a$  – параметр авторегрессии,  $\varepsilon_t$  – случайное воздействие,  $t = 1, \dots, n$ .

Такую модель называют процессом авторегрессии первого порядка и обозначают  $AR(1)$  (autoregressive). На практике также часто применяются процессы авторегрессии второго порядка ( $p = 2$ ).

Авторегрессионная модель порядка  $p$  обозначается  $AR(p)$  и имеет вид:

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Здесь каждое наблюдение есть сумма линейной комбинации  $p$  предыдущих наблюдений и случайной компоненты, на которую оказывают влияние переменные, которые не учитываются в данной модели.

Определить параметр авторегрессии можно различными способами, например, методом наименьших квадратов или, применяя систему уравнений Юла-Уокера, которая дает лучшие результаты подгонки модели авторегрессии к реальным статистическим данным.

В отличие от процесса авторегрессии, в процессе скользящего среднего каждый элемент ряда подвержен суммарному воздействию предыдущих ошибок. В общем виде это можно запи-

сать следующим образом:

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q},$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_q$  – параметры скользящего среднего.

Здесь текущее наблюдение ряда представляет собой сумму случайной компоненты в данный момент и линейной комбинации случайных воздействий в предыдущие моменты времени. Модель скользящего среднего порядка  $q$  обозначают: модель  $MA(q)$  (moving average).

Модель  $ARMA$  (autoregressive moving average) отражает смешанные процессы авторегрессии и скользящего среднего, т.е. обобщает две более простые модели – модель авторегрессии ( $AR$ ) и модель скользящего среднего ( $MA$ ). В нее для получения экономичной параметризации включены как члены, описывающие авторегрессию, так и члены, моделирующие скользящее среднее. Модель  $ARMA$  имеет более сложную структуру, но характеризуется меньшим количеством параметров по сравнению с моделями  $AR$  и  $MA$ , что является одним из ее преимуществ.

Модель авторегрессии-скользящего среднего характеризуется порядками его составляющих  $p$  и  $q$ , записывается  $ARMA(p, q)$  и имеет вид:

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}, \quad (1.12)$$

где  $c$  – константа,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  – авторегрессионные коэффициенты,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  – коэффициенты скользящего среднего.

Такая модель может интерпретироваться как линейная модель множественной регрессии, в которой в качестве объясняющих переменных выступают прошлые значения самой зависимой переменной, а в качестве регрессионного остатка – скользящие средние из элементов шумовой составляющей.

Для построения модели  $ARMA$  по серии наблюдений необ-

ходимо определить порядок модели  $p$  и  $q$ , а затем и сами коэффициенты. Для определения коэффициентов применяются такие методы, как метод наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия.

Модификационной формой модели  $ARMA$  является линейная нестационарная модель авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего:  $ARIMA$  – самый известный и используемый в настоящее время алгоритм. В отличие от рассмотренных методик прогнозирования временных рядов, в методологии  $ARIMA$  не предполагается какой-либо четкой модели для прогнозирования временного ряда. Задается лишь общий класс моделей, описывающих временной ряд и позволяющих как-то выразить текущее значение переменной через ее предыдущие значения. Затем алгоритм, подстраивая внутренние параметры, сам выбирает наиболее подходящую модель прогнозирования.

Модель  $ARIMA$  получается интегрированием  $ARMA$ . Ее обозначают  $ARIMA(p,d,q)$ , где  $p$ ,  $d$  и  $q$  – целые неотрицательные числа, характеризующие порядок для частей модели, соответственно авторегрессионной, интегрированной и скользящего среднего. При  $d$ , задающем уровень дифференцирования, равном нулю модель  $ARIMA$  эквивалентна  $ARMA$ .

На практике используется большое количество модификаций модели  $ARIMA$ .

Эконометрические, регрессионные и методы Бокса-Дженкинса в настоящее время являются общепризнанными методами прогнозирования временных рядов.

В последние годы при исследовании динамических процессов наряду с традиционными методами, все большее применение находят новые методы и, в частности, мощный и быстро развивающийся метод анализа и прогнозирования временных рядов «Гусеница» [31].

«Гусеница» – это относительно новый метод анализа временных рядов, который объединяет в себе элементы классического анализа, методы нелинейной динамики и обработки сигналов. К достоинствам метода «Гусеница» следует отнести отсутствие требования априорного знания модели ряда.

Метод «Гусеница», впервые предложенный в 1971 г., в настоящее время доведен до реализации на персональном компьютере и продолжается его теоретическое изучение.

В современной зарубежной литературе описан достаточно широкий класс методов, алгоритмически и идейно близких к методу «Гусеница», например, схожий по структуре метод SSA (Singular Spectrum Analysis), в русском переводе ACC (анализ сингулярного спектра). Имеются определенные аналогии метода «Гусеница» с динамическим анализом Фурье и вейвлет-анализом.

Метод «Гусеница» широко используется при обработке экспериментальных данных самого различного характера для восстановления и сглаживания первоначальных данных, для сжатия информации и прогнозирования. С его помощью оказывается возможным выделить отдельные слагаемые исходного ряда, такие как медленный тренд общего вида, медленные сезонные составляющие, периодические составляющие и случайные вариации. Это, в свою очередь, позволяет прогнозировать как сам временной ряд, так и тенденции развития различных его составляющих.

Устойчивость и надежность прогноза поддается проверке с использованием различных настроек метода «Гусеница».

Существуют принципиальные различия в применении «Гусеницы» при анализе коротких и длинных временных рядов. Для коротких временных рядов очень велика роль выбранной длины «гусеницы» и длины самого ряда, также существенную роль играют периодические составляющие.

При работе с длинными рядами «Гусеница» способна выделить сигнал из шума общего вида и одновременно разложить его на простые и интерпретируемые составляющие. При этом выбор длины «Гусеницы» существенно облегчается. Но вместе с тем работа с большими длинами «Гусеницы» предусматривает чисто вычислительные трудности и требует большого опыта и мастерства от исследователя.

К достоинствам данного метода следует отнести такие:

– метод позволяет раскладывать исходные ряды на тренд, периодические и шумовые составляющие без задания модели, но сравнение этого метода с «модельными» методами показывает хорошие результаты;

– метод позволяет исследовать как стационарные, так и нестационарные временные ряды;

– метод позволяет исследовать структуру временного ряда, выделить его отдельные простые компоненты и интерактивно прогнозировать тенденцию развития, как самого ряда, так и его слагаемых;

– метод эффективно применим к процессам, допускающим представление в виде суммы полиномиальных, экспоненциальных и периодических составляющих на фоне шума;

– метод применим к модулированным гармоникам, что выгодно отличает его от методов, в основе которых лежит метод Фурье;

– метод предоставляет возможность выбора управляющих параметров (длины ряда, длины окна (шаг «Гусеницы»), числа компонент) для лучшего разделения компонент ряда;

– результаты метода устойчивы, как к выбору длины гусеницы, так и к выбору варианта метода.

Особо следует отметить интерактивность метода, возможность интерпретации промежуточных результатов, визуального и

аналитического анализа информации о структуре изучаемого процесса и свойствах составляющих его слагаемых, возможность управления работой алгоритма в процессе многоэтапной процедуры обработки.

Метод «Гусеница» – это метод с очень широкой областью применения и в то же время простой в управлении, естественный, мощный, отличающийся наглядностью, однако он пока не нашел широкого применения, в частности, в технических приложениях.

В ближайшее время в связи с бурным развитием средств обработки информации ожидается переход от отдельных методов прогнозирования к системам поддержки принятия решений, использующим в работе элементы искусственного интеллекта и самообучения. Например, так называемые методы «мягких» вычислений, нейронные сети, генетические алгоритмы, известны уже несколько десятилетий, но на практике используются редко, в основном, компаниями, занимающимися активными операциями на финансовых рынках.

Нейросетевые модели бизнес-прогнозирования дают возможность исследовать зависимость прогнозируемой величины от множества независимых переменных и имеют значительные преимущества по сравнению с более простыми статистическими методами. Исследователю нет необходимости решать задачу выбора модели поведения временного ряда, построение нейросетевой модели происходит адаптивно по базе данных.

Недостатком нейронных сетей является их недетерминированность, что ограничивает их практическое применение.

Использование современных количественных методов в практике прогнозирования позволяет упорядочить, систематизировать исходную информацию, ускорять расчеты и повышать их точность, получать и анализировать многовариантные результаты, разрабатывать качественные прогнозы. Сфера практического

применения метода прогнозирования ограничивается состоянием информационного, математического, технического обеспечения используемых моделей, а также материальными возможностями пользователей.

### **Литература к разделу 1**

1. Френкель, А.А. Прогнозирование производительности труда: методы и модели [Текст]: моногр. / А.А. Френкель. – М.: Экономика, 2007. – 221 с.

2. Бестужев-Лада, И.В. Социальное прогнозирование [Текст]/ И.В. Бестужев-Лада. - М.: Педагогическое общество России, 2002. - 392 с.

3. Бестужев-Лада, И.В. Окно в будущее [Текст]/ И.В. Бестужев-Лада. - М.: Мысль, 1970. - 269 с.

4. Boardroom Reports, August 15, 1977, p. 10, in John C. Chambers, Satinder K. Mullick, and Donald D. Smith, An Executive's Guide to Forecasting (New York: Wiley, 1974). Reprinted from Boardroom Reports, Inc. Management's Source of Useful Information.

5. Дзоз, В.О. Класифікація прогнозів та їх реалізація в гуманітарній політиці держави [Текст] / В.О. Дзоз // Вісник НТУУ «КПІ». Філософія. Психологія. Педагогіка. - К., 2005. – №3, Ч. 1. – С. 6 – 15.

6. Грабовецький, Є.Б. Економічне прогнозування і планування [Текст]: навч. посіб. / Є.Б. Грабовецький. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188 с.

7. Льюис, К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей [Текст]: пер. с англ. / К.Д. Льюис. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 133 с.

8. Вартамян, В.М. Неопределенность в экономических процессах: факторы возникновения и методы описания [Текст] / В.М. Вартамян, Д.С. Ревенко, В.А. Лыба // Экономика и управление предприятиями машиностроительной отрасли: проблемы теории и практики: сб. науч. тр. – Вып. 2. – Х., 2009. – С. 4 – 12.

9. Добров, Г.М. Прогнозирование и оценки научно-технических нововведений [Текст] / Г.М. Добров, А.А. Коренной. — К.: Наук. думка, 1989. – 276 с.

10. Янч, Э. Прогнозирование научно-технического прогресса [Текст]: науч. изд. / Эрих Янч. – М.: Прогресс, 1980. – 568 с.

11. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування [Текст]: підручник / В.М. Геєць, Т.С. Клебанова, О.І. Черняк та ін. – 2-ге вид., виправл. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2008. – 396 с.

12. Багиев, Г.Л. Маркетинг-статистика. [Текст] / Г.Л. Багиев, Е.Л. Богданова. - М. 2000. - 108 с.

13. Лисенко, Ю. Нелінійна динаміка макроекономічних показників [Текст] / Ю. Лисенко, Л. Сергєєва // К.: Економіка України. – 2004. – №11 (516). – С. 7 – 34.

14. Черевиков, Є.Л. Моделі розрахункової загальної рівноваги у практиці державного регулювання економіки [Текст] / Є.Л. Черевиков, О.В. Стеценко // Вчені записки університету «Крок». - К., 2009. – №19. – С. 58 – 68.

15. Соловійова, М.І. З історії розвитку концепції системного планування і прогнозування [Текст] / М.І. Соловійова // Наука й економіка. - Хмельницький, 2009. – №4 (16). – Т.2.– С. 198 – 204.

16. Armstrong, J.S. Long-Range Forecasting: From Crystal Ball to Computer DJVU [Text] / J. S. Armstrong. - New York: Wiley, 1985. - 696 p.

17. Завьялов, П.С. Маркетинг в схемах, рисунках, таблицах

[Текст]/ П.С. Завьялов. - М.: Изд. дом «ИНФРА-М», 2007. - 496 с.

18. Ламбен, Ж. Стратегический маркетинг. Европейская перспектива [Текст]/ Ж. Ламбен. - СПб.: Наука, 1996. – 589 с.

19. Бестужев-Лада, И.В. Основные этапы разработки прогнозов. (К комплексной методике социального прогнозирования) [Текст]/ И.В. Бестужев-Лада // Социологич. исслед. - 1982, №1.

20. Дихтль, Е. Практический маркетинг [Текст] / Е. Дихтль, Х. Хершген. - М.: Высш. шк., 1995.- 255 с.

21. Лисичкин, В.А. Стратегический менеджмент: учебно-методический комплекс [Текст] / В.А. Лисичкин, М.В. Лисичкина. - М.: Изд. центр ЕАОИ, 2007. - 329 с.

22. Костюковський, Б.А. Формування узгоджених прогнозів розвитку економіки та енергетики з використанням оптимізаційних моделей [Текст] / Б.А. Костюковський, О.О. Максимець, А.І. Спітковський // Проблеми загальної енергетики. – К., 2008. – №18.– С. 21 – 23.

23. Makridakis, S. The Art and Science of Forecasting [Text] / S. Makridakis // International Journal of Forecasting 2, 1986. - P. 15–39.

24. Аналитические технологии для прогнозирования и анализа данных [Текст] / Электронный ресурс – [http://www.neuroproject.ru/forecasting\\_tutorial.php](http://www.neuroproject.ru/forecasting_tutorial.php). - НейроПроект, 1999-2005.

25. Корнічук, М. Складні системи з випадковою зв'язністю: ймовірнісне моделювання та оптимізація [Текст]: моногр. / М. Корнічук, І. Сотус. – К.: КНЕУ, 2003. – 374 с.

26. Коробейник, Ю.Ф. Теорема Стоуна – Вейерштрасса [Текст]: моногр. / Ю.Ф. Коробейник. – Ростов на/Д: РГУ, 1992. – 146 с.

27. Варталян, В.М. Модель, метод и инструментальные средства интервального прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания для случая неопределенности данных [Текст] / В.М. Варталян, Д.С. Ревенко // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2009. - №5. – С. 16 – 19.

28. Кулявець, В.О. Прогнозування соціально-економічних тенденцій [Текст]: навч. посіб. / В.О. Кулявець. – К.: Кондор, 2009. – 194 с.

29. Кононенко, А.В. Структурний та параметричний синтез прогнозних моделей бізнес-процесів в умовах дефіциту маркетингової інформації: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02 / Кононенко Антоніна Вікторівна; Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського «ХАІ». — Х., 2006. — 19 с.

30. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление [Текст] / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. - М: Мир, 1974. - 197 с.

31. Голяндина, Н.Э. Метод "Гусеница"-SSA: анализ временных рядов [Текст] / Н.Э. Голяндина. - СПб.: С. Петербургс. гос. ун-т, 2004. – 76 с.

32. Чернявский, А.П. Методы прогнозирования развития социально-экономических систем [Текст] / А.П. Чернявский. - ВлГУ: Электронные публикации.

33. Пукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования [Текст] / Ю.П. Пукашин. – М.: Статистика, 1979. – 420 с.

34. Варталян, В.М. Інформатизація економіки і управління: комп'ютерні інформаційні системи [Текст] / В.М. Варталян, Л.О. Філіпковська. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2008. – 184 с.

35. Варталян, В.М. Обзор и анализ методов прогнозирования динамических процессов с неопределенными данными

[Текст] / В.М. Вартамян, Д.С. Ревенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 41. – Х., 2009. – С. 177 – 182.

36. Воронков, Д.К. Взаимосвязь развития и изменений на предприятии [Текст] / Д.К. Воронков // Бизнес Информ.– Х., 2009. – №7. – С. 89 – 93.

37. Грешилов, А.А. Математические методы построения прогнозов: науч. изд. [Текст] / А.А. Грешилов, В.А. Стакун, А.А. Стакун. – М.: Радио и связь, 1997. – 112 с.

38. Грицюк, С.Н. Математические методы и модели в экономике [Текст]: учеб. / С.Н. Грицюк, Е.В. Мирзоева, В.В. Лысенко. – Ростов на/Д: Феникс, 2007. – 348 с.

39. Громыко, Л.Г. Теория статистики [Текст] / Г.Л. Громыко. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 414 с.

40. Екимов, Г.М. Инвестиции в условиях неопределенности [Текст]: моногр. / Г.М. Екимов, В.А. Батура. – Днепропетровск: Наука и образование, 2001. – 192 с.

41. Зюкин, Д.В. Рынок труда: предпосылки, проблемы, перспективы [Текст] / Д.В. Зюкин // Проблемы и перспективы развития банковской системы Украины: сб. науч. тр. – Сумы: УИБД. – 2010. – №28. – С 36. – 41.

42. Иванов, Н.Н. Информационно–сервисные системы в управлении сложным экономическим объектом [Текст]: моногр. / Н.Н. Иванов. – Донецк: ООО Юго–Восток, Лтд, 2005. – 252 с.

43. Информационные системы и технологии в экономике [Текст] / Т.И. Барановская, В.И. Лойко, М.И. Семенов, А.И. Трубилин. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.

44. Иванова, Н.В. Особливості прогнозування розвитку транспортних систем за умов зростання їх сукупного потенціалу [Текст] / Н.В. Иванова // Вісник Чернігів. держ. технолог. ун-ту. –

Чернігів, 2009. – №35. – С. 57 – 67.

45. К схеме баланса народного хозяйства СССР [Текст] / под ред. И. Петрова // Уч. зап. по статистике АН СССР. Отд. экономической науки. – М: АН СССР. – 1955. - №1.

46. Кальний, С.В. Фактори зовнішнього середовища та особливості оцінювання їх впливу на вітчизняних підприємствах [Текст] / С.В. Кальний // Теорії мікро-макроекономіки: зб. наук. пр. – К., 2009. – №33. – С. 130 – 140.

47. Каплан, Р. Сбалансированная система показателей [Текст] / Р. Каплан, Д. Нортон. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2004. – 210 с.

48. Катренко, А.В. Теорія прийняття рішень [Текст] / А.В. Катренко, В.В. Пасічник, В.П. Пасько. – К.: Вид. група ВНУ, 2009. – 448 с.

49. Квасній, Л.Г. Інфляційні очікування в економіці [Текст] / Л.Г. Квасній, О.Я. Щербан // Наук. вісник НЛТУ України. – Л., 2010. – №20.15. – С. 199 – 203.

50. Кириленко, О.Н. Використання методів математичної статистики для прогнозування розвитку ринку логістичних послуг в Україні в сучасних умовах [Текст] / О.Н. Кириленко, О.В. Кудрицька // Проблеми підвищення ефективності інфраструктури: зб. наук. пр. (Електронне видання). - К., 2010. – Вип. 26. – 270 с.

51. Клейнер, Г.Б. Эконометрические зависимости: принцип и методы построения [Текст]: науч. изд. / Г.Б. Клейнер, С.А. Смоляк. – М.: Наука, 2000. – 104 с.

52. Кобзій, О.В. Невизначеність в плануванні діяльності підприємства та шляхи її локалізації [Текст] / О.В. Кобзій // Економічний простір. – Д., 2009. – №30.– С. 150 – 161.

53. Лук'янихіна, О.А. Організація, технології та механізм антикризового управління підприємством [Текст] /

О.А. Лук'янихіна, Ю.В. Панасовський, Є.А. Мудрик // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: зб. наук. пр. – Суми, 2009. – №26. – С. 260 – 266.

54. Лук'янченко, І.Г. Прогнозування взаємозалежних макроекономічних показників [Текст] / І.Г. Лук'янченко, І.М. Данко // Наук. записки НаУКМА. - К.: Економіка. – 1999. – Т. 6. – С. 30 – 37.

55. Луцаевский, А.С. Современные методы принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / А.С. Луцаевский, Т.С. Чайникова // Системы обработки информации. - Х., 2007. – №7(65). – С. 104 – 106.

56. Макроекономічна політика в Україні: проблеми науки та практики [Текст]: моногр. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2007. – 352 с.

57. Максишко, Н.К. Система комплексної комп'ютерної підтримки аналізу та прогнозування економічної динаміки [Текст] / Н.К. Максишко, С.С. Чеверда // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – К., 2010. – № 81 [Електронний ресурс]: [http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc\\_Gum/Mise](http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum/Mise)

58. Матвійчук, А.В. Аналіз та прогнозування розвитку фінансово-економічних систем із використанням теорії нечіткої логіки [Текст]: моногр. / А.В. Матвійчук. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 206 с.

59. Мишенин, А.И. Теория экономических информационных систем [Текст]: учеб. / А.И. Мишенин. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 240 с.

60. Назаренко, О.М. Динамічне моделювання макроекономічного розвитку за допомогою декомпозиції траєкторії руху на складові [Текст] / О.М. Назаренко, П.І. Загряжська // Механізм регулювання економіки. - Суми, 2009. – №1. – С. 142 – 148.

61. Общая теория статистики: статистическая методология в изучении коммерческой деятельности [Текст]: учеб. /

А.И. Харламов, О.Э. Башина, В.Т. Бабурин и др. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 296 с.

62. Овечко, Г.С. Модели и методы исследования рисков на внутреннем рынке природного газа [Текст] / Г.С. Овечко, Д.В. Беленко // Модели управления в рыночной экономике: сб. науч. тр. – Донецк, 2007. – №10. – С. 92 – 104.

63. Попова, Н.В. Экономический механизм адаптации предприятия и управленческое консультирование [Текст] / Н.В. Попова, С.В. Андреев, И.В. Бублий // Коммунальное хозяйство городов: науч.-техн. сб. – Х., 2009. – № 89. – С. 195 – 201.

64. Порохня, В.М. Моделювання економіки [Текст] / В.М.Порохня. – Запоріжжя: ЗДІА, 2003. – 387 с.

65. Порохня, В.М. Прогнозування інноваційної діяльності на підприємстві [Текст] / В.М. Порохня, С. В. Єльченко, О. М. Крайник // Держава та регіони. – 2007. - №5. – С. 47–55.

66. Постанова Кабінету Міністрів України «Про концепцію національної статистики України та Державну програму переходу на міжнародну систему обліку і статистики» № 403 від 8 червня 1995 року / [Електронний ресурс]: <http://zakon1.rada.gov.ua>

67. Раєвнева, О.В. Управління розвитком підприємства: методологія, механізми, моделі [Текст]: моногр. / О.В. Раєвнева. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2006. – 496 с.

68. Сондерс, М. Методы проведения экономических исследований [Текст]: пер. с англ. / М. Сондерс, Ф. Льюис, Э. Торнхил. – М.: Эксмо, 2006. – 640 с.

69. Столярчук, М. Особливості антикризового управління підприємством з позиції теоретико-методологічного аналізу [Текст] / М. Столярчук // Вісник Львів. нац. ун-ту. Економічна серія. – Л., 2008. – №40. – С. 230 – 232.

70. Сунцова, О.О. Методологія дослідження макроекономічних показників розвитку національного господарства України

[Текст] / О.О. Сунцова // Менеджмент: зб. наук. пр. - К., 2010. – № 13. – С. 179 – 201.

71. А. Таха. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.

72. Тинякова, В.И. Математические методы обработки экспертной информации [Текст] / В.И. Тинякова. – Воронеж: ВГУ, 2006. – 68 с.

73. Указ Президента України «Про затвердження Стратегії інтеграції України до Європейського Союзу» (за станом на 5 липн. 2013 р.) [Електронний ресурс]: <http://zakon1.rada.gov.ua>

74. Указ Президента України «Про перехід до загальноприйнятої у міжнародній практиці систему обліку та статистики» (за станом на 6 квітня 2011 р.) [Електронний ресурс]: <http://zakon1.rada.gov.ua>

75. Федорович, Р.В. Аналітичний процес і його забезпечення [Текст] / Р.В. Федорович // Вісник ЖДТУ: Економічні науки. – Житомир, 2010. – №3 (53). – С. 256 – 257.

76. Федосеев, В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге [Текст]: учеб. пособие. - 2-е изд. / В.В. Федосеев, Н.Д. Эрлашвили. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 159 с.

77. Федосеев, В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели [Текст] / В.В. Федосеев. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

78. Ханк, Д.Э. Бизнес-прогнозирование: науч. издание [Текст] / Д.Э. Ханк, Д.У. Уичерн, А. Дж. Райтс. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 656 с.

79. Хил Лафуенте, А.М. Финансовый анализ в условиях неопределенности [Текст] / А.М. Хил Лафуенте. – Минск: Технология, 1998. – 150 с.

## РАЗДЕЛ 2

### СТРУКТУРНЫЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МОДЕЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

#### 2.1. Теоретические сведения и история развития моделей экспоненциального сглаживания

Как уже отмечалось, исторически метод экспоненциального сглаживания был независимо предложен Р. Брауном и Ч. Хольтом для процессов с постоянным трендом, с линейным трендом и для рядов с сезонной составляющей.

Предположим, что модель временного ряда имеет вид:

$$y_t = a_1 + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

где  $a_1 = const$ ,  $\varepsilon_t$  – случайные неавтокоррелированные отклонения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Для экспоненциального сглаживания используется рекуррентная формула:

$$S_t = \alpha y_t + \beta S_{t-1}, \quad (2.2)$$

где  $S_t$  – значение экспоненциальной средней в момент  $t$ ,  $\alpha$  – параметр сглаживания,  $\beta = 1 - \alpha$ .

Если последовательно использовать рекуррентную формулу, то экспоненциальную среднюю можно выразить через предшествующие значения уровней временного ряда:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha y_t + \beta S_{t-1} = \alpha y_t + \beta(\alpha y_{t-1} + \beta S_{t-2}) = \alpha y_t + \alpha\beta y_{t-1} + \beta^2 S_{t-2} = \\ &= \alpha y_t + \alpha\beta y_{t-1} + \alpha\beta^2 y_{t-2} + \dots + \alpha\beta^i y_{t-i} + \dots + \beta^n S_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом,

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i y_{t-i} + \beta^n S_0, \quad (2.4)$$

где  $n$  – длина ряда. При  $n \rightarrow \infty$   $\beta^n \rightarrow 0$ , следовательно,

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i y_{t-i}. \quad (2.5)$$

Р. Браун показал, что математические ожидания временного ряда и экспоненциальной средней совпадут, но в то же время дисперсия экспоненциальной средней  $D[S_t]$  меньше дисперсии временного ряда  $\sigma^2$ .

Представим выражение (2.5) в следующем виде:

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i y_{t-i} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (a_1 + \varepsilon_{t-1}) = a_1 + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-1}. \quad (2.6)$$

Отсюда очевидно, что математическое ожидание  $M(S_t) = a_1$ , так же как и математическое ожидание самого временного ряда.

Определим дисперсию экспоненциальной средней  $D[S_t]$ :

$$D[S_t] = M[(S_t - a_1)^2] = M\left[\left(\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-1}\right)^2\right]. \quad (2.7)$$

Учитывая свойства  $\varepsilon_t$ , можно записать:

$$D[S_t] = \alpha^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \sigma^2 = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \sigma^2. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что при высоком значении  $\alpha$  дисперсия экспоненциальной средней незначительно отличается от дисперсии ряда. С уменьшением  $\alpha$  дисперсия экспоненциальной средней сокращается, возрастает ее отличие от дисперсии ряда. Тем самым экспоненциальная средняя начинает играть роль «фильтра», поглощающего колебания временного ряда.

Таким образом, с одной стороны, следует увеличивать вес более свежих наблюдений, что может быть достигнуто повышением  $\alpha$ , с другой стороны, для сглаживания случайных отклонений значение  $\alpha$  нужно уменьшить. Эти два требования находятся в противоречии.

## 2.2. Модели, базирующиеся на простом экспоненциальном сглаживании

При расчете экспоненциальной средней в момент времени  $t$  всегда требуется значение экспоненциальной средней в предыдущий момент времени, поэтому на первом шаге должно быть определено некоторое значение  $S_0$  предшествующее  $S_1$ . Часто на практике в качестве начального значения  $S_0$  используется среднее арифметическое значение из всех имеющихся уровней временного ряда или какой-то их части. Из выражения (2.4) следует, что вес, приписываемый этому значению, уменьшается по экспоненциальной зависимости по мере удаления от первого уровня. Поэтому для длинных временных рядов влияние неудачного выбора  $S_0$  погашается. Однако при малых выборках это может привести к существенным ошибкам, так как, например, при  $\alpha = 0,1$  даже после 20 итераций вес начального значения  $S_0$  превышает веса других уровней ряда. Для элиминирования избыточного веса, придаваемого  $S_0$ , Р. Вейд [1] предложил модифицированную процедуру: пусть  $S_0' = \alpha S_0$ , тогда

$$S_1' = \alpha y_1 + (1 - \alpha) S_0' = \alpha y_1 + (1 - \alpha) \alpha S_0. \quad (2.9)$$

Так как весовые коэффициенты в сумме теперь не дают единицу, то вводится дополнительный множитель, равный обратной величине суммы коэффициентов:

$$S_1 = S_1' \frac{1}{\alpha + \alpha(1 - \alpha)} = \frac{\alpha y_1 + (1 - \alpha) \alpha S_0}{\alpha + \alpha(1 - \alpha)}. \quad (2.10)$$

Тогда на первой итерации при  $\alpha = 0,1$  вес текущего уровня  $y_1$  определяется выражением  $\frac{1}{2 - \alpha} = 0,526$ , а вес  $S_0$  уже равен

меньшему значению  $\frac{1-\alpha}{2-\alpha} = 0,474$ .

Таким образом, с помощью рассмотренного подхода удалось убрать избыточный вес, придаваемый начальному значению  $S_0$ , и распределить его пропорционально по всем уровням ряда. При использовании модифицированной модели прогнозы даже при коротких временных рядах будут в большей степени основаны на фактических данных, чем на предварительной оценке  $S_0$ . Р. Вейд разработал рекомендации, позволяющие при заданном значении параметра адаптации на определенной итерации возвращаться к обычной модели.

Экспоненциальное сглаживание – это пример самообучающейся модели. К ее безусловным преимуществам относится чрезвычайная простота вычислений, выполняемых итеративно, причем массив прошлой информации уменьшен до единственного значения  $S_{t-1}$ .

Если для прогнозирования временного ряда, имеющего ярко выраженную линейную тенденцию, использовать подход, опирающийся на модель экспоненциального сглаживания, то модель, как правило, будет давать смещенные прогнозы, т.е. систематическую ошибку. Для таких временных рядов целесообразно использовать модели линейного роста, также применяющие процедуру экспоненциального сглаживания.

В этих методах прогноз может быть получен с помощью следующего выражения:

$$\tilde{y}_\tau(t) = \tilde{a}_{1,t} + \tilde{a}_{2,t}\tau, \quad (2.11)$$

где  $\tilde{a}_{1,t}$  и  $\tilde{a}_{2,t}$  – текущие оценки коэффициентов;  $\tau$  – время упреждения прогноза.

В табл. 2.1 представлены три модели данного типа: двухпараметрическая модель Ч. Хольта, однопараметрическая модель

Р. Брауна и трехпараметрическая модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса, отличающиеся рекуррентными выражениями для пересчета текущих оценок коэффициентов (параметры адаптации или параметры экспоненциального сглаживания  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \leq 1$ ).

Таблица 2.1

Модели линейного роста для расчета прогноза  $\tilde{y}_\tau(t) = \tilde{a}_{1,t} + \tilde{a}_{2,t}\tau$

Название модели	Оценка коэффициентов
Модель Ч. Хольта	$\tilde{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(\tilde{a}_{1,t-1} + \tilde{a}_{2,t-1})$ $\tilde{a}_{2,t} = \alpha_2 (\tilde{a}_{1,t} - \tilde{a}_{1,t-1}) + (1 - \alpha_2)\tilde{a}_{2,t-1}$
Модель Р. Брауна	$\tilde{a}_{1,t} = \tilde{a}_{1,t-1} + \tilde{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2)e_t$ $\tilde{a}_{2,t} = \tilde{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2)e_t$
Модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса	$\tilde{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(\tilde{a}_{1,t-1} + \tilde{a}_{2,t-1}) + \alpha_3 (e_t - e_{t-1})$ $\tilde{a}_{2,t} = \alpha_2 (\tilde{a}_{1,t} - \tilde{a}_{1,t-1}) + (1 - \alpha_2)\tilde{a}_{2,t-1}$

В эконометрических пакетах чаще всего представлена модель Ч. Хольта с возможностью выбора оптимальных параметров по критерию минимума среднеквадратической ошибки путем перебора на сетке возможных значений. Рекуррентные формулы для оценки коэффициентов по этой модели могут быть преобразованы к следующему виду, явно показывающему зависимость «корректирующего воздействия» от величины ошибки:

$$\tilde{a}_{1,t} = \tilde{a}_{1,t-1} + \tilde{a}_{2,t-1} + \alpha_1 e_t, \quad \tilde{a}_{2,t} = \tilde{a}_{2,t-1} + \alpha_1 \alpha_2 e_t, \quad (2.12)$$

где  $e_t = y_t - \tilde{y}_1(t-1)$  – ошибка прогноза.

Из последних выражений видно, что частным случаем модели Ч. Хольта можно считать модель Р. Брауна, представленную в табл. 2.1. При этом единственный параметр  $\beta$  играет роль коэффициента дисконтирования наблюдений.

Трехпараметрическая модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса

представляет собой развитие модели Ч. Хольта, причем усовершенствование осуществляется путем включения в выражение для оценивания  $\tilde{a}_{1,t}$  разности ошибок.

В ряде работ проводилось теоретическое и экспериментальное сравнение различных моделей. В результате при обработке временных рядов значения коэффициента  $\alpha$  оказывались близкими к нулю, и авторы пришли к выводу о нецелесообразности включения в модель разности ошибок.

Таким образом, особенность метода экспоненциального сглаживания состоит в том, что в процедуре выравнивания каждого наблюдения используются только значения предыдущих уровней ряда динамики, взятых с определенным весом.

Сглаженное значение уровня ряда  $F_t$  на момент  $t$  определяется по формуле

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}, \quad (2.13)$$

где  $F_t$  – прогноз,  $\alpha$  – вес или константа сглаживания ( $0 < \alpha < 1$ ),  $A_{t-(i+1)}$  – текущие значения прошлого периода.

Зависимость (2.13) может быть представлена в следующей форме:

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \alpha(1-\alpha) A_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 A_{t-3} + \\ + \alpha(1-\alpha)^3 A_{t-4} + \dots + \alpha(1-\alpha)^n A_{t-n}. \quad (2.14)$$

### 2.3. Рекомендации по выбору настраиваемых параметров, обеспечивающих адекватность модели

При практическом использовании метода экспоненциального сглаживания возникают некоторые затруднения. Основными из них являются выбор значения сглаживающего параметра  $\alpha$ . От численного значения параметра  $\alpha$  зависит, насколько быстро будет уменьшаться вес предшествующих наблюдений и в соответствии с этим степень их влияния на сглаживаемый уровень. Чем больше значение параметра сглаживания  $\alpha$ , тем меньше сказывается влияние предшествующих уровней и соответственно меньшим оказывается сглаживающее воздействие экспоненциальной средней. Поиск компромиссного значения параметра сглаживания составляет задачу оптимизации модели, которая до сих пор до конца еще не решена.

Автор метода экспоненциального сглаживания английский ученый Р.Г. Браун предложил следующую формулу расчета  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{2}{m+1}, \quad (2.15)$$

где  $m$  – число уровней, входящих в интервал сглаживания. Величина  $m$ , а, следовательно, и  $\alpha$ , определяются в этом случае эмпирически.

В качестве удовлетворительного практического компромисса рекомендуется брать  $\alpha$  в пределах от 0,1 до 0,3.

Поиск оптимального значения параметра сглаживания адаптивных полиномиальных моделей может осуществляться также путем перебора различных его значений. В этом случае в качестве оптимального выбирается то значение  $\alpha$ , при котором получена наименьшая дисперсия ошибки прогнозирования, вычисленная либо при реализации процедуры сглаживания всего ряда динамики, либо на неиспользованном в расчетах участке ряда,

специально оставленного для проверки качества прогнозных моделей.

При оценивании оптимального значения  $\alpha$  возможные значения параметра разбиваются сеткой с определенным шагом. Например, рассматривается сетка значений от  $\alpha = 0,1$  до  $\alpha = 0,9$ , с шагом 0,1. Затем выбирается  $\alpha$ , для которого сумма квадратов (или средних квадратов) остатков (наблюдаемые значения минус прогнозы на шаг вперед) является минимальной.

Задачу выбора параметра  $y_0$ , определяющего начальные условия, предлагается решать следующим образом: если есть данные о развитии явления в прошлом, то в качестве  $y_0$  можно использовать среднюю арифметическую всех имеющихся уровней ряда динамики или какой-то их части, т.е.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ .

Если таких сведений нет, то в качестве  $y_0$  используют исходное (первое) значение уровня ряда динамики  $y_1$ . Вес, приписываемый этому уровню, быстро уменьшается по мере отдаления от первого уровня ряда, вместе с этим быстро уменьшается его влияние на размер экспоненциальной средней.

Анализируя прогнозы с помощью экспоненциальной средней, можно заметить, что они особенно плохи, когда ряд имеет убывающий или возрастающий тренд. В этих случаях прогнозы становятся либо завышенными, либо заниженными. Обращает на себя внимание и большая ширина доверительного интервала, что указывает на плохую адекватность модели прогноза. Это является основным недостатком экспоненциальной средней, как прогнозной модели.

Еще один недостаток модели экспоненциальной средней заключается в наличии эффекта запаздывания (смещения). Если ряд растет, то смещение положительное, т.е. прогнозы будут ниже действительных значений, а если ряд убывает – отрицатель-

ное, т.е. прогнозы будут выше действительных значений.

Конечно, равномерно возрастающие и равномерно убывающие ряды никто не прогнозирует с помощью экспоненциальной средней, но в реальных временных рядах могут быть участки с явным ростом и убыванием, на которых данный эффект будет проявляться, и это надо учитывать. Особенно заметно смещение прогноза во временных рядах, имеющих сезонную составляющую.

Естественно поставить вопрос об усложнении модели прогноза и приближении ее к реальному поведению тренда. Общий подход к построению такой модели заключается в том, что от исходных уровней переходят к сглаженным значениям, с помощью которых подбирают подходящий класс функций для моделирования тренда временного ряда. Оценку параметров находят с помощью выбранного метода. Главной задачей подобного подхода является правильная идентификация функции, описывающей поведение тренда. Поскольку экспоненциальная средняя, при малых значениях параметра сглаживания, дает сильное сглаживание уровней, которое может привести к неправильной идентификации тренда, ее использование в подобном подходе проблематично.

Если ряд имеет заметно возрастающий тренд, то экспоненциальная средняя будет запаздывать. Увеличение параметра сглаживания уменьшает запаздывание, но ухудшается сглаживание.

Исправить недостаток расхождения кривой прогноза и кривой действительных значений лучше всего, если воспользоваться модифицированной моделью экспоненциального сглаживания, в которой учитывается тренд:

$$S_t = \alpha A_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}), \quad (2.16)$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \quad (2.17)$$

$$F_{t+1} = S_t + T_t, \quad (2.18)$$

где  $S_t$  – начальный прогноз в период  $t$ ,  $T_t$  – тренд в период  $t$ ,  $F_{t+1}$  – прогноз на период  $t+1$  с учетом тренда,  $\beta$  – сглаживающая постоянная для тренда.

#### **2.4. Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания**

Как было указано ранее, поиск параметра сглаживания при прогнозировании методом экспоненциального сглаживания является очень сложной задачей для исследователя, ведь от параметра сглаживания зависит качество прогноза. Рассмотрим одну из упомянутых ранее задач прогноза с использованием экспоненциального сглаживания, состоящую в установлении константы сглаживания, которая характеризует особенности изменения конкретной экономической характеристики некоторого процесса, описываемого достаточно коротким динамическим рядом.

В качестве одного из методов получения необходимого результата рассматривается решение обратной задачи по имеющимся данным. Суть предлагаемого подхода состоит в расчете констант сглаживания для известных данных  $f_i$ , в моменты  $T_T$ ,  $T_{T-1}$ ,  $T_{T-2}$ , ..., а затем в решении прямой задачи вычисления прогнозного значения константы сглаживания в прогнозируемый момент времени –  $T_{II}$  методом сплайн-аппроксимации. Это позволит повысить достоверность прогноза за счет учета особенностей конкретных экономических процессов и адаптации прогнозной модели к специфике реальной ситуации.

**Пример.** Численные значения одного из параметров  $f$  некоторого исследуемого процесса, измеренные на рассматриваемых интервалах времени, представлены в табл. 2.2, а динамика

изменений имеет вид, представленный на рис. 2.1.

Константа сглаживания  $\alpha$  представляет собой настраиваемый параметр и может быть изменена для придания большего веса текущим данным (когда  $\alpha$  высока) или большего веса прошлым данным (когда  $\alpha$  низка).

Таблица 2.2

Численные значения рассматриваемых интервалов времени

№ интервала	Период	Значение параметра
1	$T_{T-10}$	3483
2	$T_{T-9}$	3651
3	$T_{T-8}$	3782
4	$T_{T-7}$	3893
5	$T_{T-6}$	3954
6	$T_{T-5}$	3999
7	$T_{T-4}$	3991
8	$T_{T-3}$	3942
9	$T_{T-2}$	3853
10	$T_{T-1}$	3739
11	$T_T$	3588
12	$T_{II}$	

Для рассмотренного примера

$$\begin{aligned}
 f_{12}(\alpha) = & 41875\alpha - 208150\alpha^2 + 614745\alpha^3 - 1211667\alpha^4 + \\
 & +1675747\alpha^5 - 1659010\alpha^6 + 1175215\alpha^7 - 583545\alpha^8 + \\
 & +193376\alpha^9 - 38481\alpha^{10} + 3483\alpha^{11}.
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

График зависимости прогнозируемого значения исследуемого параметра от величины константы сглаживания представлен на рис. 2.2.

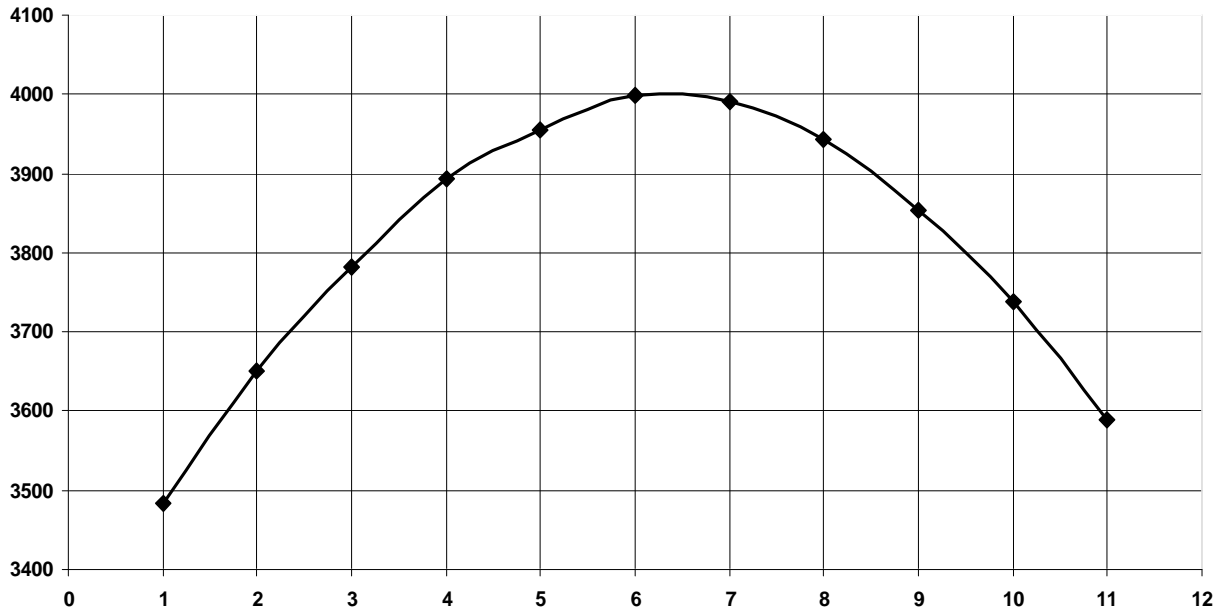


Рис. 2.1. Моделируемая функция исследуемого процесса

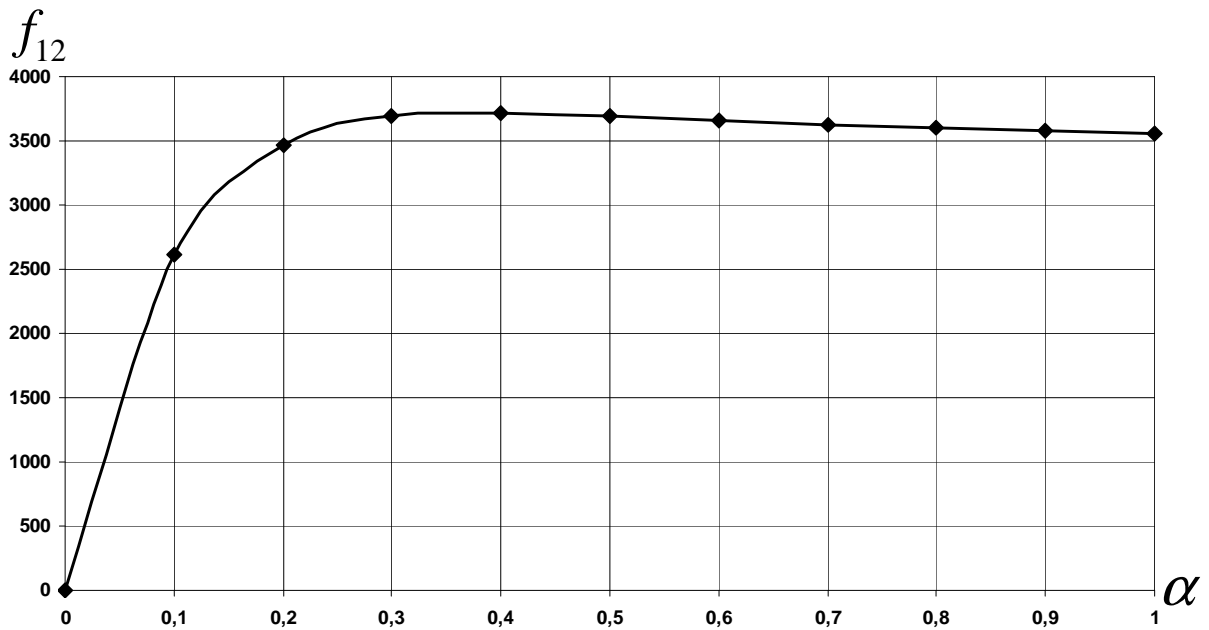


Рис. 2.2. График зависимости прогнозного значения от величины константы сглаживания

Построим последовательность полиномов относительно константы сглаживания для известных значений исследуемой функции по табл. 2.2.

Для  $T_T$ :

$$34998\alpha^9 - 169863\alpha^2 - 3588 - 766785\alpha^4 + 444882\alpha^3 + \\ + 908962\alpha^5 - 158378\alpha^8 + 425167\alpha^7 - 750048\alpha^6 + \\ + 38287\alpha - 3483\alpha^{10} = 0.$$

Откуда  $\alpha_T = 0,233731$ .

Для  $T_{T-1}$ :

$$34548\alpha - 135315\alpha^2 - 3739 + 451744\alpha^5 - 298304\alpha^6 + 126863\alpha^7 - \\ - 31515\alpha^8 + 3483\alpha^9 + 309567\alpha^3 - 457218\alpha^4 = 0.$$

Откуда  $\alpha_{T-1} = 0,296315$ .

Для  $T_{T-2}$ :

$$30695\alpha - 3853 + 204947\alpha^3 - 252271\alpha^4 + 199473\alpha^5 - 104620\alpha^2 - \\ - 98831\alpha^6 + 28032\alpha^7 - 3483\alpha^8 = 0.$$

Откуда  $\alpha_{T-2} = 0,377524$ .

Для  $T_{T-3}$ :

$$26753\alpha - 77867\alpha^2 + 3483\alpha^7 + 74282\alpha^5 - 24549\alpha^6 + 127080\alpha^3 - \\ - 125191\alpha^4 - 3942 = 0.$$

Откуда  $\alpha_{T-3} = 0,512089$ .

Для  $T_{T-4}$ :

$$-3991 + 22762\alpha - 55105\alpha^2 + 71975\alpha^3 - 53216\alpha + 21066\alpha - \\ - 3483\alpha^6 = 0.$$

Откуда  $\alpha_{T-4} = 0,858407$ .

График изменения константы сглаживания, построенный по найденным значениям методом линейной и кубической сплайн-аппроксимации, представлен на рис. 2.3.

Аппроксимирующие полиномы на интересующем нас участке имеют вид:

$$\alpha_{Пл} = 0,548 - 0,063t, \quad (2.20)$$

$$\alpha_{\text{Пк}} = 1,115857117 - 0,4131785548t + 0,07098213937t^2 - 0,004732142624t^3. \quad (2.21)$$

Совпадающее прогнозное значение константы сглаживания для линейной и кубической аппроксимации на рассматриваемый период составляет 0,17, что дает значение прогнозируемой величины на интервале № 12 равное

$$f_{12} = f_{11}\alpha + f_{10}\alpha(1-\alpha) + f_9\alpha(1-\alpha)^2 + f_8\alpha(1-\alpha)^3 + f_7\alpha(1-\alpha)^4 + f_6\alpha(1-\alpha)^5 + f_5\alpha(1-\alpha)^6 + f_4\alpha(1-\alpha)^7 + f_3\alpha(1-\alpha)^8 + f_2\alpha(1-\alpha)^9 + f_1\alpha(1-\alpha)^{10} = 3313. \quad (2.22)$$

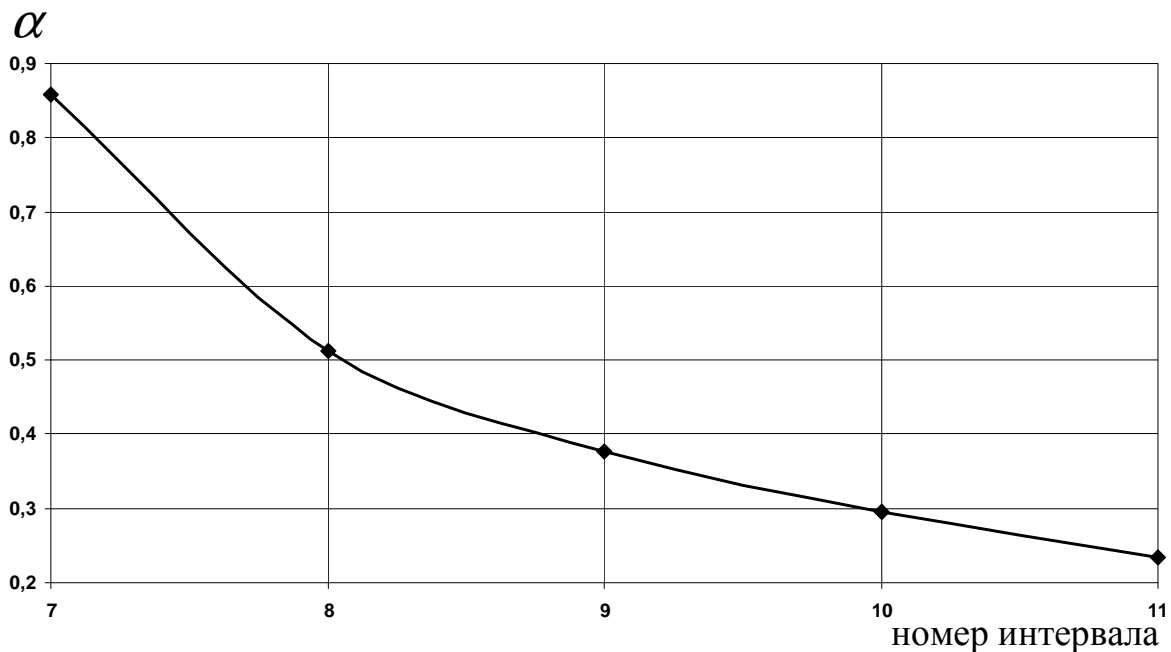


Рис. 2.3. Сплайн-аппроксимация константы сглаживания

С учетом того, что моделируемая функция в рассматриваемом примере известна, ошибка прогноза составляет 2,93%, что является вполне удовлетворительным с точки зрения прогноза.

### 2.4.1. Метод выбора константы сглаживания, учитывающий ошибку первоначального прогноза

Предлагаемый метод определения константы сглаживания позволяет учесть влияние ошибки первоначального прогноза и предусматривает следующую последовательность действий:

1. Определение кругового прогноза исследуемого параметра на всех рассматриваемых периодах временных серий в аналитической форме с использованием системы символьных вычислений как некоторого полинома

$$F_t(\alpha, F_0) = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}, \quad (2.23)$$

где  $t$  – количество рассматриваемых периодов,  $F_0$  – ошибка первоначального прогноза.

2. Расчет абсолютных отклонений прогнозируемой функции для каждого периода как разницы между круговым прогнозом, определяемым соотношением (2.23) и текущим значением рассматриваемого параметра.

3. Расчет аналитических (символьных) зависимостей оценок ошибок прогнозирования: среднего арифметического  $\varepsilon_{cao}(\alpha, F_0)$  и среднего квадратического  $\varepsilon_{cko}(\alpha, F_0)$  отклонений, и построение графиков этих функций для области определения константы сглаживания  $\{0 \leq \alpha \leq 1\}$ .

4. Установление значения константы сглаживания  $\alpha_m$ , доставляющего минимум соответствующим функциям ошибок

$$\begin{aligned} \min \varepsilon_{cao}(\alpha) &= \varepsilon_{cao}(\alpha_m^*), \\ \min \varepsilon_{cko}(\alpha) &= \varepsilon_{cko}(\alpha_m^{**}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Графики зависимостей  $\varepsilon_{cao}(\alpha, F_0)$  и  $\varepsilon_{cko}(\alpha, F_0)$  от константы сглаживания  $\alpha$  и от относительной ошибки первоначального

прогноза  $F_0$ , представлены на рис. 2.4.

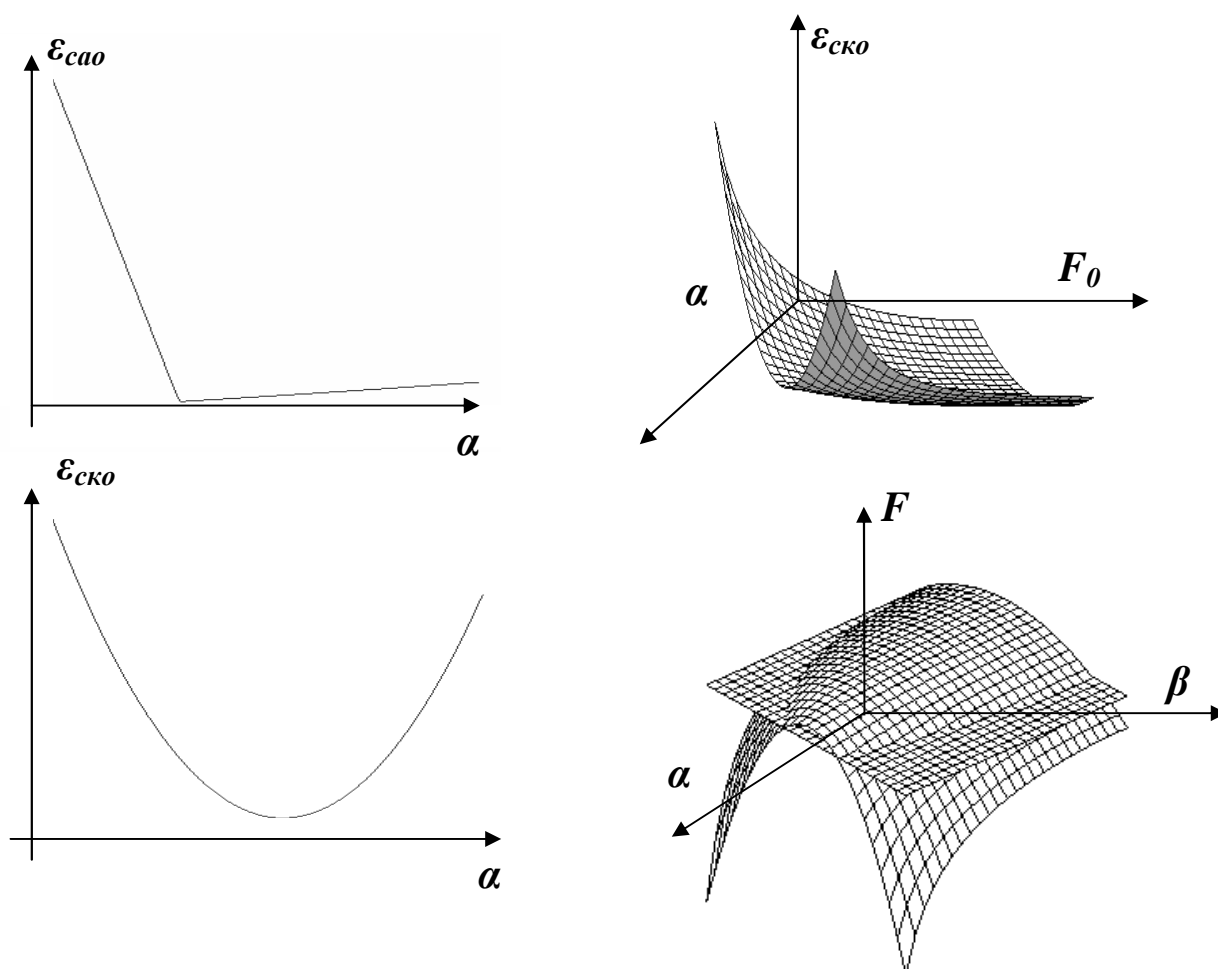


Рис. 2.4. Зависимость ошибок прогнозирования и прогнозного значения исследуемой функции от константы сглаживания и от относительной ошибки первоначального прогноза

### 2.4.2. Метод выбора константы сглаживания, учитывающий наличие в модели сглаживающей постоянной для тренда

Метод определения константы сглаживания в данном случае схож с описанным выше методом, учитывающим ошибку первоначального прогноза, но имеет свои особенности.

Предложенный метод состоит в следующем:

1. Определение кругового прогноза исследуемого параметра

на всех рассматриваемых периодах временных серий в аналитической форме с использованием системы символьных вычислений как некоторого полинома

$$F_t(\alpha, \beta) = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}, \quad (2.25)$$

где  $t$  – количество рассматриваемых периодов,  $\beta$  – сглаживающая постоянная для тренда.

2. Расчет абсолютных отклонений прогнозируемой функции для каждого периода как разницы между круговым прогнозом, определяемым соотношением (2.25) и текущим значением рассматриваемого параметра.

3. Расчет аналитических (символьных) зависимостей  $\varepsilon_{cao}(\alpha, \beta)$ ,  $\varepsilon_{ско}(\alpha, \beta)$  и построение графиков этих функций для области определения константы сглаживания  $\{0 \leq \alpha \leq 1\}$  и сглаживающей постоянной для тренда  $\beta \{0 \leq \beta \leq 1\}$ .

4. Установление значения константы сглаживания  $\alpha_m$ , доставляющего минимум соответствующим функциям ошибок

$$\begin{aligned} \min \varepsilon_{cao}(\alpha) &= \varepsilon_{cao}(\alpha_m^*), \\ \min \varepsilon_{ско}(\alpha) &= \varepsilon_{ско}(\alpha_m^{**}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Зависимость прогнозного значения некоторой функции от константы сглаживания  $\alpha$  и от сглаживающей постоянной для тренда  $\beta$  представлена на рис. 2.5.

Зависимость оценок ошибок прогнозирования  $\varepsilon_{cao}(\alpha, \beta)$ ,  $\varepsilon_{ско}(\alpha, \beta)$  и прогнозного значения от константы сглаживания  $\alpha$  и от сглаживающей постоянной для тренда  $\beta$  представлена на рис. 2.6.

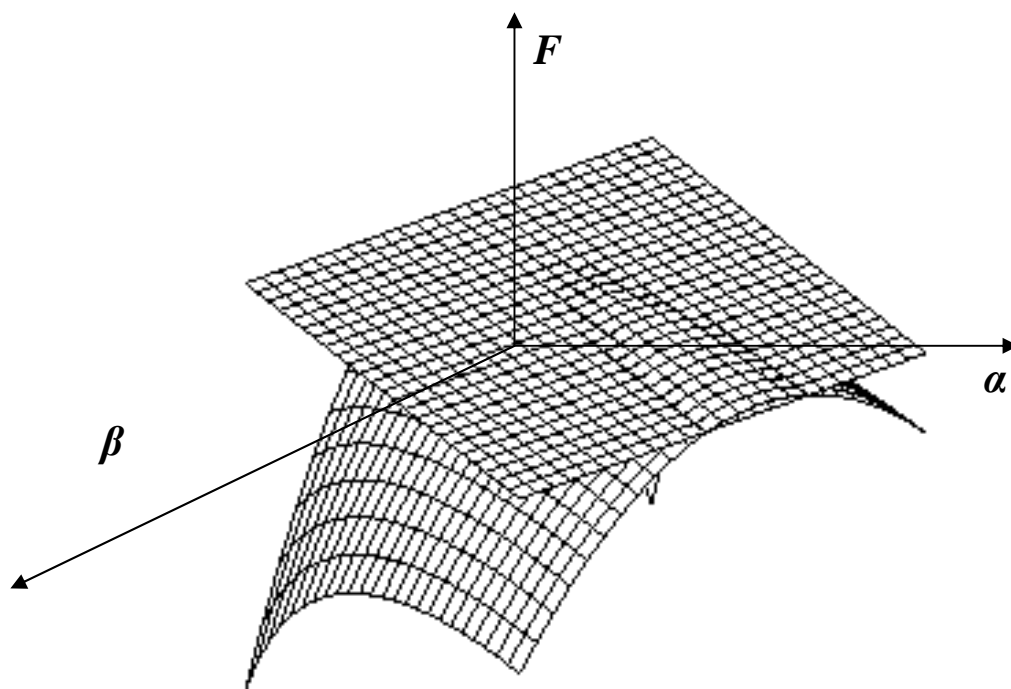


Рис. 2.5. Зависимость прогнозного значения от константы сглаживания и от сглаживающей постоянной для тренда

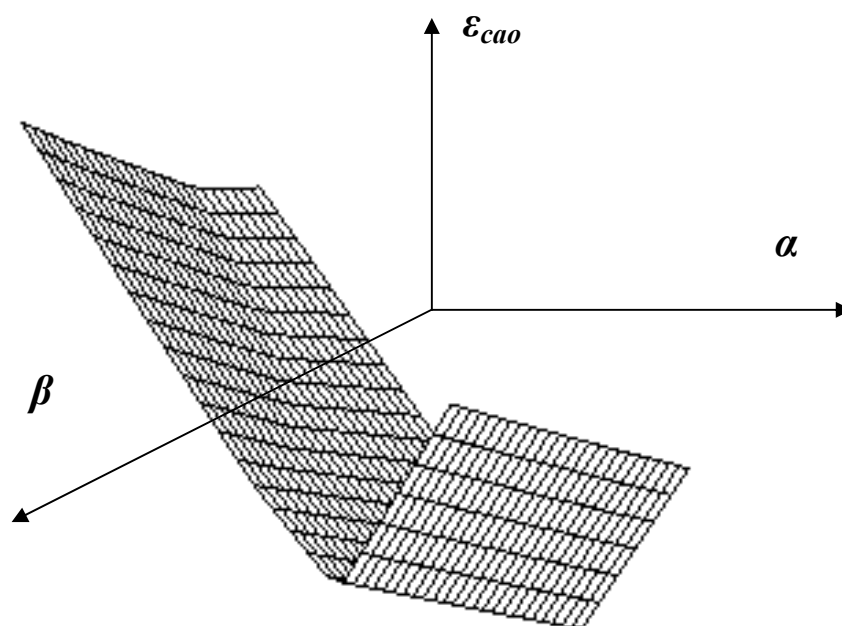


Рис. 2.6. Зависимость ошибки прогнозирования от константы сглаживания и от сглаживающей постоянной для тренда

### 2.4.3. Параметрический синтез модели экспоненциально-го сглаживания с учетом интервальной неопределенности

Экономические процессы характеризуются постоянной изменчивостью, и в будущем эти изменения будут нарастать. В настоящее время формализация макроэкономических процессов основана преимущественно на использовании точных данных. Однако, методы, основанные на определенности, оказываются неэффективными, потому что действительность не соответствует классической схеме. Применение вероятностных методов ограничено. Неадекватность получаемых прогнозных решений приводит к разработке новых методов прогнозирования. Естественно, что основой их должен быть классический инструментарий. Следовательно, становится необходимым использовать в классических прогнозных моделях новый математический аппарат, учитывающий ретроспективную неопределенность. Эффективным методом в решении подобных задач является использование аппарата интервального анализа, а именно представление переменных прогнозной модели в виде интервальных чисел.

Используем основную теорему интервального анализа [2, с. 30], которая гласит, что если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – рациональная функция вещественных аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и для нее определен результат подстановки вместо аргументов интервалов их измерений  $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$ , принадлежащий множеству всех правильных интервалов  $IR$ , и выполняются все действия над ними по правилам интервальной арифметики:

– сложение

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (2.27)$$

– вычитание

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (2.28)$$

– умножение

$$[x] \cdot [y] = \left[ \min\{\underline{x}y, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}y, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}y, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}y, \bar{x}\bar{y}\} \right], \quad (2.29)$$

– умножение на константу

$$c \cdot [x] = \begin{cases} \left[ c\underline{x}, c\bar{x} \right] & \text{если } c \geq 0 \\ \left[ c\bar{x}, c\underline{x} \right] & \text{если } c < 0 \end{cases}, \quad c \in R. \quad (2.30)$$

– деление

$$[x] / [y] = [x] \cdot \left[ 1 / \bar{y}, 1 / \underline{y} \right], \quad 0 \notin [y], \quad (2.31)$$

тогда

$$\begin{aligned} \left\{ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in [x_1], \dots, x_n \in [x_n] \right\} \subseteq \\ \subseteq [f]([x_1], [x_2], \dots, [x_n]), \end{aligned} \quad (2.32)$$

т.е.  $[f]([x_1], [x_2], \dots, [x_n])$  содержит множество значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $([x_1], [x_2], \dots, [x_n])$ .

Заменяем все переменные модели (2.13) интервальными числами вида  $[A_i] = [\underline{A}_i, \bar{A}_i]$ , где  $\underline{A}_i < A_i < \bar{A}_i$ , ( $i = 1, \dots, t$ ). Получаем интервальную модель экспоненциального сглаживания

$$\left[ \underline{F}_t, \bar{F}_t \right] = \alpha \cdot \left[ \underline{A}_{t-1}, \bar{A}_{t-1} \right] + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i \left[ \underline{A}_{t-(i+1)}, \bar{A}_{t-(i+1)} \right], \quad (2.33)$$

где  $\left[ \underline{F}_t, \bar{F}_t \right]$  – интервальное прогнозное значение показателя,  $\left[ \underline{A}_{t-1}, \bar{A}_{t-1} \right]$  – текущий интервальный показатель прошлого периода,  $\alpha$  – параметр сглаживания ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),  $t$  – количество рассматриваемых периодов.

Следует заметить, что использование полученной модели (2.33) усложнено «унаследованием» свойств структурных элементов модели – алгебраических свойств классической интервальной арифметики и специфики использования модели простого экспоненциального сглаживания.

Основные задачи, которые необходимо решить при использовании интервальной модели экспоненциального сглаживания со стороны элемента – модели простого экспоненциального сглаживания:

1. Выбор начального момента сглаживания (длины (базы) сглаживания или прогноза).
2. Выбор начального уровня сглаживания ряда  $[A_0]$ .
3. Выбор константы сглаживания  $\alpha$ .

Выбор начального момента сглаживания заключается в решении вопроса, с какой точки ряда начать сглаживание для построения прогноза. Проблема выбора начальной точки сглаживания тесно связана с проблемой выбора константы сглаживания [3, с. 22]. При выборе начального момента сглаживания необходимо опираться на главное свойство модели простого экспоненциального сглаживания – убывание весов сглаживания по мере удаления от конца ряда.

Следующей проблемой использования модели экспоненциального сглаживания является выбор начального условия сглаживания ряда. Существует два подхода к решению этой проблемы:

1. В качестве  $[A_0]$  взять первый член ряда, т.е. положить  $[A_0] = [A_1]$ .

2. Положить  $[A_0]$  равным среднему значению первых трех или предыдущих трех членов ряда. Наконец, если ряд  $[A_t]$  центрированный, т.е. тренд отсутствует, то в качестве  $[A_0]$  взять среднее значение ряда, рассчитанное для верхней и нижней границ соответственно.

При малых рядах предлагается использование следующего соотношения для определения начального условия  $A_0$  для нижней и верхней границ интервалов соответственно:

$$\underline{A_0} = \frac{\sum_{i=1}^t \underline{A_{t-1}}}{t-1}, \quad (2.34)$$

$$\overline{A_0} = \frac{\sum_{i=1}^t \overline{A_{t-1}}}{t-1}. \quad (2.35)$$

Заметим, что выбор начального уровня ряда имеет меньшее значение, чем выбор параметра сглаживания. При этом чем больше длина сглаживания ряда, тем меньший эффект на результат сглаживания, а значит, и на прогноз оказывает выбор  $[A_0]$  [3, 4, 5].

Для метода экспоненциального сглаживания основным и наиболее трудным этапом построения прогноза является выбор параметра сглаживания  $\alpha$ . Расчет этого коэффициента играет большую роль, так как именно он определяет коэффициенты модели, а следовательно, и результаты прогноза.

Как было замечено ранее, все подходы должны быть применены в каждом конкретном случае индивидуально, что усложняет поиск правильного решения. Поэтому для модели (2.33) был усовершенствован адаптивный метод поиска параметра сглаживания  $\alpha$  на основе ретроспективного анализа исходных данных путем решения обратной задачи прогнозирования [6, с.52]. Суть этого метода состоит в оценивании параметров сглаживания для известных данных динамического интервального ряда  $[A_t]$  (т.е. ретроспективное решение обратной задачи) и решении прямой задачи нахождения прогнозного значения параметра  $\alpha$  в прогнозируемый момент  $F_t$  на основе сплайн-аппроксимации. Этот метод позволяет повышать качество прогноза за счет адаптации прогнозной модели к реалиям экономического процесса.

Ретроспективный метод поиска параметра сглаживания предусматривает выполнение последовательных действий:

*Шаг 1.* Задаем динамический интервальный ряд  $[A_t]$  и глубину ретроспективного анализа.

*Шаг 2.* Определяем параметр сглаживания для прогноза на предыдущий период  $(t-1)$  путем решения полиномиального уравнения относительно  $\alpha_{t-1}$ :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{A}_{t-1}, \overline{A}_{t-1} \right] &= \alpha_{t-1} \left[ \underline{A}_{t-2}, \overline{A}_{t-2} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{t-2} \alpha_{t-1} \cdot (1 - \alpha_{t-1})^i \cdot \left[ \underline{A}_{t-(i+1)}, \overline{A}_{t-(i+2)} \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

где  $\left[ \underline{A}_{t-1}, \overline{A}_{t-1} \right]$  – реальное значение параметра в момент времени  $t-1$ .

Если уравнение имеет вещественные корни на интервале  $\alpha \in [0,1]$ , то это значит, что найденное значение  $\alpha_{t-1}$  позволило бы получить совершенно точный прогноз на момент времени  $t-1$ . В качестве метода поиска корней полиномиального уравнения, заданного интервальными коэффициентами, можно использовать интервальный метод Ньютона [7,8].

*Шаг 3.* Последовательно повторяя первый этап по всей или части временной серии, получаем ряд полиномиальных уравнений с интервальными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \left[ \underline{A}_{t-n+1}, \overline{A}_{t-n+1} \right] &= \alpha_{t-n+1} \cdot \left[ \underline{A}_{t-n}, \overline{A}_{t-n} \right], \\ &\dots\dots\dots, \\ \left[ \underline{A}_{t-2}, \overline{A}_{t-2} \right] &= \alpha_{t-2} \cdot \left[ \underline{A}_{t-3}, \overline{A}_{t-3} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{t-3} \alpha_{t-2} \cdot (1 - \alpha_{t-2})^i \cdot \left[ \underline{A}_{t-(i+3)}, \overline{A}_{t-(i+3)} \right], \\ \left[ \underline{A}_{t-1}, \overline{A}_{t-1} \right] &= \alpha_{t-1} \cdot \left[ \underline{A}_{t-2}, \overline{A}_{t-2} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{t-2} \alpha_{t-1} \cdot (1 - \alpha_{t-1})^i \cdot \left[ \underline{A}_{t-(i+1)}, \overline{A}_{t-(i+2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Таким образом, имеем последовательность значений  $\alpha$  для всех моментов временной серии, кроме первого:

$$\{\alpha\} = \{\alpha_{t-1}, \alpha_{t-2}, \alpha_{t-3}, \dots, \alpha_{t-n+1}\}. \quad (2.38)$$

*Шаг 4.* Экстраполируем полученную тенденцию (2.38) на момент времени  $t$  для получения прогнозного значения  $\alpha_t$ .

При использовании интервальной модели экспоненциального сглаживания следует учитывать алгебраические свойства классической интервальной арифметики:

1. Ассоциативность и коммутативность.
2. Субдистрибутивность.
3. Монотонность по включению [2, с. 43 – 44].

Использование интервальной модели экспоненциального сглаживания имеет свои ограничения, преимущества и недостатки.

Ограничения интервальной модели экспоненциального сглаживания:

- количество уровней должно быть не менее четырех;
- возможность прогнозирования только рядов без пропусков данных;
- прогнозирование процессов с равными интервалами времени;
- модель дает лучший прогнозный результат при прогнозировании инерционных процессов.

Преимущества полученной интервальной модели экспоненциального сглаживания:

- модель дает возможность проводить прогнозирование не только интервальных динамических рядов, но и классических рядов с включениями интервальных данных, тогда уровни рядов – классические вещественные числа – заменяются вырожденными интервалами (интервалами с нулевой шириной);
- интервальность переменных модели экспоненциального

сглаживания позволяет описать достаточно широкий круг задач с ретроспективной неопределенностью;

- метод достаточно прост и удобен в использовании и реализации по сравнению с другими методами прогнозирования;

- метод обеспечивает быстрое реагирование прогноза на все события, происходящие на протяжении определенного периода, что позволяет построить так называемую «адаптивную прогнозную модель»;

- для построения прогноза на основе экспоненциального сглаживания необходимо задать только лишь начальную оценку прогноза, после чего можно прогнозировать при поступлении данных без необходимости заново строить процедуру вычисления прогноза;

- в экспоненциальном сглаживании значения весов убывают со временем, поэтому здесь нет точки, на которой веса обрываются, т.е. зануляются;

- при увеличении  $\alpha$  значения экспоненциальной средней будут близкими к значениям уровней и хорошо реагировать на изменения в уровнях, что является достаточно эффективным при прогнозировании макроэкономических процессов;

- ретроспективный метод поиска параметра сглаживания дает возможность получать параметр модели таким образом, чтобы уменьшить автокорреляцию в остатках.

К недостатку интервальной модели экспоненциального сглаживания необходимо отнести экспоненциальное возрастание границ результирующего интервала при умножении или делении интервала на интервал.

#### 2.4.4. Метод комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервальных динамических рядов

В связи с тем, что модель экспоненциального сглаживания, описанная в подразделе 2.2, обладает рядом ограничений, проблематично ее использование на практике. Реализация любой создаваемой модели предполагает разработку систематизированной совокупности шагов, действий, которые необходимо предпринять, чтобы использовать на практике разработанную модель. Следовательно, необходимо решить задачу разработки метода комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервальных динамических рядов на основе интервальной модели экспоненциального сглаживания.

В большинстве временные ряды экономических процессов имеют систематические (регулярные) составляющие: тренд – основную тенденцию ( $T_t$ ), циклические и сезонные колебания ( $S_t$ ), а также нерегулярную компоненту, случайную или остаточную компоненту, одноразовое воздействие, аномальный уровень ( $e_t$ ).

В общем виде временной ряд  $y_t$  можно представить

$$y_t = f(T_t, S_t) + e_t. \quad (2.39)$$

Большинство интервальных экономических процессов  $[y_t]$  можно представить в аддитивной форме

$$[y_t] = [T_t] + [S_t] + [e_t], \quad (2.40)$$

где  $[T_t]$ ,  $[S_t]$ ,  $[e_t]$  – интервальное представление тренда, циклической и нерегулярной компонент соответственно. В качестве примера можно разложить временной ряд уровня безработицы в 2006-2010 гг. (рис. 2.7 – 2.11).

На рис. 2.7 приведен график динамики уровня безработицы, заданный интервальными данными, полученными экспертным

путем. Интервальная неопределенность данных на рис. 2.8 связана как с методическими и параметрическими ошибками, так и с присутствием «теневого безработицы» и «теневого занятости». Сплошной линией показан официальный уровень безработицы (согласно Государственному комитету статистики Украины), который, в свою очередь, не включает данных о населении, занятом натуральным хозяйством на приусадебных участках и в собственном хозяйстве. При формировании официальных данных проводится выборочное исследование домохозяйств, что, в свою очередь, формирует ошибку статистических результатов. Кроме того, существуют случаи, когда безработный числится на бирже труда и осуществляет трудовую деятельность («теневая занятость»), или же безработные не числятся на бирже труда и не осуществляют трудовую деятельность. Все перечисленное приводит к интервальной неопределенности в динамике уровня безработицы.

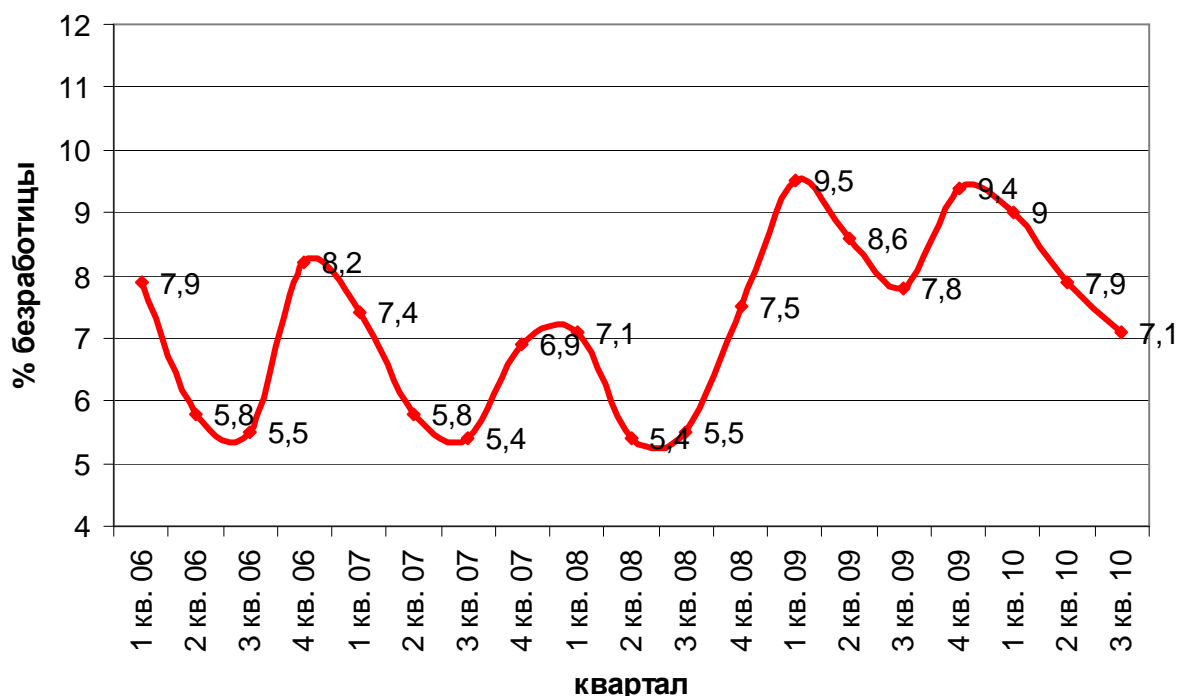


Рис. 2.7. Динамика официального уровня безработицы (% к экономически активному населению)

На рис. 2.9 изображен тренд – основная тенденция развития процесса. Как видно, он возрастающий, что говорит о росте количества безработного населения.

Извлекаем тренд из исходного ряда и рассчитываем уровень индекса сезонности.

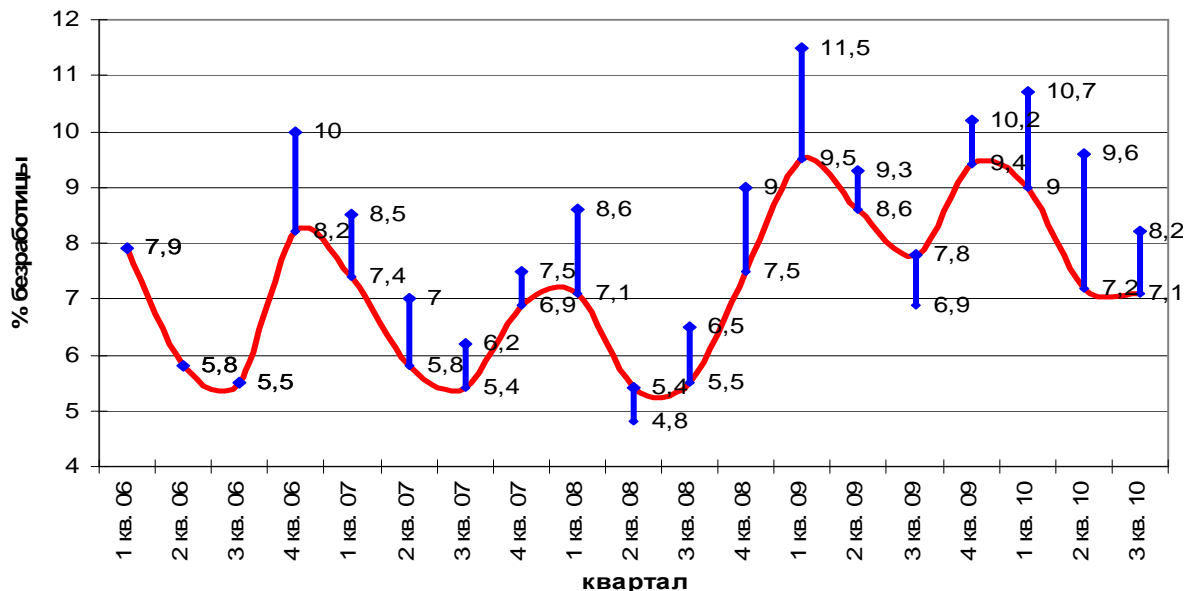


Рис. 2.8. Динамика уровня безработицы, заданного интервальными данными, полученными экспертным путем (% к экономически активному населению)

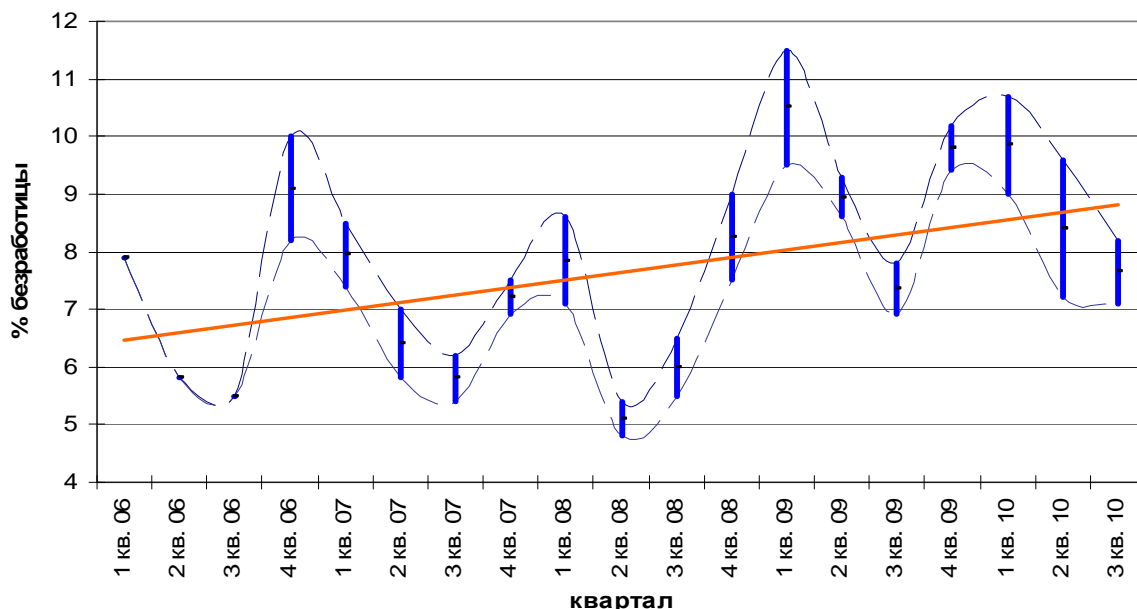


Рис. 2.9. Динамика уровня безработицы, заданного интервальными данными, и тренд, рассчитанный по средним значениям интервалов (% к экономически активному населению)

На рис. 2.10 изображен фазовый портрет квартальной сезонности уровня безработицы. Как видно из рисунка, процесс имеет явно выраженную сезонность. Безработица растет к концу года, в начале следующего года и снижается к третьему кварталу, что связано с сезонными полевыми работами населения, а также активизацией в строительной сфере.

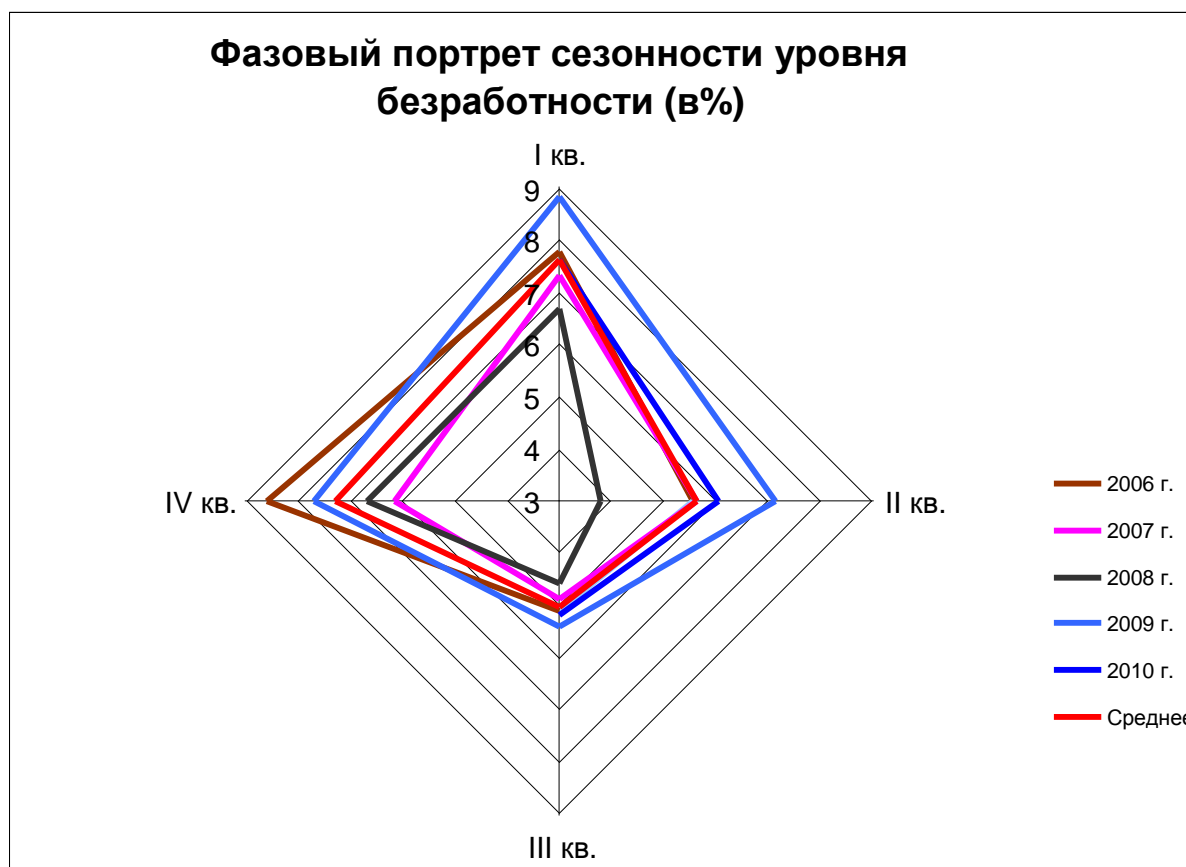
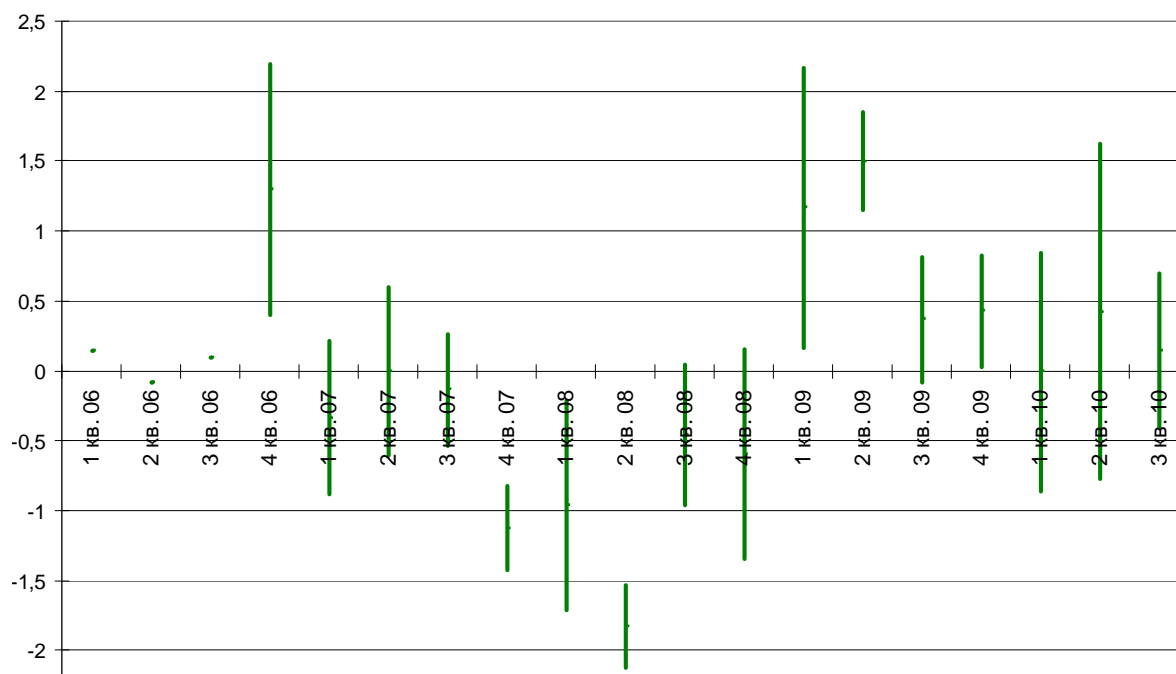


Рис. 2.10. Фазовый портрет квартальной сезонности уровня безработицы (% к экономически активному населению)

Из ряда с элиминированным трендом выделяем сезонную компоненту на основе расчета поправочных коэффициентов и получаем ряд нерегулярных интервальных компонент (рис. 2.11).

В связи с тем, что модель экспоненциального сглаживания показывает лучший прогнозный результат при прогнозировании слабостационарных и инерционных процессов, а также учитывая тот факт, что большинство экономических процессов обладают

системными составляющими, возникает необходимость заложить процедуры идентификации и прогнозирования системных составляющих интервальных динамических рядов в разрабатываемый метод. Это реализовано в описанной ниже последователь-



ности этапов комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервальных динамических рядов.

Рис. 2.11. График нерегулярных интервальных компонент уровня безработицы (в %)

Разработанный метод состоит из 10 последовательных этапов, которые приведены ниже (рис. 2.12).

*Этап 1. Формулировка целей и задач прогнозирования.*

На подготовительном этапе проводится краткое описание прогнозируемого процесса, выявляются факторы, которые сгенерировали неопределенность в исходных данных. Дается формулировка целей и задач исследования, выдвигается гипотеза о виде конечного результата прогнозирования.

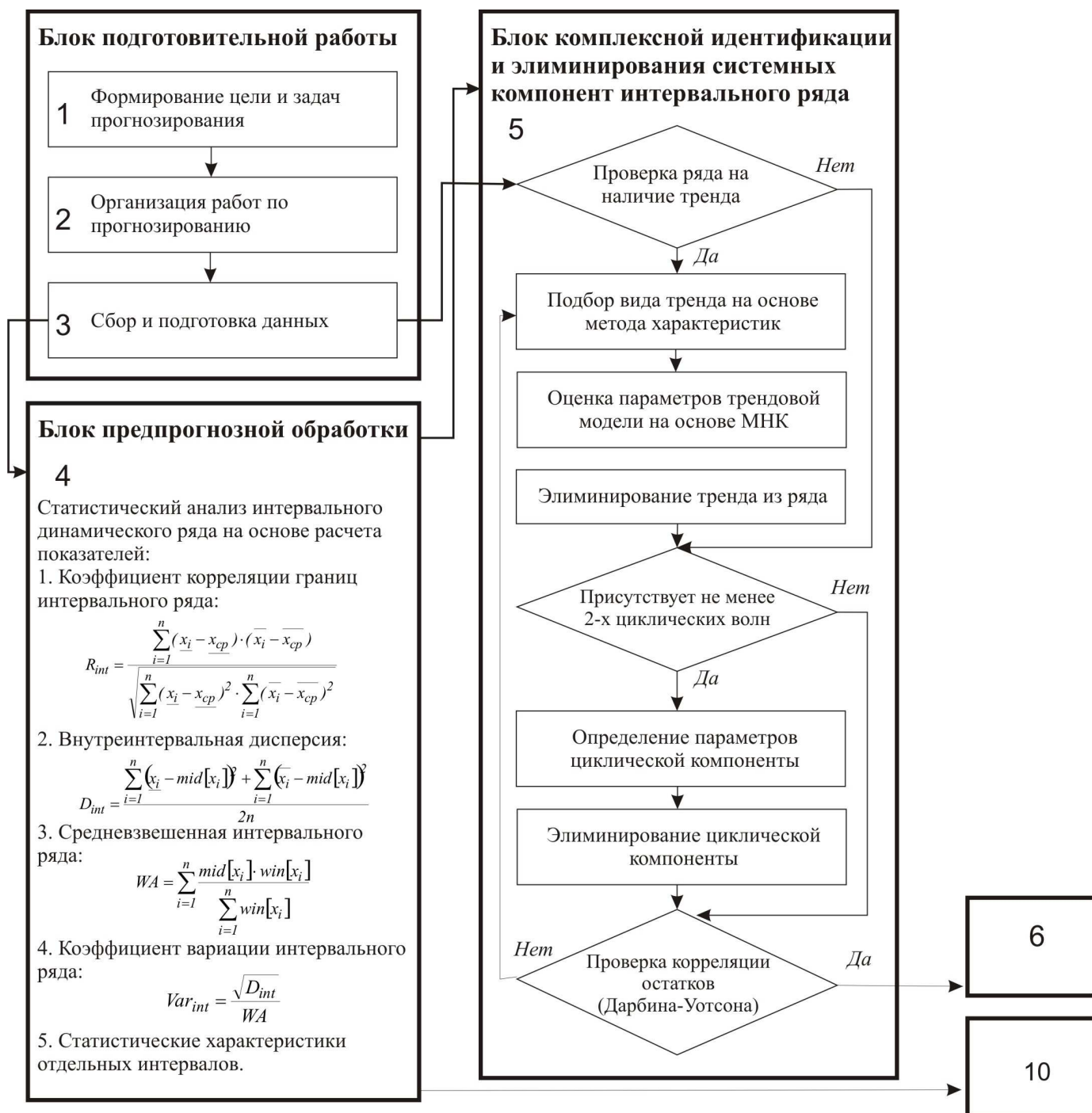


Рис. 2.12-а. Метод комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервальных динамических рядов (этапы 1-5)

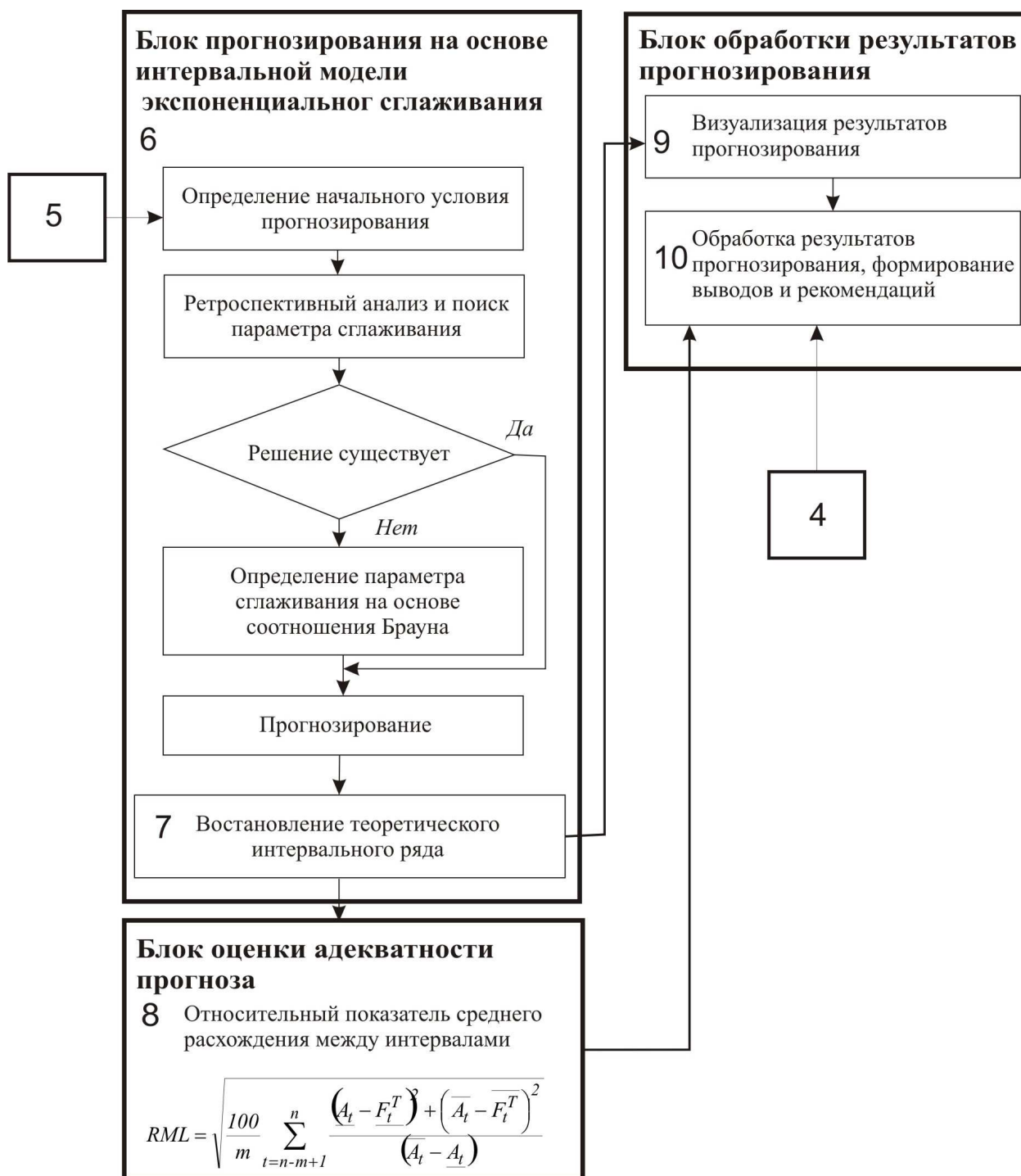


Рис. 2.12-б. Метод комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервальных динамических рядов (этапы 6-10)

*Этап 2. Организация работ по проведению процесса прогнозирования.*

Организация работ по прогнозированию представляет собой комплекс взаимосвязанных мероприятий, направленных на создание условий для прогнозирования с целью подготовки информации для принятия оперативных и стратегических решений. В рамках этого этапа необходимо решить следующие задачи: собрать и систематизировать необходимую информацию для прогнозирования, при необходимости - подготовить специалистов, владеющих основными приемами и методами прогнозирования.

*Этап 3. Сбор и подготовка исходных данных для проведения прогнозирования.*

На этом этапе проведения исследования формируется и подготавливается исходный интервальный ретроспективный ряд  $[x_1], [x_2], [x_3], \dots, [x_n]$  для прогнозирования.

*Этап 4. Статистическая обработка исходных количественных данных, анализ и формулировка предварительных выводов.*

В рамках этого этапа, с целью анализа динамики и варибельности прогнозируемого ряда, а также получения дополнительной информации об исследуемом процессе, проводится предпрогнозный анализ динамического интервального ряда.

Основные показатели, рассчитываемые при проведении предпрогнозного анализа перечислены ниже.

1. Корреляция границ интервалов динамического ряда.

Расчет корреляции границ интервалов динамического ряда позволяет оценить наличие линейной связи между нижними и верхними границами интервального динамического ряда. Коэффициент корреляции границ интервалов динамического ряда представляет собой среднюю величину из произведений норми-

рованных отклонений для нижних  $\underline{x}$  и верхних  $\overline{x}$  границ:

$$R_{int} = \frac{\sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \underline{x}_{cp})(\overline{x}_i - \overline{x}_{cp})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \underline{x}_{cp})^2 \sum_{i=1}^n (\overline{x}_i - \overline{x}_{cp})^2}}, \quad (2.41)$$

где  $\underline{x}_i$  – нижняя граница интервала  $i$ -го наблюдения,  $\overline{x}_i$  – верхняя граница интервала  $i$ -го наблюдения,  $n$  – количество интервалов в исследуемом временном ряду,  $\underline{x}_{cp}$ ,  $\overline{x}_{cp}$  – средние величины нижней и верхней интервальных границ, которые рассчитываются так:

$$\underline{x}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \underline{x}_i}{n}, \quad (2.42)$$

$$\overline{x}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{x}_i}{n}. \quad (2.43)$$

Если коэффициент корреляции принимает значение  $-1 \leq R_{int} \leq 0$ , то это обозначает, что «окна интервалов» (расстояния между границами интервалов) имеют тенденцию к сокращению или расширению в одном направлении. Расширение границ интервалов в динамике говорит о возрастающей неопределенности исследуемого процесса во времени, а сужение границ – о сокращении степени неопределенности исследуемого процесса.

Если  $0 \leq R_{int} \leq 1$ , то это означает, что границы интервалов имеют одинаковую тенденцию в одном направлении. Чем ближе  $R_{int}$  к 1, тем выше линейная связь между интервалами. Если  $R_{int}$  равно 0, это означает отсутствие какой-либо связи между границами интервалов.

Для оценки уровня тесноты связи между границами интер-

валов используют шкалу Чеддока [9, с. 130] (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Шкала Чеддока для оценки качества тесноты связи  
между признаками

Количественная мера тесноты связи	Качественная характеристика силы связи
0,1-0,3	Слабая
0,3-0,5	Умеренная
0,5-0,7	Заметная
0,7-0,9	Высокая
0,9-0,99	Весьма высокая

## 2. Внутриинтервальная дисперсия.

Показывает насколько удалены границы интервалов от среднего значения каждого интервала:

$$D_{int} = \frac{\sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - mid[x_i])^2 + \sum_{i=1}^n (\overline{x}_i - mid[x_i])^2}{2n}, \quad (2.44)$$

где  $mid[x_i]$  – середина интервала (среднее интервала), которая определяется как полусумма концов интервала  $[x_i]$  [10, с. 36]:

$$mid[x_i] = \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2}. \quad (2.45)$$

## 3. Средневзвешенная средняя интервального ряда.

Показывает среднее значение интервального ряда с учетом влияния ширины каждого интервала:

$$WA = \frac{\sum_{i=1}^n mid[x_i] \cdot wid[x_i]}{\sum_{i=1}^n win[x_i]}, \quad (2.46)$$

где  $win[x_i]$  – ширина интервала (окно интервала), которая определяется как [10, с. 36]

$$wid[x] = \bar{x} - \underline{x}. \quad (2.47)$$

#### 4. Средняя интервального ряда.

Может использоваться наряду со средневзвешенной средней интервального ряда

$$Av = \frac{\sum_{i=1}^n mid[x_i]}{n}. \quad (2.48)$$

#### 5. Коэффициент вариации интервального ряда.

По величине коэффициента вариации интервального ряда можно судить о степени разброса границ интервалов вокруг среднего ряда

$$Var_{int} = \frac{\sqrt{D_{int}}}{Av}, \quad (2.49)$$

или

$$Var_{int} = \frac{\sqrt{D_{int}}}{WA}. \quad (2.50)$$

#### 6. Статистические характеристики отдельных интервалов.

В качестве анализа аномальных уровней в интервальном ряду помимо ширины интервалов (2.47) можно рассчитывать относительную ширину интервалов

$$RW[x] = \frac{\bar{x}}{\underline{x}}, \quad (2.51)$$

и радиус [10, с. 37]

$$rad[x] = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2}. \quad (2.52)$$

Затем может быть проведен визуальный анализ интервального динамического ряда: строим интервальную диаграмму (графическое изображение величин интервалов), на интервальной диаграмме по оси абсцисс откладываем временные периоды интервальных наблюдений, по оси ординат – соответствующие зна-

чения верхних и нижних границ интервального ряда и графики ширины, относительной ширины и радиусов интервалов динамического ряда.

*Этап 5. Комплексная идентификация и элиминирование системных компонент интервального динамического ряда.*

В связи с тем, что большинство макроэкономических процессов имеют системные компоненты (тенденцию среднего уровня и циклические составляющие), то они, по существу, нестационарные, а модель экспоненциального сглаживания показывает наиболее точные результаты при прогнозировании слабостационарных рядов. Для получения стационарного ряда необходимо преобразовать ряд в центрированный (процесс остается в равновесии относительно постоянного среднего уровня) путем вычитания функции тренда и циклической компоненты (элиминирование процесса).

В качестве метода преобразования интервальных оценок уровней в точечные с целью идентификации тренда и циклической составляющей используем метод «центра неопределенности» [11], т.е. преобразование исходного интервального ряда  $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$  в ряд, состоящий из уровней средних величин  $mid[x_1], mid[x_2], \dots, mid[x_n]$ .

Для идентификации и элиминирования системных компонент проводится последовательность следующих итераций:

1. Проверка ряда  $mid[x_1], mid[x_2], \dots, mid[x_n]$  на наличие тренда.

В качестве метода определения наличия тренда могут быть использованы метод Фостер-Стьюарта [12, с. 19] или метод сравнения средних [12, с. 27]. Если подтверждается гипотеза о наличии тренда, то проводится подбор вида тренда, если подтверждается нулевая гипотеза, то переходят к шагу 5.

2. Подбор вида тренда.

На практике для определения вида тренда чаще всего используют метод характеристик [12, с. 67], при котором, ряд  $mid[x_1], mid[x_2], \dots, mid[x_n]$  необходимо привести к усредненным значениям с помощью скользящих средних. Усреднение проводится с целью уменьшения влияния помех  $mid[\varepsilon_n]$  и циклической компоненты. Для усредненного ряда рассчитывают перечень характеристик (первые разности, вторые разности, темпы роста, темпы роста первых разностей, обратные значения уровней, приросты обратных уровней, темпы роста первых разностей обратных значений уровней, логарифмы уровней, темпы приростов логарифмов уровней). Полученные характеристики проверяют на постоянство (коэффициент вариации для характеристик не должен быть больше 20%), после чего предлагают соответствующую модель тренда.

### 3. Оценка параметров трендовой модели.

Для определения параметров трендовой модели используем метод наименьших квадратов (МНК). После получения параметров трендовую модель  $f(\tilde{x}_i)$  проверяют на адекватность, рассчитывают коэффициент детерминации, среднюю ошибку аппроксимации, проверяют на статистическую значимость ее параметры.

4. Элиминирование функции тренда из исходного ряда  $mid[x_1], mid[x_2], \dots, mid[x_n]$  и получение ряда  $mid[x'_1], mid[x'_2], \dots, mid[x'_n]$ .

5. Определение циклической (сезонной) компоненты в ряду  $mid[x'_1], mid[x'_2], \dots, mid[x'_n]$ .

Если в ряду  $mid[x'_1], mid[x'_2], \dots, mid[x'_n]$  не менее двух периодических повторений  $M$  («циклических волн»), то можно определить  $I_{SM}$  поправочных членов [13, с. 94], где  $S$  – количество

уровней в ряду повторений  $M$ . Тогда поправочный показатель для ряда без тренда рассчитывают так:

$$I_{SM} = \frac{mid[x_i]}{A_v} \cdot 100\%. \quad (2.53)$$

Если имеется тренд-сезонный ряд, то среднюю интервального ряда  $A_v$  необходимо заменить на трендовый теоретический ряд  $\tilde{x}_i$ :

$$I_s = \frac{mid[x_i]}{\tilde{x}_i} \cdot 100\%. \quad (2.54)$$

После строится матрица поправочных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} I_{S11} & I_{S12} & \dots & I_{S1n} \\ I_{S21} & I_{S22} & \dots & I_{S2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{Sn1} & I_{Sn2} & \dots & I_{SnM} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

где  $n$  – длина систематического периода (неделя, месяц, квартал, год) с циклической компонентой,  $M$  – количество равных разбиений исходного ряда (циклических волн).

Следовательно, среднеарифметические значения столбцов матрицы (2.55) будут корректными поправочными членами (индексами сезонности)  $I'_{SM}$ .

6. Элиминирование поправочных членов  $I'_{SM}$  из ряда  $mid[x'_1], mid[x'_2], \dots, mid[x'_n]$ .

После исследования ряда на наличие циклической компоненты и определения ее параметров  $I'_{SM}$  необходимо элиминировать их из ряда  $mid[x'_1], mid[x'_2], \dots, mid[x'_n]$ , после чего получают ряд нерегулярных компонент  $mid[\varepsilon'_1], mid[\varepsilon'_2], \dots, mid[\varepsilon'_n]$ .

7. Проверка корреляции остатков.

Проверка проводится по критерию Дарбина-Уотсона [14, с. 179]. В случае существования серийной корреляции между

ошибками  $mid[\varepsilon_n]$  и  $mid[\varepsilon_{n+k}]$  (гипотеза о стационарности процесса отвергается) переходят к шагу 2 этапа 5, проводя итерации до шага 4, пока гипотеза о стационарности процесса по критерию Дарбина-Уотсона не подтвердится, после чего необходимо элиминировать тренд из исходного ряда  $mid[x_1], mid[x_2], \dots, mid[x_n]$ .

8. Выделение ряда нерегулярных компонент  $mid[\varepsilon'_1], mid[\varepsilon'_2], \dots, mid[\varepsilon'_n]$  из границ интервалов ряда  $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$  и получение ряда интервальных оценок нерегулярной компоненты  $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \dots, [\varepsilon_n]$ .

*Этап 6. Прогнозирование ряда  $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \dots, [\varepsilon_n]$ , полученного на основе элиминирования тренда и циклической составляющей, при помощи интервальной модели экспоненциального сглаживания (2.33).*

Для прогнозирования ряда  $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \dots, [\varepsilon_n]$  на основе интервальной модели экспоненциального сглаживания используется следующий алгоритм действий:

1. Определение начального условия  $A_0$  (2.34 – 2.35).

2. Определение параметра сглаживания  $\alpha$  на основе ретроспективного анализа исходных данных путем решения обратной задачи прогнозирования, решение полиномиального уравнения, заданного интервальными переменными на основе модифицированного интервального метода Ньютона и экстраполяция тенденции на момент времени  $t$ . В случае, если  $\alpha \notin [0,1]$ , используется соотношение Брауна (2.15).

3. Сглаживание ряда  $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \dots, [\varepsilon_n]$  и прогнозирование на шаг вперед с целью получения прогнозного интервала  $[\tilde{\varepsilon}]$ .

*Этап 7. Прогнозирование системных компонент на шаг вперед и получение теоретического интервального ряда*

$[\tilde{x}_1], [\tilde{x}_2], \dots, [\tilde{x}_n]$  путем добавления функции тренда и циклической компоненты.

На этом этапе проводится прогнозирование на основании функции тренда  $f(\tilde{x}_i)$  на шаг перед с учетом поправочных членов  $I'_{SM}$  и суммирование с интервальным прогнозом  $[\tilde{\varepsilon}]$ , получение теоретического ряда  $[\tilde{x}_1], [\tilde{x}_2], \dots, [\tilde{x}_n]$ .

*Этап 8. Оценка качества интервального прогноза.*

О точности прогноза принято судить по размеру ошибки прогноза – разнице между прогнозными и фактическими значениями исследуемого показателя. Для интервального случая базовым элементом расчета расхождения между исходным интервальным и теоретическим интервальным рядами является показатель расстояния между интервалами  $[x]$  и  $[\tilde{x}]$ :

$$dist([x], [\tilde{x}]) = \max\{|\underline{x} - \underline{\tilde{x}}|, |\overline{x} - \overline{\tilde{x}}|\}, \quad (2.56)$$

где  $[\tilde{x}]$  – интервальный теоретический ряд, полученный на основе метода комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервальных динамических рядов.

На основании показателя (2.56) получены следующие оценки качества прогноза:

1. Один из аналитических показателей, оценивающих расхождения между прогнозным и фактическим интервалами, – абсолютная мера сходства интервалов

$$L = \sqrt{(\underline{A}_t - \underline{F}_t^T)^2 + (\overline{A}_t - \overline{F}_t^T)^2}, \quad (2.57)$$

где  $\underline{A}_t$  и  $\overline{A}_t$  – нижняя и верхняя границы исходного интервального ряда,  $\underline{F}_t^T$  и  $\overline{F}_t^T$  – верхняя и нижняя границы теоретического интервального ряда.

2. Показатель, оценивающий среднее расхождение между

исходным и теоретическим интервальными рядами

$$ML = \sqrt{\frac{\sum_{t=n-m+1}^n (\underline{A}_t - \underline{F}_t^T)^2 + (\overline{A}_t - \overline{F}_t^T)^2}{m}}, \quad (2.58)$$

где  $m$  – количество шагов аппроксимации.

3. Относительный показатель средней меры сходства интервалов

$$RML = \sqrt{\frac{100}{m} \sum_{t=n-m+1}^n \frac{(\underline{A}_t - \underline{F}_t^T)^2 + (\overline{A}_t - \overline{F}_t^T)^2}{(\overline{A}_t - \underline{A}_t)}}. \quad (2.59)$$

Чем меньше значение описанных выше показателей, тем выше качество ретропрогноза.

На основании последнего критерия можно прийти к заключению относительно точности прогноза (табл. 2.4) [15]:

Таблица 2.4

Шкала для оценки качества прогноза

<b>Уровень <math>RML</math></b>	<b>Точность прогноза</b>
Менее 10%	Высокая
10 – 20%	Хорошая
20 – 40%	Удовлетворительная
40 – 50%	Плохая
Более 50%	Неудовлетворительная

*Этап 9. Визуализация ретроспективного ряда и результата прогнозирования.*

Представить динамический интервальный ряд можно в виде интервальной диаграммы.

*Этап 10. Обработка результатов прогнозирования, формирование выводов.*

На данном этапе приводится численное значение результатам прогнозирования, выделяются и указываются важные момен-

ты в исследовании. Все результаты исследования должны быть сведены в прогнозный отчет.

Результат метода – прогнозный интервал  $[\tilde{x}_t]$  – может трактоваться двояко, в соответствии с двойным пониманием самих интервалов. С одной стороны, интервал  $[\tilde{x}_t]$  может представлять собой множество всех вещественных чисел от  $\underline{\tilde{x}_t}$  до  $\overline{\tilde{x}_t}$  ( $\forall$ -тип неопределенности), а с другой – быть лишь указателем границ для какого-то хотя бы одного значения между  $\underline{\tilde{x}_t}$  и  $\overline{\tilde{x}_t}$  ( $\exists$ -тип неопределенности) [6, с. 53].

#### **2.4.5. Параметрический синтез модели экспоненциально-го сглаживания для статистических рядов интервальных данных**

Как уже было отмечено, для прогнозирования различных показателей технико-экономических систем и процессов в настоящее время существует большое количество методов, разнообразие которых определяется характером исходных данных и степенью их точности [17]. Большое распространение в силу своей простоты, а также возможности параметрического синтеза получил метод экспоненциального сглаживания, который позволяет прогнозировать значение параметра в последующий момент времени.

Расчетная формула метода (2.13):

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)},$$

Приведенная зависимость может иметь вид (2.14):

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \alpha(1-\alpha) A_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 A_{t-3} + \alpha(1-\alpha)^3 A_{t-4} + \dots + \alpha(1-\alpha)^n A_{t-n}.$$

Во многих практических задачах некоторые или все значения исходного ряда характеризуются неопределенностью, которая может быть выражена в интервальной форме

$$[A_i] = \left[ \underline{A_i}; \overline{A_i} \right], \quad (2.60)$$

где  $\underline{A_i}$  и  $\overline{A_i}$  – нижняя и верхняя границы интервального параметра  $A_i$ .

Таким образом, для прогноза ряда интервальных данных имеем

$$\begin{aligned} [F_t] = & \alpha [A_{t-1}] + \alpha(1-\alpha)[A_{t-2}] + \alpha(1-\alpha)^2 [A_{t-3}] + \\ & + \alpha(1-\alpha)^3 [A_{t-4}] + \dots + \alpha(1-\alpha)^n [A_{t-n}]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Выбору константы сглаживания  $\alpha$  посвящен ряд публикаций. Общепринятой областью ее возможных значений является интервал  $\alpha \in [0; 1]$ , хотя некоторые авторы допускают ее изменение в более широких пределах.

*Постановка проблемы.* Будем считать выбор параметра  $\alpha$  обоснованным, если на интервале  $[0; 1]$  отыщется хотя бы одно значение  $\alpha$ , при котором может быть получен один или несколько ретроспективных прогнозов абсолютной точности [16].

Другими словами, если среди корней интервального полиномиального уравнения

$$\begin{aligned} [A_{t-1}] = & \alpha [A_{t-2}] + \alpha(1-\alpha)[A_{t-3}] + \alpha(1-\alpha)^2 [A_{t-4}] + \\ & + \alpha(1-\alpha)^3 [A_{t-5}] + \dots + \alpha(1-\alpha)^{n-1} [A_{t-n}] \end{aligned} \quad (2.62)$$

существует хотя бы один вещественный корень в интервале  $[0; 1]$ , то применение классического метода экспоненциального сглаживания для прогнозирования такого интервального ряда обосновано. Таким образом, возникает задача поиска необходимых условий нахождения корней интервального уравнения (2.62) в заданной области.

*Подход к решению.* Предлагается следующий метод анализа расположения корней интервального полиномиального уравнения.

Разобьем плоскость комплексного в общем случае параметра  $\alpha$  на две области: область  $G_1$  – круг единичного диаметра с центром в точке  $(0,5; 0)$  и область  $G_2$  – все остальные точки комплексной плоскости (рис. 2.13).

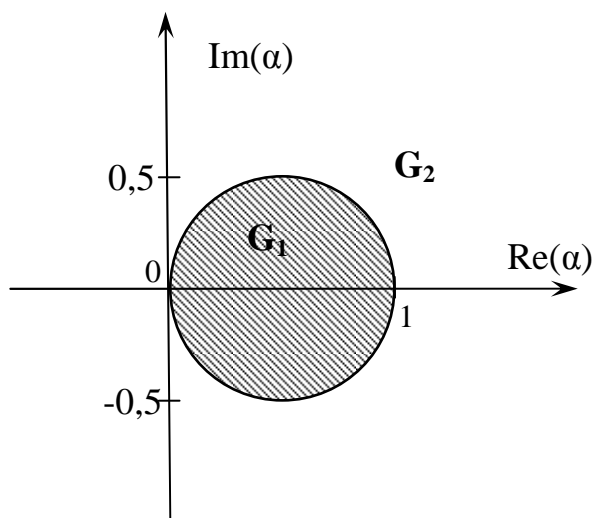


Рис. 2.13. Разбиение плоскости комплексного параметра  $\alpha$

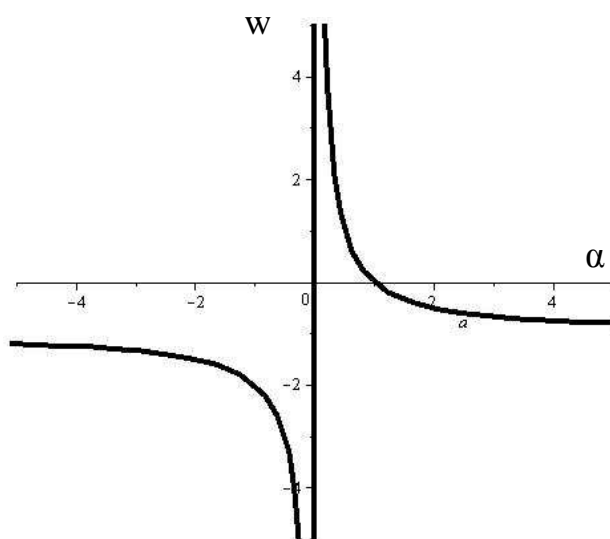


Рис. 2.14. График функции  $w = \frac{1-\alpha}{\alpha}$

Используя билинейное  $w$ -преобразование, которое отображает круг единичного радиуса в плоскости  $Z$  во всю левую полу плоскость плоскости  $W$

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (2.63)$$

получим формулу преобразования области  $G_1$  в правую полу плоскость комплексной плоскости  $W$ :

$$\alpha = \frac{1}{1+w}, \quad w = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \quad (2.64)$$

Из рис. 2.14 видно, что зависимость (2.64) преобразует область  $G_2$  плоскости  $\alpha$  в левую полу плоскость комплексной плос-

кости  $W$ .

После подстановки уравнение (2.62) примет вид

$$\begin{aligned} [A_{t-1}] = & \frac{1}{1+w} [A_{t-2}] + \frac{w}{(1+w)^2} [A_{t-3}] + \frac{w^2}{(1+w)^3} [A_{t-4}] + \\ & + \frac{w^3}{(1+w)^2} [A_{t-5}] + \dots + \frac{w^{n-1}}{(1+w)^n} [A_{t-n}] \end{aligned} \quad (2.65)$$

или

$$\begin{aligned} & -(1+w)^n [A_{t-1}] + (1+w)^{n-1} [A_{t-2}] + \\ & + w(1+w)^{n-2} [A_{t-3}] + w^2(1+w)^{n-3} [A_{t-4}] + \\ & + w^3(1+w)^{n-4} [A_{t-5}] + \dots + w^{n-1} [A_{t-n}] = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Уравнение (2.66) можно свести к стандартному виду

$$[b_0]w^n + [b_1]w^{n-1} + [b_2]w^{n-2} + \dots + [b_{n-1}]w + [b_n] = 0, \quad (2.67)$$

где интервальные коэффициенты  $[b_i] = [\underline{b}_i; \overline{b}_i]$  есть вычисляемые линейные функции от значений исходного ряда  $[A_i]$ .

Рассмотрим условия нахождения корней интервального полинома (2.67) в левой полуплоскости комплексной плоскости  $W$ . Согласно теореме Харитонова [18], интервальный полином устойчив (т.е. все корни полинома с интервальными коэффициентами лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат вне зависимости от сочетаний значений коэффициентов), если устойчивы четыре характерных полинома с детерминированными коэффициентами:

$$\begin{aligned} D_1(w) &= \underline{b}_0 w^k + \underline{b}_1 w^{k-1} + \overline{b}_2 w^{k-2} + \overline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \underline{b}_{k-1} w + \underline{b}_k, \\ D_2(w) &= \underline{b}_0 w^k + \overline{b}_1 w^{k-1} + \overline{b}_2 w^{k-2} + \underline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \underline{b}_{k-1} w + \overline{b}_k, \\ D_3(w) &= \overline{b}_0 w^k + \overline{b}_1 w^{k-1} + \underline{b}_2 w^{k-2} + \underline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \overline{b}_{k-1} w + \underline{b}_k, \\ D_4(w) &= \overline{b}_0 w^k + \underline{b}_1 w^{k-1} + \underline{b}_2 w^{k-2} + \overline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \overline{b}_{k-1} w + \underline{b}_k. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Если все полиномы Харитонова (2.68) окажутся гурвицевы-

ми, то все корни интервального уравнения (2.67) лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат при любом сочетании значений коэффициентов, а, следовательно, все корни уравнения (2.62) находятся в области  $G_2$ . В случае же негурвицевости хотя бы одного из полиномов Харитонова хотя бы один из корней уравнения (2.62) находится в области  $G_1$ . Проверка полиномов Харитонова на гурвицевость может быть выполнена с помощью любого алгебраического критерия устойчивости. Наиболее уместным, с практической точки зрения, представляется применение обобщенного критерия Рауса, который позволяет не только установить факт неустойчивости полинома, но и определить число корней, находящихся в правой полуплоскости (что соответствует числу корней уравнения (2.62) на интервале  $[0; 1]$ ).

Таким образом, необходимым условием применимости классического метода экспоненциального сглаживания для прогнозирования ряда интервальных данных является негурвицевость хотя бы одного из полиномов Харитонова, полученных с помощью билинейного преобразования интервального ретроспективного полинома.

При выполнении сформулированного необходимого условия применимости классического метода экспоненциального сглаживания предложена процедура выбора  $\alpha$  на отрезке  $[0; 1]$ . Идея состоит в том, что, убедившись в нахождении корней интервального уравнения (2.62) в области  $G_1$ , можно и дальше дробить область  $G_1$  на более мелкие, проверяя наличие в них корней.

Проиллюстрируем предложенный подход графически. Пусть для интервального ряда (2.60) необходимое условие применимости классического метода экспоненциального сглаживания выполняется, т.е. область  $G_1$  содержит корни интервального уравнения (2.62).

Расположим в области  $G_1$   $m$  кругов (для определенности  $m = 10$ ) диаметром  $m^{-1}$  таким образом, чтобы они содержали в себе весь отрезок вещественной оси  $[0; 1]$ , (рис. 2.15).

Используем для каждого круга полученное из (2.64) преобразование

$$\alpha = \frac{i + w(i-1)}{m(1+w)}, \quad (2.69)$$

где  $i = 1..m$  – порядковый номер малого круга.

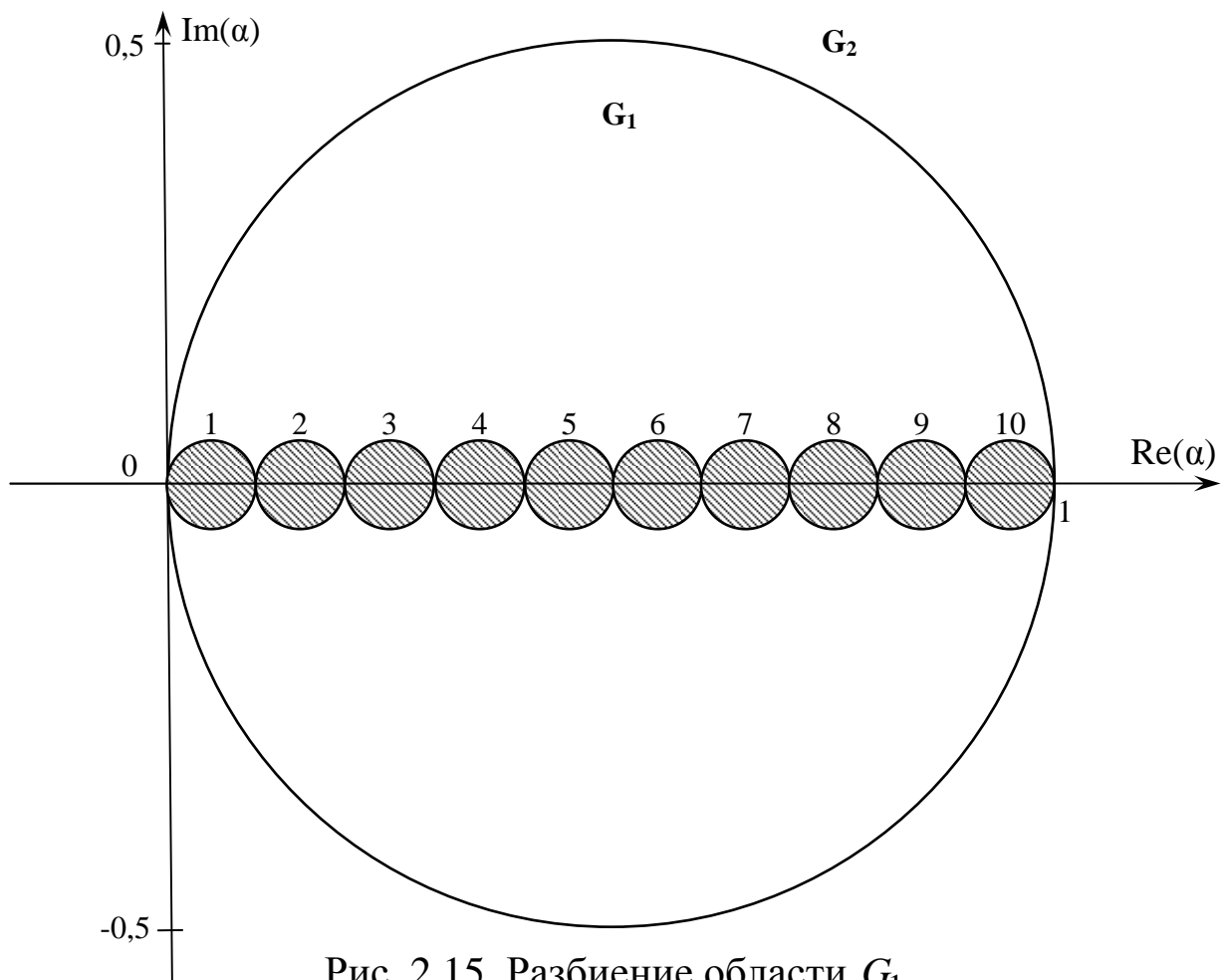


Рис. 2.15. Разбиение области  $G_1$

Проверяя изложенным выше способом факт наличия корней интервального уравнения (2.62) внутри каждого из  $m$  кругов, можно отсечь отрезки на интервале  $[0, 1]$ , где корни (2.62) не могут появиться ни при каких сочетаниях значений коэффициентов

интервального уравнения. В общем случае после разбиения можно получить один из трех вариантов расположения корней (рис. 2.16). Здесь заштрихованный круг содержит корни, а незаштрихованный – не содержит корней.

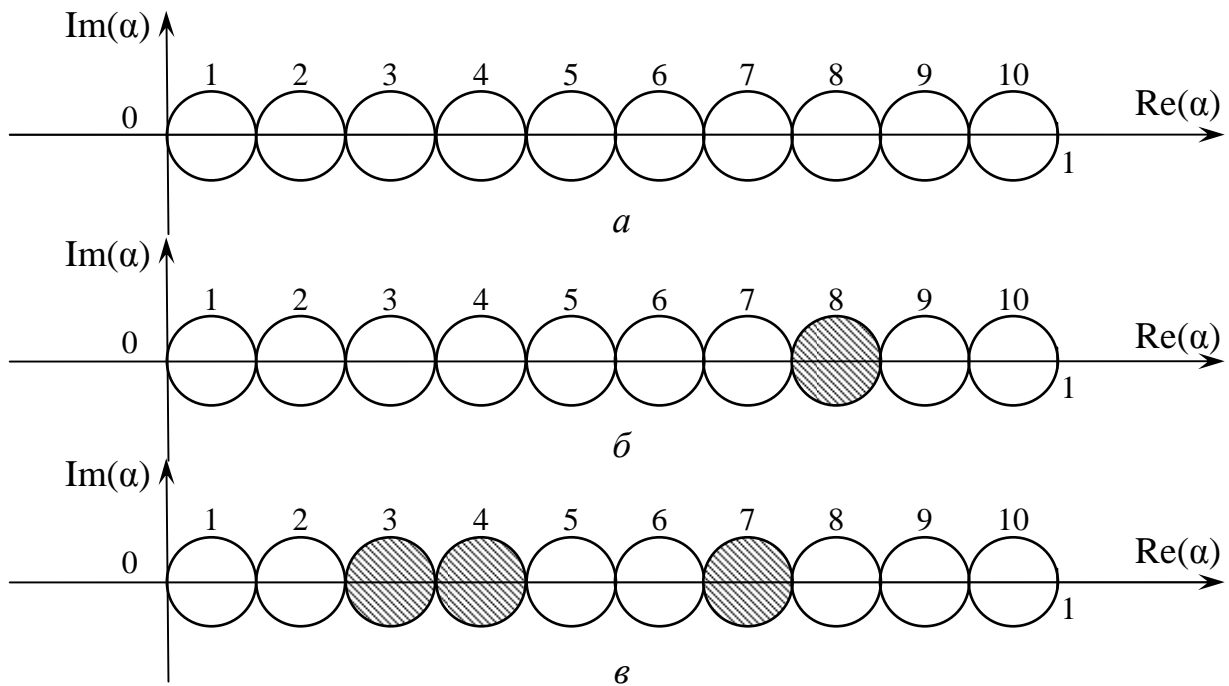


Рис. 2.16. Локализация корней в окрестности отрезка  $[0; 1]$

Ситуация, изображенная на рис. 2.16,а, соответствует расположению комплексных корней внутри области  $G_1$ , но не вблизи вещественной оси, что означает неприменимость для прогнозирования исходного интервального ряда классического метода экспоненциального сглаживания.

Рис. 2.16,б иллюстрирует ситуацию, при которой корни локализованы внутри одного круга диаметром  $m^{-1}$ , причем мнимая составляющая корня  $Im(\alpha) \leq (2m)^{-1}$ , что существенно приближает его к вещественной оси и фактически может служить мерой точности метода. В данном случае возможно последующее дробление выявленного круга по предложенному выше принципу в целях уточнения искомого значения  $\alpha$ . Так как все процедуры

при проверке расположения корней не представляют существенной вычислительной сложности, уточнение расположения корней ограничено лишь видом корневого годографа.

И, наконец, рис. 2.16,в соответствует случаю, когда в области вещественной оси на интервале  $[0; 1]$  находятся несколько корней. В данном случае дальнейшее дробление интервала представляется нецелесообразным и результатом являются несколько отрезков внутри интервала  $[0; 1]$ , внутри которых можно обоснованно выбирать значения  $\alpha$  для прогнозирования.

*Пример.* Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим методологический пример 2-го порядка.

Пусть известен короткий временной ряд интервальных данных, показанный на рис. 2.17.



Рис. 2.17. Временной ряд интервальных данных

Ретроспективное уравнение (2.62) для последнего значения параметра примет вид

$$A_3 = -A_1\alpha^2 + (A_1 + A_2)\alpha,$$

или после подстановки

$$\alpha = \frac{1}{1+w},$$

$$A_3 = -\frac{A_1}{(1+w)^2} + \frac{A_1 + A_2}{(1+w)}.$$

Домножим обе части на  $(1+w)^2$ :

$$-A_3 w^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)w + A_2 - A_3 = 0.$$

Коэффициенты интервального уравнения относительно  $w$ :

$$[b_0]w^2 + [b_1]w + [b_2] = 0,$$

$$[b_0] = -[A_3] = [-115; -110],$$

$$[b_1] = [A_1] + [A_2] - 2[A_3] = [-10; 8],$$

$$[b_2] = [A_2] - [A_3] = [7; 16].$$

Полиномы Харитоновы:

$$D_1(w) = -115w^2 - 10w + 16,$$

$$D_2(w) = -115w^2 + 8w + 16,$$

$$D_3(w) = -110w^2 + 8w + 7,$$

$$D_4(w) = -110w^2 - 10w + 7.$$

Согласно критерию Рауса для устойчивости уравнения второго порядка необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты полинома были одного знака, что в данном случае не выполняется. Следовательно, на интервале  $[0; 1]$  существуют корни уравнения (2.62). Причем согласно обобщенному критерию Рауса этих корней ровно столько, сколько смен знака у коэффициентов полинома (в данном случае один).

Разобьем окрестность отрезка  $[0; 1]$  на 10 частей путем подстановки в уравнение (2.62)

$$\alpha = \frac{i + w(i-1)}{10(1+w)},$$

где  $i = 1 \dots 10$  – порядковый номер малого круга.

$$A_3 = -A_1 \frac{(i + w(i-1))^2}{100(1+w)^2} + (A_1 + A_2) \frac{i + w(i-1)}{10(1+w)},$$

$$\begin{aligned} & (-10A_2 - 11A_1 + 12iA_1 - i^2A_1 + 10iA_2 - 100A_3)w^2 + \\ & + (-2i^2A_1 + 20iA_1 + 20iA_2 + 2A_1 - 200A_3)w + \\ & + 10A_2 + 10iA_2 + 8iA_1 - i^2A_1 + 9A_1 - 100A_3 = 0, \end{aligned}$$

$$[b_0] = -10[A_2] - 11[A_1] + 12i[A_1] - i^2[A_1] + 10i[A_2] - 100[A_3],$$

$$[b_1] = -2i^2[A_1] + 20i[A_1] + 20i[A_2] + 2[A_1] - 200[A_3],$$

$$[b_2] = 10[A_2] + 10i[A_2] + 8i[A_1] - i^2[A_1] + 9[A_1] - 100[A_3].$$

Значения коэффициентов  $[b_i]$  для десяти малых кругов сведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значения коэффициентов  $[b_i]$  для десяти малых кругов

$i$	$[b_0]$	$[b_1]$	$[b_2]$
1	$[-115; -110]$	$[-18560; -17440]$	$[-6848; -5852]$
2	$[-9378; -8822]$	$[-14708; -13492]$	$[-5722; -5078]$
3	$[-7452; -6848]$	$[-11248; -9952]$	$[-4188; -3512]$
4	$[-5722; -5078]$	$[-8180; -6820]$	$[-2850; -2150]$
5	$[-4188; -3512]$	$[-5504; -4096]$	$[-1708; -992]$
6	$[-2850; -2150]$	$[-3220; -1780]$	$[-762; -38]$
7	$[-1708; -992]$	$[-1328; 128]$	$[-12; 712]$
8	$[-762; -38]$	$[172; 1628]$	$[542; 1258]$
9	$[-12; 712]$	$[1280; 2720]$	$[900; 1600]$
10	$[542; 1258]$	$[1996; 3404]$	$[1018; 1782]$

Нетрудно видеть, что коэффициенты интервального уравнения (2.67) для седьмого, восьмого и девятого малых кругов меняют знак, что означает нахождение корня интервального уравнения (2.62) на отрезке  $[0,6; 0,9]$ .

Для геометрической иллюстрации примера построим семей-

ство кривых, описываемых интервальным уравнением

$$P(\alpha) = -[A_1]\alpha^2 + ([A_1] + [A_2])\alpha - [A_3].$$

Очевидно, что семейство ограничено всего двумя стационарными полиномами (рис. 2.18):

$$\underline{P}(\alpha) = -\underline{A}_1\alpha^2 + (\underline{A}_1 + \underline{A}_2)\alpha - \underline{A}_3,$$

$$\overline{P}(\alpha) = -\overline{A}_1\alpha^2 + (\overline{A}_1 + \overline{A}_2)\alpha - \overline{A}_3.$$

Графически можно определить, что корень интервального уравнения лежит на отрезке  $[0,67; 0,85]$ , что подтверждает результат, полученный аналитически с помощью предложенного подхода.

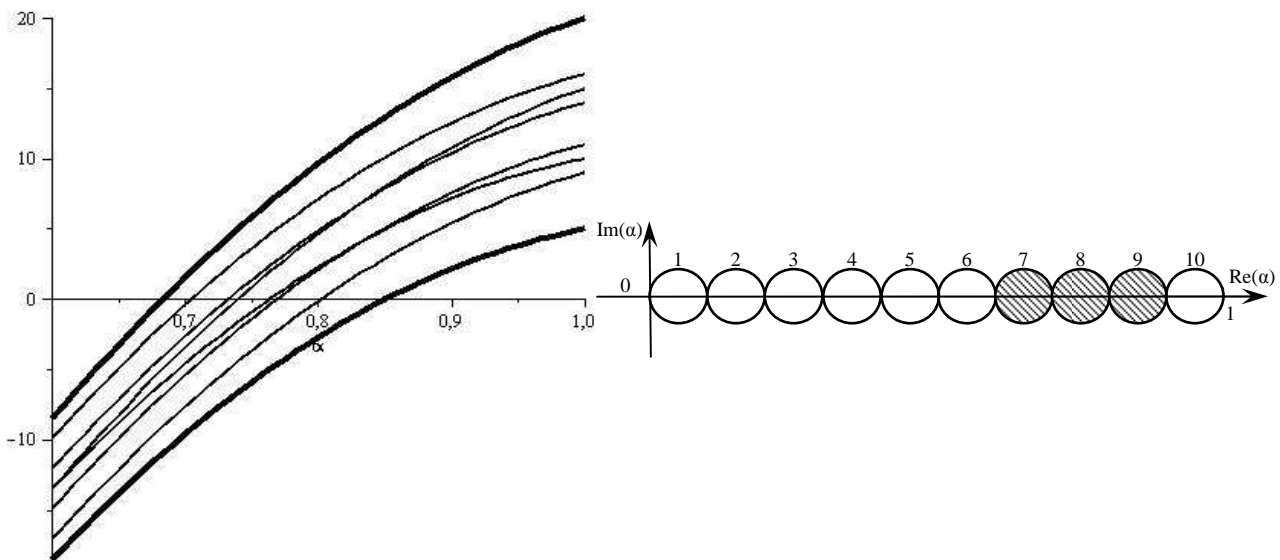


Рис. 2.18. График интервального полинома на интервале  $[0,6; 0,9]$

Таким образом, получены следующие результаты:

1. Предложены и обоснованы необходимые условия применимости классического метода экспоненциального сглаживания для прогнозирования временных рядов с интервальными данными, основанные на использовании билинейного конформного преобразования и теореме Харитоновой о робастной устойчивости интервальных полиномов.
2. Даны практические рекомендации по параметрическому

синтезу модели экспоненциального сглаживания, основанные на ретроспективном анализе временного ряда.

3. Предложенный подход проиллюстрирован примером.

#### **2.4.6. Необходимые алгебраические условия адекватности полиномиальных интервальных моделей динамических процессов**

В ряде прикладных задач возникает необходимость нахождения настроечного параметра  $x$  математической модели исследуемого процесса как корня полиномиального уравнения  $n$ -го порядка вида (2.70), причем исследователя интересуют корни, попадающие в некоторый, заранее известный интервал.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} = 0 \quad (2.70)$$

Например, такая задача возникает при параметрической настройке метода экспоненциального сглаживания, применяемого для пошагового прогнозирования различных показателей социально-экономических систем [16].

Задача усложняется и исключает применение классических методов (например, теоремы Штурма), если коэффициенты уравнения (2.70) являются интервальными числами, т.е. известно не их точное значение, а лишь границы изменения:

$$[a_i] = [\underline{a}_i; \overline{a}_i], \quad (2.71)$$

где  $\underline{a}_i$  и  $\overline{a}_i$  – нижняя и верхняя граница интервального коэффициента  $a_i$ ,  $i = 1..n$ .

Таким образом, интервальное уравнение

$$\sum_{i=0}^n [a_i] x^{n-i} = 0 \quad (2.72)$$

есть не что иное, как семейство уравнений с множественным со-

четанием детерминированных коэффициентов внутри интервала  $[a_i]$ .

*Постановка задачи.* Необходимо сформулировать необходимые алгебраические условия, при выполнении которых хотя бы один корень полиномиального интервального уравнения (2.72) будут гарантированно находиться на отрезке  $[c, d]$ , где  $c$  и  $d$  – вещественные числа, причем  $c < d$ .

*Подход к решению.* Предлагается следующий метод анализа расположения корней интервального полиномиального уравнения.

Разобьем плоскость комплексного параметра  $x$  на две области: область  $G_1$  – круг единичного диаметра с центром в точке  $\left(\frac{c+d}{2}, 0\right)$ , и область  $G_2$  – все остальные точки комплексной плоскости (рис. 2.19).

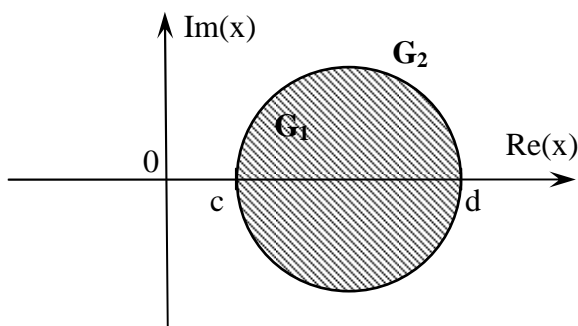


Рис. 2.19. Разбиение плоскости комплексного параметра  $x$

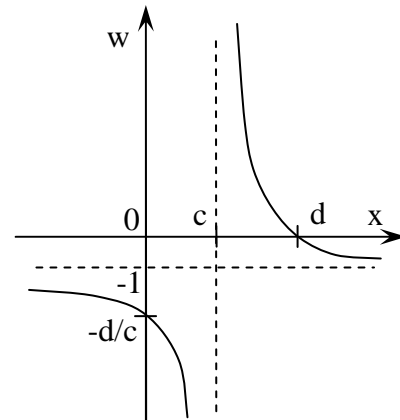


Рис. 2.20. График функции  $w = \frac{d-x}{x-c}$

Используя билинейное  $w$ -преобразование, которое отображает круг единичного радиуса в плоскости  $Z$  во всю левую полуплоскость плоскости  $W$ , при использовании подстановки

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (2.75)$$

получим формулу преобразования области  $G_1$  в правую полуплоскость комплексной плоскости  $W$  (рис. 2.20):

$$x = \frac{cw + d}{w + 1}, \quad w = \frac{d - x}{x - c}. \quad (2.76)$$

Из рис. 2.20 видно, что преобразование (2.76) отображает область  $G_2$  плоскости  $X$  в левую полуплоскость комплексной плоскости  $W$ .

После подстановки уравнение (2.74) примет вид:

$$\begin{aligned} [a_0] \left( \frac{cw + d}{w + 1} \right)^n + [a_1] \left( \frac{cw + d}{w + 1} \right)^{n-1} + [a_2] \left( \frac{cw + d}{w + 1} \right)^{n-2} + \dots + \\ + [a_{n-1}] \frac{cw + d}{w + 1} + [a_n] = \sum_{i=0}^n [a_i] \left( \frac{cw + d}{w + 1} \right)^{n-i} = 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

или после домножения на  $(1 + w)^n$ :

$$\begin{aligned} [a_0](cw + d)^n + [a_1](cw + d)^{n-1}(w + 1) + \\ + [a_2](cw + d)^{n-2}(w + 1)^2 + \dots + [a_{n-1}](cw + d)(w + 1)^{n-1} + \\ + [a_n](w + 1)^n = \sum_{i=0}^n [a_i](cw + d)^{n-i}(w + 1)^i = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Уравнение (2.78) можно свести к стандартному виду:

$$\begin{aligned} [b_0]w^n + [b_1]w^{n-1} + [b_2]w^{n-2} + \dots + \\ + [b_{n-1}]w + [b_n] = \sum_{i=0}^n [b_i]w^{n-i} = 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

где интервальные коэффициенты  $[b_i] = [b_i^-; b_i^+]$  есть вычисляемые линейные функции от значений коэффициентов  $[a_i]$ .

Рассмотрим условия нахождения корней интервального полинома (2.79) в левой полуплоскости комплексной плоскости  $W$ . Согласно теореме Харитонова [18], интервальный полином устойчив (т.е. все корни полинома с интервальными коэффициентами лежат в левой полуплоскости комплексной системы коор-

динат вне зависимости от сочетаний значений коэффициентов), если устойчивы четыре характерных полинома с детерминированными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
 D_1(w) &= \underline{b}_0 w^k + \underline{b}_1 w^{k-1} + \overline{b}_2 w^{k-2} + \overline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \underline{b}_{k-1} w + \underline{b}_k, \\
 D_2(w) &= \underline{b}_0 w^k + \overline{b}_1 w^{k-1} + \overline{b}_2 w^{k-2} + \underline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \underline{b}_{k-1} w + \overline{b}_k, \\
 D_3(w) &= \overline{b}_0 w^k + \overline{b}_1 w^{k-1} + \underline{b}_2 w^{k-2} + \underline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \overline{b}_{k-1} w + \overline{b}_k, \\
 D_4(w) &= \overline{b}_0 w^k + \underline{b}_1 w^{k-1} + \underline{b}_2 w^{k-2} + \overline{b}_3 w^{k-3} + \dots + \overline{b}_{k-1} w + \underline{b}_k.
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Если все полиномы Харитонова (2.80) окажутся гурвицевыми, то все корни интервального уравнения (2.79) лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат при любом сочетании значений коэффициентов, а, следовательно, все корни уравнения (2.74) находятся в области  $G_2$ . В случае же негурвицевости любого из полиномов Харитонова хотя бы один из корней уравнения (2.74) находится в области  $G_1$ . Проверка полиномов Харитонова на гурвицевость может быть выполнена с помощью известных алгебраических критериев устойчивости [19]. Наиболее уместным с практической точки зрения представляется применение обобщенного критерия Рауса, который позволяет не только установить факт неустойчивости полинома, но и определить число корней, находящихся в правой полуплоскости (что соответствует числу корней уравнения (2.74) с вещественной частью на интервале  $[c, d]$ ).

Таким образом, *необходимым алгебраическим условием* нахождения корней интервального полинома (2.74) с вещественной частью на участке вещественной оси  $[c, d]$  является негурвицевость хотя бы одного из полиномов Харитонова, полученных с помощью билинейного преобразования (2.76) исходного интервального полинома.

Следует отметить, что в рассматриваемых моделях параметр

$x$  предполагается вещественным. В этом случае необходимо учитывать, что предложенный подход формирует именно необходимые условия локализации корней на отрезке, которые превращаются в достаточные для нечетного количества корней.

Однако, путем дробления области  $G_1$  на более мелкие и проверяя наличие в них корней, можно существенно приблизить область локализации корней к отрезку на вещественной оси.

Проиллюстрируем предложенный подход. Пусть для интервального полинома (2.74) выполняется сформулированное выше необходимое условие локализации корней на интервале  $[c, d]$ , т.е. область  $G_1$  содержит корни интервального уравнения (2.74).

Расположим в области  $G_1$   $m$  кругов диаметром  $\frac{d-c}{m}$  таким образом, чтобы они содержали в себе весь отрезок вещественной оси  $[c, d]$ .

Используем для каждого круга полученное из (2.76) преобразование:

$$x = \frac{c(m-i) + id + w(c(m-i+1) + d(i-1))}{m(1+w)}, \quad (2.81)$$

где  $i = 1, \dots, m$  – порядковый номер малого круга.

Проверяя изложенным выше способом факт наличия корней интервального уравнения (2.74) внутри каждого из  $m$  кругов, можно отсечь отрезки на интервале  $[c, d]$ , на которых корни (2.74) не могут появиться ни при каких сочетаниях значений коэффициентов интервального уравнения.

При этом максимальная мнимая составляющая пары корней в малых кругах  $Im(x)$  в  $m$  раз меньше, чем аналогичная величина для первоначального круга, что существенно приближает ее к вещественной оси и фактически может служить мерой точности метода. Так как все процедуры при проверке расположения кор-

ней не представляют существенной вычислительной сложности, уточнение расположения корней ограничено лишь видом корневого годографа.

**Пример.** Пусть известна интервальная полиномиальная модель 2-го порядка:

$$-[19,6;20,4]x^2 + [44,4;45,6]x - [22;23] = 0.$$

Необходимо определить адекватность модели на участке  $[0,1]$ , т.е. определить количество корней на этом участке.

После подстановки  $x = \frac{1}{1+w}$  и домножения на  $(1+w)^2$  исходный полином примет вид:

$$-[22;23]w^2 + ([44,4;45,6] - 2 \cdot [22;23])w - [19,6;20,4] + [44,4;45,6] - [22;23].$$

Таким образом, коэффициенты интервального полинома относительно  $w$ :

$$[b_0] = -[22;23], [b_1] = [-1,6;1,6], [b_2] = [1;4].$$

Полиномы Харитонова:

$$D_1(w) = -23w^2 - 1,6w + 4,$$

$$D_2(w) = -23w^2 + 1,6w + 4,$$

$$D_3(w) = -22w^2 + 1,6w + 1,$$

$$D_4(w) = -22w^2 - 1,6w + 1.$$

Согласно критерию Рауса, для устойчивости уравнения второго порядка необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты полинома были одного знака, что в данном случае не выполняется. Следовательно, на интервале  $[0,1]$  существуют корни уравнения (2.74). Причем согласно обобщенному критерию Рауса, этих корней столько, сколько смен знака у коэффициентов полинома (в данном случае один, а второй, являясь вещественным, находится на вещественной оси вне этого интервала).

Для геометрической иллюстрации примера построим семейство кривых, описываемых интервальным уравнением

$$P(x) = -[19,6; 20,4]x^2 + [44,4; 45,6]x - [22; 23].$$

Очевидно, что семейство ограничено всего двумя стационарными полиномами (рис. 2.21)

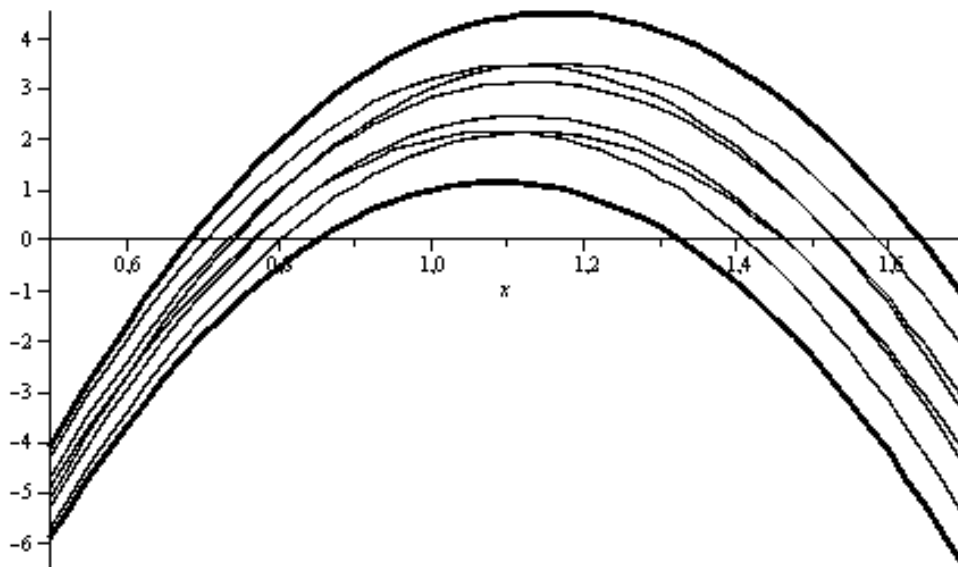
$$\underline{P}(x) = \underline{a_0}x^2 + \underline{a_1}x + \underline{a_2} = -20,4x^2 + 44,4x - 23,$$

$$\overline{P}(x) = \overline{a_0}x^2 + \overline{a_1}x + \overline{a_2} = -19,6x^2 + 45,6x - 22,$$

и один из корней лежит на интервале (0,65; 0,85).

Рис. 2.21. График интервального полинома на интервале [0,5; 1,7]

*Выводы.* Таким образом, сформулированы необходимые алгебраические условия адекватности полиномиальных моделей динамических процессов, основанные на использовании били-



нейного конформного преобразования и теоремы Харитонова о робастной устойчивости интервальных полиномов, которые позволяют определить факт нахождения и число корней интервального полинома в окрестности отрезка вещественной оси.

## 2.5. Структурный синтез модели экспоненциального сглаживания

Следует заметить, что решение полиномиального уравнения  $F_t(\alpha) = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}$  относительно константы сглаживания не всегда приводит к получению вещественных корней. В этом случае расстояние между кривой и линией, соответствующей ее требуемому значению, можно интерпретировать как минимальную методическую ошибку применения метода экспоненциального сглаживания. Это иллюстрируется на рис. 2.22. В ряде случаев имеется несколько вещественных корней, причем они не обязательно находятся в рекомендуемом рядом авторов диапазоне.

Предлагается метод структурного синтеза моделей экспоненциального сглаживания, базирующийся на анализе динамических рядов исходных данных, который в отличие от известных позволяет произвести адекватный выбор прогнозной модели экспоненциального сглаживания и тем самым повысить достоверность результатов прогнозирования.

Метод включает в себя следующую последовательность действий по адекватному выбору соответствующей модели экспоненциального сглаживания:

1. Составление полиномиальных уравнений для ретроспективных значений исследуемого параметра на всех рассматриваемых периодах временных серий в аналитической форме с использованием системы символьных вычислений:

$$A_t = \alpha_i A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha_i (1-\alpha_i)^i A_{t-(i+1)}, \quad (2.82)$$

где  $t$  – количество рассматриваемых периодов,  $\alpha_i$  – ретроспективные значения констант сглаживания, которые для выбранной модели обеспечивали бы абсолютную точность прогноза.

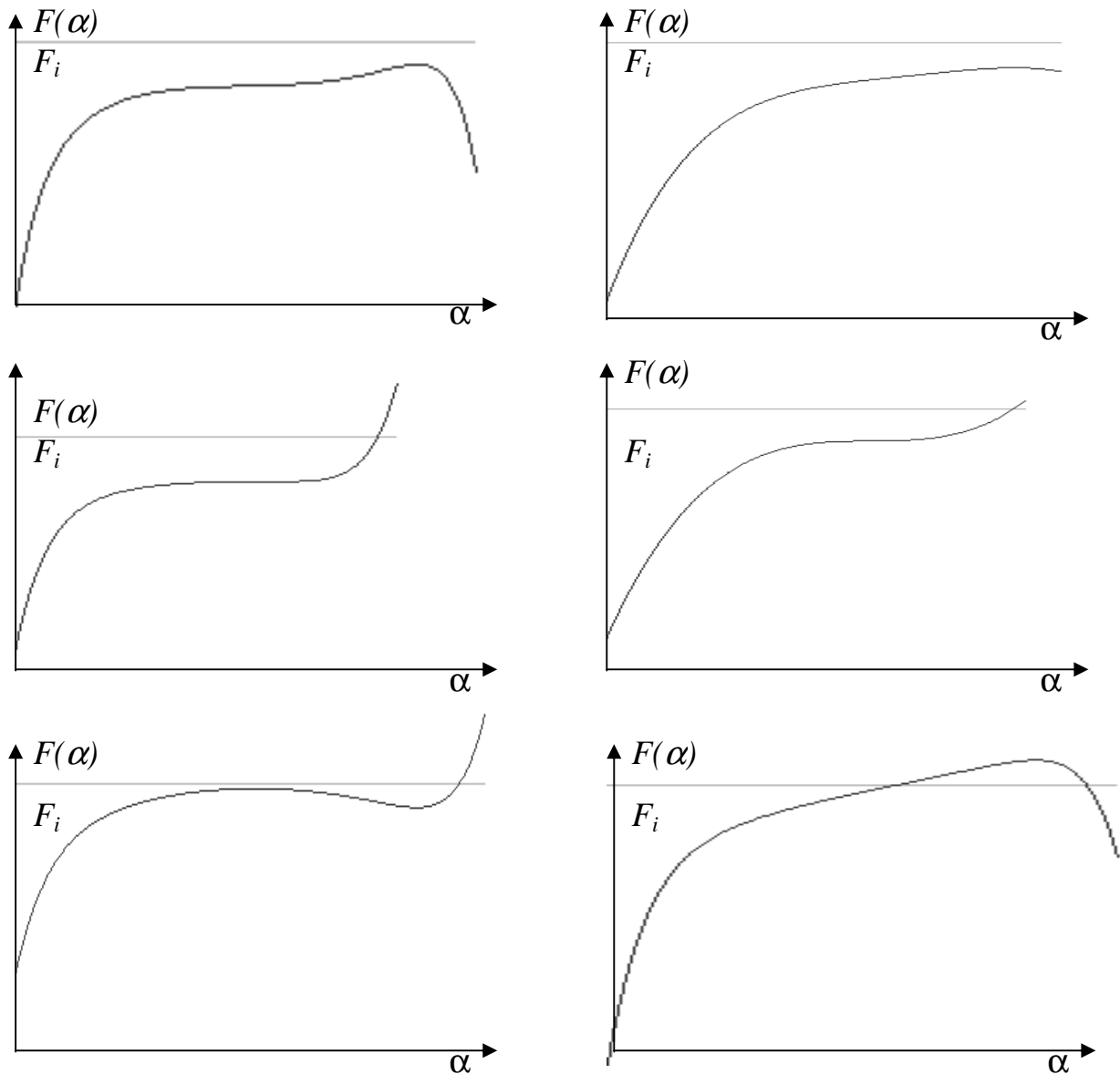


Рис. 2.22. Зависимость прогнозного значения исследуемой функции от константы сглаживания

2. Определение на каждой итерации значений коэффициентов сглаживания, как корней полиномиального уравнения, и выбор их вещественных значений, как индикатора адекватности выбранной модели экспоненциального сглаживания.

3. Анализ всей совокупности ретроспективных значений

константы сглаживания  $\{0 \leq \alpha \leq 1\}$  и принятие решения об уточнении выбранной модели в соответствии с рекомендациями, представленными на рис. 2.23.

4. Экстраполяция изменений значения константы сглаживания  $\alpha_i$  на конечный рассматриваемый период и составление прогноза.

На основании предложенного метода разработана процедура структурного синтеза прогнозных математических моделей экспоненциального сглаживания (рис. 2.24.), которая выполняется в следующей последовательности:

*Шаг 1.* Задается статистический ряд исходных данных  $A_i$  и глубина ретроспективного анализа.

*Шаг 2.* Задается исходная модель экспоненциального сглаживания в виде экспоненциального среднего

$$F_t(\alpha) = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}.$$

*Шаг 3.* Выполняется ретроспективный анализ исходных данных путем решения обратной задачи прогнозирования  $\alpha_{im} = f(A_i)$ .

*Шаг 4.* Проводится анализ ретроспективных коэффициентов сглаживания. Если среди ретроспективных коэффициентов сглаживания  $\alpha_{im}$  отсутствуют вещественные значения, то исходная математическая модель экспоненциального сглаживания усложняется, путем последовательного введения компонент, учитывающих тренд и сезонные колебания, затем повторное выполнение шага 3.

*Шаг 5.* Если среди ретроспективных коэффициентов присутствуют вещественные значения, то осуществляется анализ коэффициентов на принадлежность их в диапазоне  $(0,1)$ . Если среди всех ретроспективных коэффициентов сглаживания  $\alpha_{im}$  таких

значений нет, то проводится графоаналитический параметрический синтез текущей математической модели экспоненциального сглаживания по принятым индикаторам подгонки (SE, CO, CAO, SSE, OO, COO, CAO). Затем повторное выполнение шагов 3-5.

*Шаг 6.* Если среди всех ретроспективных коэффициентов сглаживания  $\alpha_i$  есть значения из диапазона (0,1), то определяется текущее значение константы сглаживания путем сплайн-аппроксимации по ее ретроспективным значениям и расчет прогнозного значения  $F_i(\alpha)$ .

*Шаг 7.* Добавление очередного члена  $A_t$  статистического ряда исходных данных и коррекция глубины ретроспективного анализа. Повторение шагов 3-6.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что предложенные модели, методы и разработанные на их основе вычислительные алгоритмы позволяют повысить достоверность прогноза, что в свою очередь дает возможность проводить научно обоснованное оперативное планирование и обеспечить эффективное управление.



Рис. 2.23. Метод структурного синтеза моделей экспоненциального сглаживания

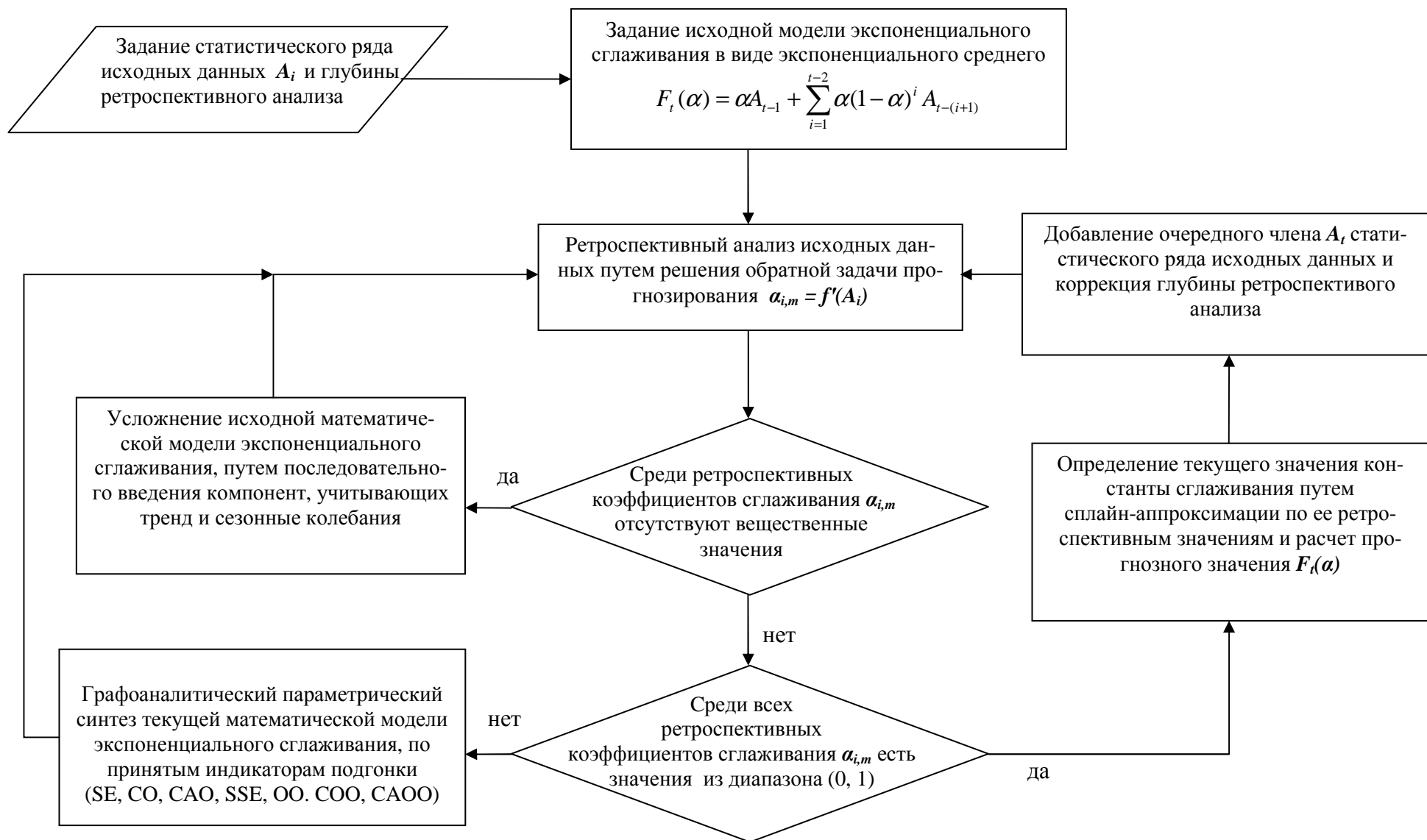


Рис. 2.24. Процедура структурного синтеза прогнозных моделей экспоненциального сглаживания

## 2.6. Моделирование и расчет показателей сбытовой деятельности торгового предприятия

### 2.6.1. Корреляционный анализ исходных данных

Данные об ассортименте и объемах продаж торгового предприятия сгруппированы по однородным группам, сведенным в табл. 2.6, по которым необходимо выполнить прогноз продаж на следующий месяц.

Таблица 2.6

Распределение по однородным группам продуктов торгового предприятия

Группа	Продукт	Наименование продукта
3	X <sub>1</sub>	Десерт творожный Ромол 200г 7.5% Танюша пл/ст
3	X <sub>2</sub>	Десерт Даниссимо 135г 5.4% клубника
3	X <sub>3</sub>	Десерт Даниссимо 135г 5.4% вишня
4	X <sub>4</sub>	Йогурт Данон Растишка 5.4% 90г клубника
4	X <sub>5</sub>	Йогурт Данон Активия 125г клубника
4	X <sub>6</sub>	Напиток Данон Актимель 100г натуральный
2	X <sub>7</sub>	Кефир Ромол 2.5% 1000г ф/п
2	X <sub>8</sub>	Ряженка Заречье 4% 500г ф/п
2	X <sub>9</sub>	Кефир Заречье 1% 500г ф/п
2	X <sub>10</sub>	Молоко Заречье 2.5% 1000г пастеризованное ф/п
2	X <sub>11</sub>	Молоко Заречье 500г 3.2% пастеризованное ф/п
2	X <sub>12</sub>	Молоко Заречье 4% топленое 500г ф/п
1	X <sub>13</sub>	Масса творожная Ромол 200г 15% с изюмом пл/ст
1	X <sub>14</sub>	Масса творожная Ромол 200г 15% с изюмом в глазури пл/ст
1	X <sub>15</sub>	Творог Заречье 250г 5% Крестьянский

Корреляционный анализ дает возможность установить, ассоциированы ли наборы данных по величине, то есть: большие значения из одного набора данных связаны с большими значениями другого набора (положительная корреляция) или, наоборот, малые значения одного набора связаны с большими значениями другого набора (отрицательная корреляция).

ниями другого (отрицательная корреляция), или данные двух диапазонов никак не связаны (корреляция близка к нулю). Полученные результаты позволят произвести группировку реализуемых продуктов по продуктовым наборам, что позволит в дальнейшем структурировать их поставки не только по ассортименту или по однородным группам.

Из матрицы коэффициентов парной корреляции составим распределение продуктов торгового предприятия по смешанным товарным группам (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Распределение по товарным группам продуктов  
торгового предприятия

Товарная группа (смешанная)	Товарная группа (однородная)	Продукт
1	3	X <sub>1</sub>
	2	X <sub>8</sub>
	2	X <sub>9</sub>
	2	X <sub>12</sub>
	1	X <sub>13</sub>
	1	X <sub>14</sub>
2	1	X <sub>15</sub>
	4	X <sub>4</sub>
	4	X <sub>6</sub>
	2	X <sub>11</sub>
3	3	X <sub>2</sub>
4	3	X <sub>3</sub>
5	2	X <sub>7</sub>
6	2	X <sub>10</sub>
7	4	X <sub>5</sub>

При поставках продукции следует учитывать возможные взаимные влияния различных продуктов друг на друга, так как некоторые наборы продуктов могут быть ассоциированы между

собой по величине. Это объясняется тем, что кажущиеся на первый взгляд случайными зависимости между товарами разных групп могут иметь объективный характер (например, некоторые покупатели имеют привычку брать творожную массу в наборе с кефиром или ряженкой, и несоблюдение пропорций между такими продуктами может негативно повлиять на спрос на данные продукты).

### 2.6.2. Прогнозирование объема продаж методом экспоненциального сглаживания

Определим прогнозное значение объема продаж товара «Десерт творожный Ромол 200 г 7.5% Танюша пл/ст» торгового предприятия в январе будущего года ( табл. 2.8).

Таблица 2.8

Динамика изменения объема продаж товара «Десерт творожный Ромол 200 г 7.5% Танюша пл/ст» торгового предприятия в текущем году

Период	Обозначение	Объем продаж, шт.	Сумма продаж, грн	Относительный объем продаж
Январь	$F_1$	535	1121,25	1
Февраль	$F_2$	576	1236,92	1,077
Март	$F_3$	582	1278,14	1,088
Апрель	$F_4$	664	1453,79	1,241
Май	$F_5$	749	1638,88	1,4
Июнь	$F_6$	835	1824,81	1,56
Июль	$F_7$	870	1897,33	1,626
Август	$F_8$	1073	2339,04	2
Сентябрь	$F_9$	1097	2490,68	2,05
Октябрь	$F_{10}$	1116	2734,69	2,086
Ноябрь	$F_{11}$	1244	3049,62	2,325
Декабрь	$F_{12}$	1073	2807,08	2,006
Январь	$F_{13}$	1045	2775,2	1,953

Точность прогнозирования будем определять сравнением прогнозного значения с текущим, или наблюдаемым, значением. Ошибка прогноза определяется формулой:

$$\text{Ошибка прогноза} = \text{Объем продаж} - \text{Прогноз}. \quad (2.83)$$

Значения ошибок прогноза  $\varepsilon_{\hat{y}_i}$  оцениваются средним абсолютным отклонением (САО). Оно рассчитывается суммированием абсолютных значений индивидуальных ошибок прогноза и делением на число периодов данных  $n$ :

$$\varepsilon_{\hat{y}_i} = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|}{n}. \quad (2.84)$$

Предпочтительным будет являться такое значение константы сглаживания  $\alpha$ , при котором значение  $\varepsilon_{\hat{y}_i}$  будет наименьшим.

Для определения прогнозного значения объема продаж товара в январе будущего года воспользуемся инструментальными средствами MS Excel. Для этого вначале определяем тренд, наилучшим образом аппроксимирующий фактические данные.

Для расчета тренда используем опцию «Линия тренда» MS Excel. При этом воспользуемся полиномиальным трендом, имеющим гораздо более высокий коэффициент детерминации, чем линейный тренд, что позволит сократить ошибку прогнозной модели. При помощи аппроксимирующей (сглаженной) кривой получим прогноз на следующий период (рис. 2.25).

Согласно этому прогнозу объем продаж в январе будущего года составит 790.

Функция зависимости прогнозного значения от константы сглаживания  $\alpha$  и от ошибки первоначального прогноза  $F_0$  представлена на рис. 2.26.

Десерт творожный Ромол 200г 7.5% Танюша пл/ст

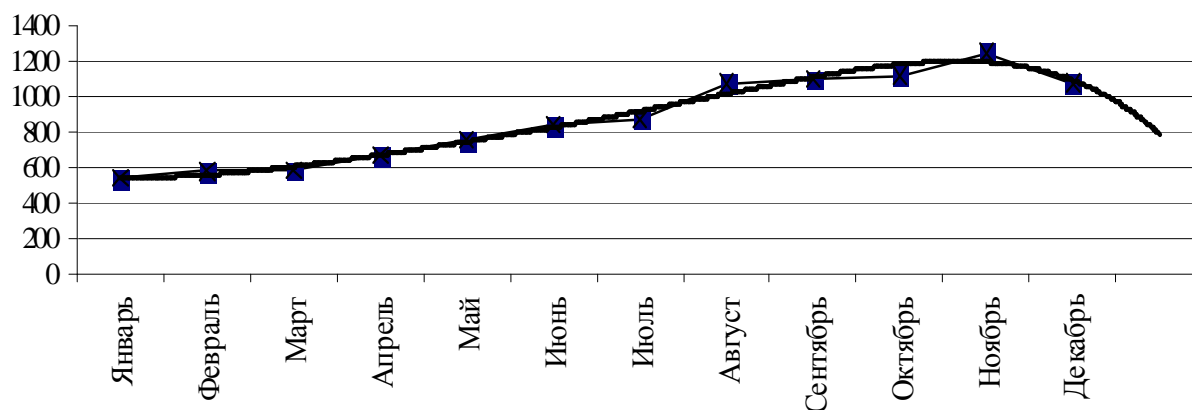


Рис. 2.25. Динамика изменения объема продаж товара

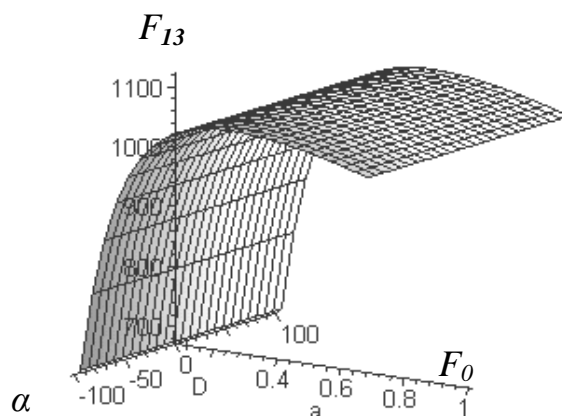


Рис. 2.26. Функция зависимости прогнозного значения от константы сглаживания и от первоначальной ошибки прогноза

Построим графики зависимостей оценок ошибок прогнозирования  $\varepsilon_{cao}(\alpha)$ , и  $\varepsilon_{ско}(\alpha)$  от константы сглаживания  $\alpha$  и от ошибки первоначального прогноза  $F_0$ .

Как видно из рис. 2.27, функция  $\varepsilon_{cao}(\alpha)$  достигает своего наименьшего значения при  $\alpha = 0,915$ . Составим прогноз на январь будущего года и сравним его с фактическими данными продаж. При данном значении  $\alpha$  прогноз будет равняться 1086. С учетом того, что моделируемая функция в рассматриваемом примере известна, то ошибка прогноза составляет 3,98%, что являет-

ся вполне удовлетворительным с точки зрения прогноза продаж.

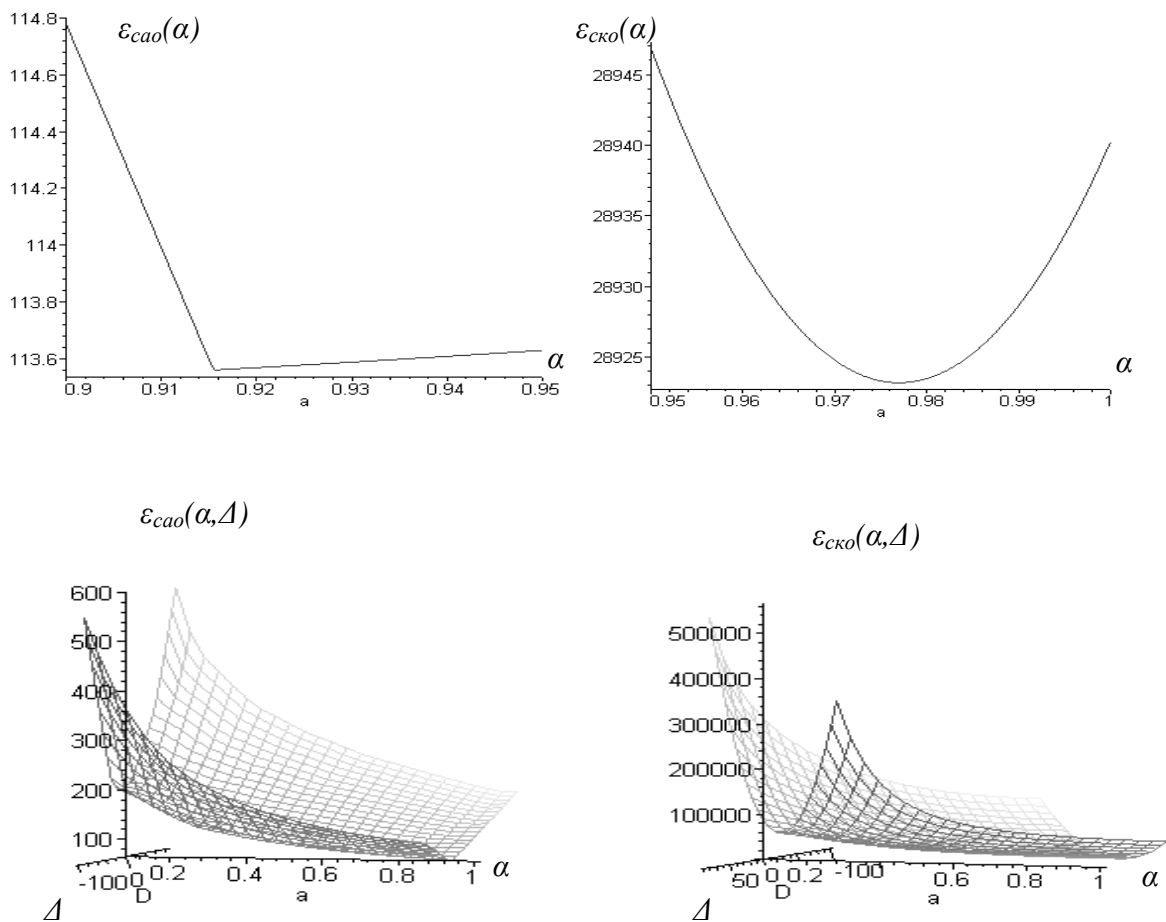


Рис. 2.27. Графики зависимостей ошибок прогнозирования от константы сглаживания и от ошибки первоначального прогноза

В то же время, функция  $\varepsilon_{\hat{n}t}(\alpha)$  достигает своего минимума при  $\alpha = 0,977$ . При данном значении  $\alpha$  прогноз будет равняться 1076, а ошибка прогноза составит 3,049 %.

Проанализировав графики зависимостей  $CAO$  и  $CKO$  от константы сглаживания  $\alpha$  и от ошибки первоначального прогноза  $\Delta$ , можно сделать вывод, что данные модели хорошо аппроксимируют фактические данные и их использование обеспечивает составление прогнозов с высокой степенью достоверности.

Сравним полученные данные с результатами, полученными

при составлении прогноза на следующий период путем использования аппроксимирующей (сглаженной) кривой в тренде, получаемом в результате применения опции «Линия тренда» в MS Excel.

Представим полученные результаты в виде табл. 2.9.

Таблица 2.9

Сравнительная таблица ошибок прогнозирования для различных методов

Метод прогнозирования	$\min \varepsilon_{cao}(\alpha)$	$\min \varepsilon_{ско}(\alpha)$	<i>Trend</i>
$\alpha$	$\alpha_m^{**} = 0,915$	$\alpha_m^* = 0,977$	$\alpha = 0,13$
Прогноз $F_{13}$	1086	1076	790
Абсолютная ошибка прогноза	41,59	31,86	255
Относительная ошибка прогноза (%)	3,98	3,049	24,4

### 2.6.3. Прогнозирование объема продаж при помощи модифицированной модели экспоненциального сглаживания

Определим прогнозное значение объема продаж товара «Десерт творожный Ромол 200 г 7.5% Танюша пл/ст» в январе будущего года, воспользовавшись модифицированной моделью экспоненциального сглаживания, в которой учитывается тренд:

$$S_t = \alpha A_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}),$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1},$$

$$F_{t+1} = S_t + T_t,$$

где  $S_t$  – начальный прогноз в период  $t$ ,  $T_t$  – тренд в период  $t$ ,  $F_{t+1}$  – прогноз на период  $t+1$  с учетом тренда,  $\beta$  – сглаживающая по-

стоянная для тренда.

Процесс выбора константы сглаживания и сглаживающей постоянной для тренда связан с анализом сложной полиномиальной зависимости между используемыми оценками ошибок прогнозирования и величинами константы сглаживания и сглаживающей постоянной для тренда, и может быть сведен к графоаналитическому решению задачи.

Функция зависимости прогнозного значения от константы сглаживания  $\alpha$  и от сглаживающей постоянной для тренда  $\beta$  представлена на рис. 2.28.

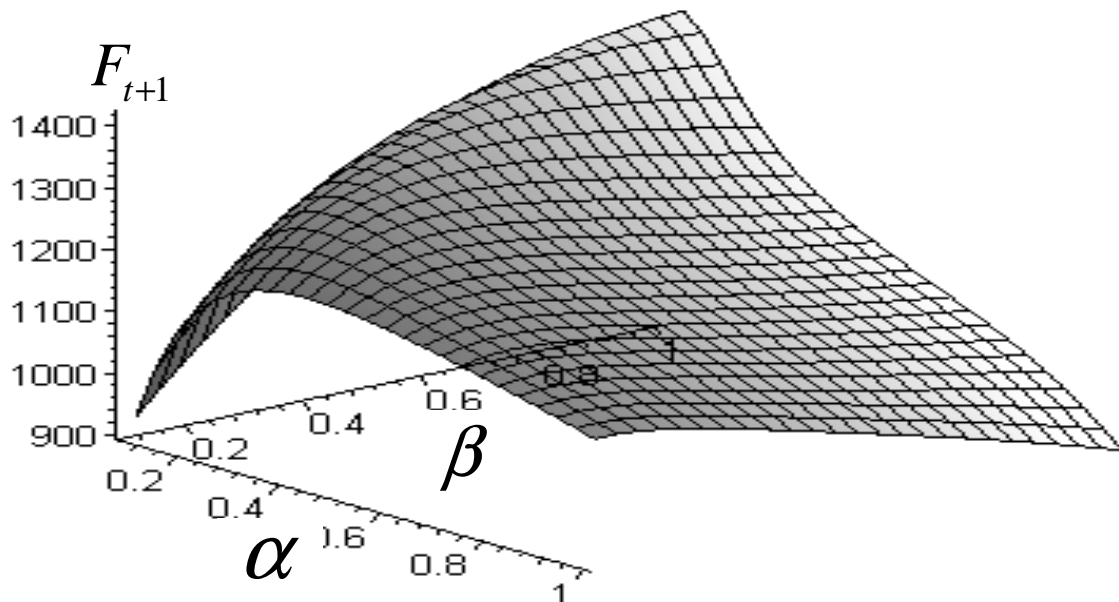


Рис. 2.28. График зависимости прогнозного значения от константы сглаживания и от сглаживающей постоянной для тренда

Представим график зависимости ошибки прогнозирования  $\varepsilon_{\hat{n}\hat{t}}(\alpha, \beta)$  от константы сглаживания  $\alpha$  и от сглаживающей постоянной для тренда  $\beta$  (рис. 2.29).

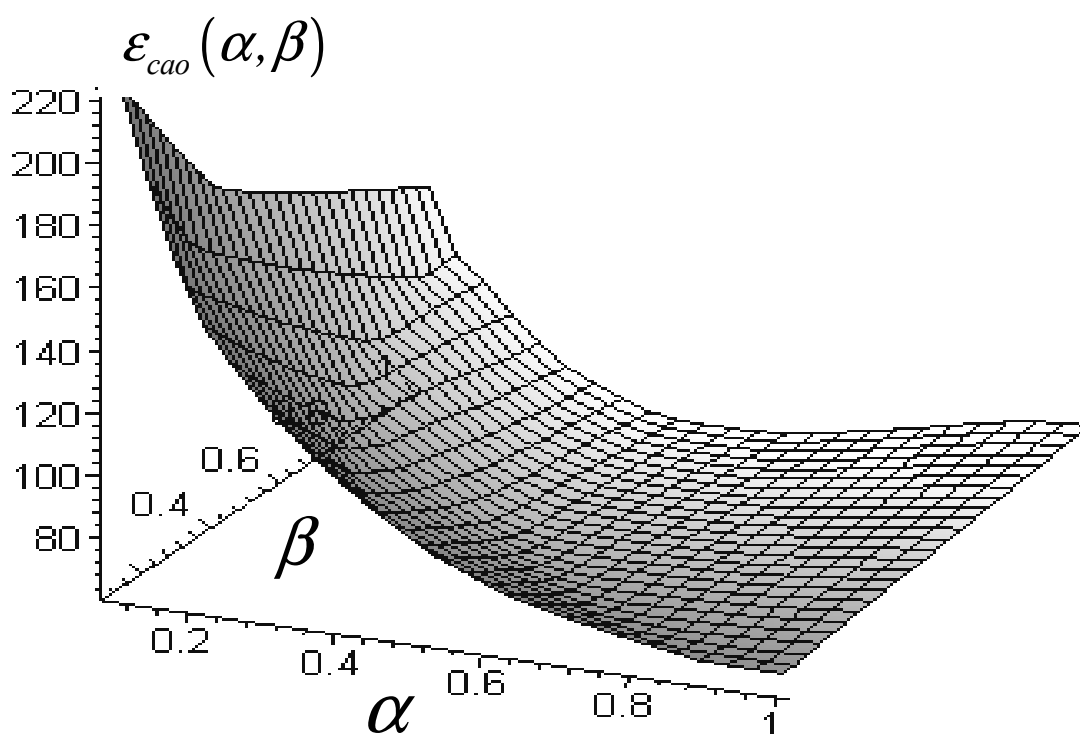


Рис. 2.29. График зависимости ошибки прогнозирования от константы сглаживания и от сглаживающей постоянной для тренда

Представим график зависимости ошибки прогнозирования  $\varepsilon_{\hat{n}t}(\alpha, \beta)$  от константы сглаживания  $\alpha$  и от сглаживающей постоянной для тренда  $\beta$  (рис. 2.30).

Как видно из рис. 2.29, функция  $\varepsilon_{cao}(\alpha, \beta)$  достигает своего наименьшего значения при  $\alpha = 0,496$  и  $\beta = 1$ . Составим прогноз на январь будущего года и сравним его с фактическими данными продаж. При данных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  прогноз будет равняться 1135,16, а ошибка прогноза составит 8,6 %.

В то же время, функция  $\varepsilon_{ско}(\alpha, \beta)$  достигает своего минимума при  $\alpha = 0,522$  и  $\beta = 1$ . При данных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  прогноз будет равняться 1124,78, а ошибка прогноза составит 7,6 %.

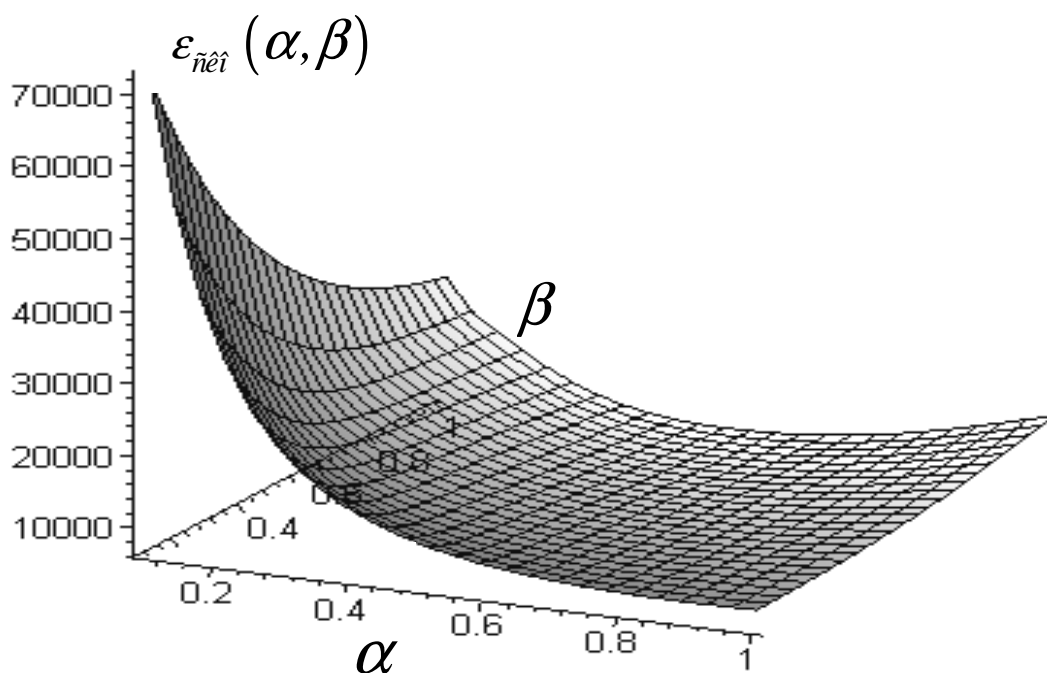


Рис. 2.30. График зависимости ошибки прогнозирования от константы сглаживания и от сглаживающей постоянной для тренда

Представим полученные результаты в виде табл. 2.10.

Проанализировав графики зависимостей  $CAO$  и  $CKO$  от константы сглаживания  $\alpha$  и от сглаживающей постоянной для тренда  $\beta$ , можно сделать вывод, что данные модели достаточно хорошо аппроксимируют фактические данные и их использование обеспечивает составление прогнозов с высокой степенью достоверности.

Таблица 2.10

Сравнительная таблица ошибок прогнозирования для различных методов

Метод прогнозирования	$\min \varepsilon_{cao}(\alpha, \beta)$	$\min \varepsilon_{cko}(\alpha, \beta)$
$\alpha$	$\alpha_m^* = 0,496$	$\alpha_m^{**} = 0,522$
Прогноз $F_{13}$	1135,16	1124,78
Абсолютная ошибка	90,16	79,78
Относительная ошибка, %	8,6	7,6

### 2.6.4. Нахождение константы сглаживания путем решения обратной задачи для известных данных

Одним из методов получения необходимого решения является решение обратной задачи нахождения  $\alpha$  по данным приведенной таблицы.

Суть предлагаемого подхода состоит в расчете констант сглаживания  $\alpha_{i\dot{a}\delta}$  для известных данных  $x_{ij}$ ,  $x_{ij}$  в моменты  $T, T_{T-1}, T_{T-2}, \dots$ , а затем в решении прямой задачи вычисления прогнозного значения константы сглаживания в момент времени  $T_i$  (январь будущего года). Это позволит повысить достоверность прогноза за счет учета особенностей конкретных условий реализации товаров, что заключается в адаптации прогнозной модели к специфике реальной ситуации. Составим сводную таблицу найденных значений констант сглаживания  $\alpha_{i\dot{a}\delta}$ .

Таблица 2.11

Значения констант сглаживания  $\alpha_{i\dot{a}\delta}$  и  $\alpha^*$

Период	$\alpha_{обр}$	$\alpha^* (0 < \alpha < 1)$
Январь	-	-
Февраль	1,077	1
Март	1,05	1
Апрель	1,55	1
Май	1,35	1
Июнь	1,67	1
Июль	1,5	1
Август	1,89	1
Сентябрь	1,12	1
Октябрь	1,89	1
Ноябрь	1,75	1
Декабрь	0,329	0,329

Прогнозное значение константы сглаживания в момент времени  $T_T$  составляет 0,4. При данном значении  $\alpha$  прогноз будет равняться 1101,1, а ошибка прогноза составит 5,37 %.

Составим прогноз, используя коэффициенты сглаживания  $\alpha^*$  в интервале от 0 до 1, которые бы наиболее точно приближались к действительному количеству продаж в следующем периоде.

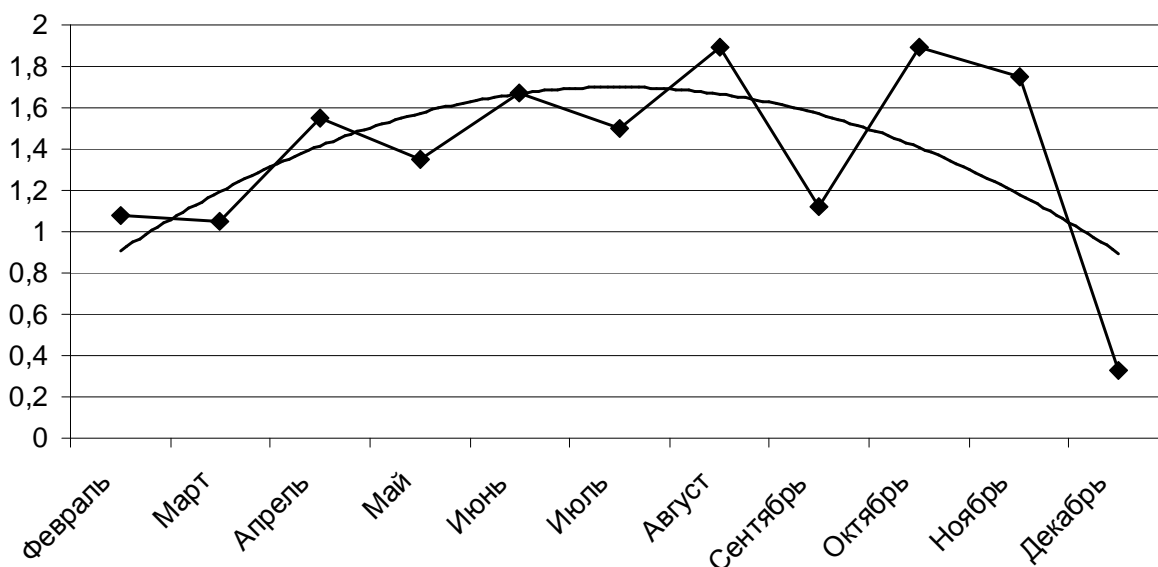


Рис. 2.31. Динамика изменения константы сглаживания  $\alpha$

Как мы видим, если тренд возрастающий, то, какое бы из возможных значений  $\alpha$  в пределах интервала от 0 до 1 мы не выбрали, ни одно из них не дало бы нам точного прогноза, который соответствовал бы действительному объему продаж в следующем периоде. Поэтому иногда целесообразно брать значения  $\alpha$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq 2$ , как предлагают некоторые экономисты, например, Бреннер.

Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о работоспособности предложенной процедуры определения константы сглаживания.

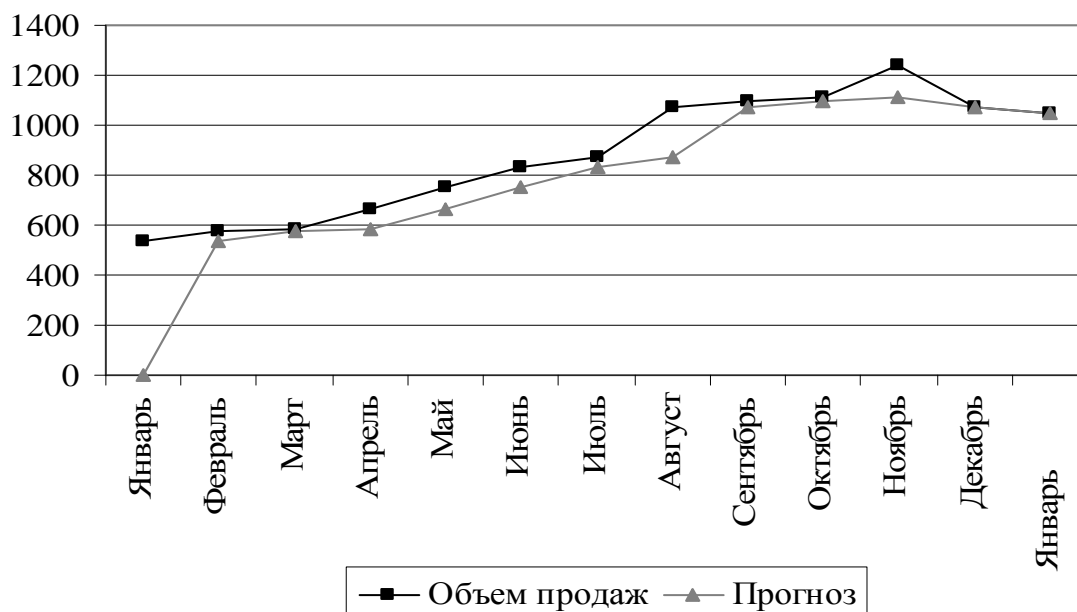


Рис. 2.32. Прогноз объема продаж с новыми значениями  $\alpha$

Величины полученных прогнозных ошибок позволяют говорить о том, что построенные модели хорошо аппроксимируют фактические данные, т.е. вполне адекватно отражают экономические тенденции, определяющие объем продаж, и является предпосылкой для построения прогнозов с высокой достоверностью.

## 2.7. Использование инструментов MS EXCEL в задачах прогнозирования по временным рядам

### О средствах прогнозирования MS Excel [20]

В Excel имеется несколько инструментов для прогнозирования, в основе которых применяются различные математические модели:

- скользящее среднее (в качестве прогноза принимается среднее значение наблюдаемой величины в нескольких последних измерениях) может быть вычислено с помощью функции с именем **СРЗНАЧ** или надстройки **Скользящее среднее**;
- линейный прогноз (к полученным значениям величины

приближается прямая линия, на основании которой и рассчитывается прогноз) выполняется с помощью функции с именем **ТЕНДЕНЦИЯ** или надстройки **Регрессия**;

– нелинейный прогноз (принимается, что значение величины изменяется не линейно) может быть получен с помощью функции с именем **РОСТ**;

– экспоненциальное сглаживание (принимается усредненное значение наблюдений, в которое значения последних наблюдений входят с большим весом по сравнению с весом старых наблюдений) выполняется с помощью надстройки **Экспоненциальное сглаживание**.

### **Применение метода скользящего среднего**

При использовании этого метода прогноз любого периода представляет собой получение среднего показателя нескольких результатов наблюдений временного ряда. Хотя этот метод слишком прост для создания точного прогноза, иногда он может быть более эффективен, чем методы, основанные на долговременных наблюдениях. Например, если за последние несколько месяцев в изменении объема продаж наметилась тенденция отличная от той, которая наблюдалась в предыдущие два года, то, используя данные последних месяцев для составления прогноза на следующий месяц, будет получен более точный результат, чем при использовании данных за два года.

Одним из способов создания скользящего среднего в Excel является прямое введение формулы. Ввести формулу в ячейку можно простым набором на клавиатуре после знака «=» стандартной функции: **=СРЗНАЧ(С1:СJ)**, где С – буквенное обозначение столбца, содержащего необходимые ячейки; I – номер первой ячейки диапазона данных; J – номер последней ячейки диапазона.

Можно ввести формулу в ячейку, используя встроенный ин-

струмент **Мастер функций**. В меню **Вставка** выберите **Функция**. В открывшемся диалоговом окне, в разделе **Категория** выберите – **Статистические**, в разделе **Функция** – **СРЗНАЧ**. После этого выделите диапазон данных и нажмите **ОК**.

Другим способом создания скользящего среднего является использование надстройки **Пакет анализа**. В меню **Сервис** выберите **Анализ данных**. Появится диалоговое окно **Анализ данных**. Из списка выберите инструмент анализа **Скользящее среднее** и нажмите **ОК**. Появится диалоговое окно **Скользящее среднее**. В поле **Входной интервал** укажите диапазон в рабочем листе. В поле **Интервал** введите количество периодов, которые хотите включить в подсчет скользящего среднего. В поле **Выходной интервал** выделите ячейку, с которой хотите начать вывод расчетных значений. Нажмите **ОК**.

С помощью инструментов Excel возможно графическое представление данных скользящего среднего. Для этого необходимо создать график, содержащий значения базовых данных, с помощью инструмента **Мастер диаграмм**. Этот инструмент можно вызвать в меню **Вставка – Диаграмма**, либо на стандартной панели инструментов. После построения графика щелкните на линии правой кнопкой мыши. В появившемся контекстном меню выберите **Добавить линию тренда**. В появившемся диалоговом окне щелкните на вкладке **Тип**. Выберите линию тренда **Линейная фильтрация**, а затем – необходимое для расчета скользящего среднего количество периодов с помощью счетчика **Точки**. Нажмите **ОК**. Вы увидите на графике линию тренда скользящего среднего.

### **Применение функций регрессии Excel**

Для применения метода регрессии в процессе прогнозирования показателей можно использовать стандартные функции Excel: **ТЕНДЕНЦИЯ** и **РОСТ**. Методы регрессии оценивают

взаимосвязь между фактическими данными наблюдений и другими параметрами, например, порядковыми номерами периодов наблюдений или датами наблюдений.

Рассмотрим применение функции **ТЕНДЕНЦИЯ**. Предположим, данные наблюдений конкретного показателя внесены в рабочем листе в столбце А с 1-ой по 10-ю ячейки. Значения порядковых номеров наблюдений внесены в столбце В, рядом со значениями соответствующих показателей. На основании имеющихся данных, можно построить прогноз исследуемого показателя на последующие периоды временного ряда, по которым еще нет результатов наблюдений. Например, у вас имеются результаты десяти наблюдений, и вы хотите определить прогнозные показатели на следующие десять аналогичных периодов времени. В ячейках А1:А10 внесены значения показателя, а в ячейках В1:В10 – порядковые номера наблюдений 1, 2, 3 ... 10.

Чтобы определить прогнозное значение одного первого периода, в ячейку В11 внесите порядковый номер этого периода – 11. Далее, в ячейку С11 вставьте формулу функции **ТЕНДЕНЦИЯ** следующим образом. Выделите ячейку С11. В меню **Вставка** выберите **Функция**. В появившемся диалоговом окне в разделе **Категория** выберите **Статистические**, а в разделе **Функция** – **ТЕНДЕНЦИЯ**. Нажмите **ОК**. Появится диалоговое окно функции **ТЕНДЕНЦИЯ**. В строке **Иzv\_знач\_u** выделите диапазон ячеек А1:А10. В строке **Иzv\_знач\_x** выделите диапазон ячеек В1:В10. В строке **Нов\_знач\_x** выделите ячейку В11. Нажмите **ОК**. В ячейке С11 появится прогнозное значение показателя на одиннадцатый период.

Для того чтобы определить прогнозные значения сразу на десять будущих периодов, нужно формулу функции **ТЕНДЕНЦИЯ** ввести в диапазон ячеек С11:С20. Для этого внесите в ячейки В11:В20 порядковые номера прогнозируемых пе-

риодов – 11, 12, 13 ... 20. Выделите диапазон ячеек C11:C20. Нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter** (с помощью этой комбинации вводятся формулы массива) и, не отпуская клавиши, сделайте аналогичные действия, которые описывались выше. С одним изменением. В строке **Нов\_знач\_x** диалогового окна функции **ТЕНДЕНЦИЯ** выделите диапазон ячеек B11:B20. В ячейках C11:C20 появятся прогнозные значения для десяти будущих периодов.

Функция **ТЕНДЕНЦИЯ** вычисляет прогнозы, основанные на линейной связи между результатом наблюдений и временем наблюдений. Если же взаимосвязь показателей носит нелинейный характер, более точный прогноз вы можете построить, используя функцию Excel **РОСТ**.

Используя тот же пример, в ячейках A1:A10 внесены данные наблюдений показателя, в ячейках B1:B10 – порядковые номера наблюдений. Так же как и для функции **ТЕНДЕНЦИЯ**, введите в ячейки B11:B20 номера прогнозных периодов. Далее сделайте аналогичные действия, только в разделе **Функция** диалогового окна **Мастер функций** выберите **РОСТ**. В ячейках C11:C20 вы получите прогнозные значения показателя, рассчитанные с использованием функции **РОСТ**.

Если возникла необходимость провести регрессионный анализ на графике, который вы построили по данным наблюдений, можно не вводить в рабочий лист значения номеров прогнозных периодов. Прогноз можно сделать с помощью графической линии тренда.

Щелкните правой кнопкой мыши на линии построенного графика. В появившемся контекстном меню выберите **Добавить линию тренда**. Выберите тип линии тренда **Линейная**. Щелкните на вкладке **Параметры**. В поле **Вперед на** введите количество желаемых периодов для прогноза. При желании, можете устано-

вить флажок **показывать уравнение на диаграмме**. Нажмите **ОК**. В результате на графике будет построена линия тренда вашего временного ряда, продленная вперед на то количество периодов, которое вы выбрали.

Если вы вывели уравнение линии тренда на диаграмму, то, используя это уравнение, можете рассчитать прогноз исследуемого показателя на любой другой период. Для этого вам необходимо в уравнение вместо переменной  $X$  подставить порядковый номер соответствующего периода (либо соответствующую дату, если в качестве параметра регрессии использовались даты проведения наблюдений, а не их порядковые номера).

### **Использование функции экспоненциального сглаживания**

Функция сглаживания имеет свои особенности по сравнению с функциями, основанными на регрессии. В отличие от функций **ТЕНДЕНЦИЯ** и **РОСТ**, каждый новый прогноз представляет собой сумму предыдущего прогноза и поправочного коэффициента, который и передвигает новый прогноз в направлении, делающем предыдущий результат более точным.

Сглаживание является очень полезным в тех случаях, когда во временном ряду наблюдаются существенные различия в уровнях данных. При наличии во временном ряду резкого скачка показателя линейная линия тренда не отображает этого явления. При прогнозе, выполненном с помощью сглаживания, фактическая базовая линия отслеживается довольно точно.

Excel непосредственно поддерживает один из методов сглаживания с помощью средства **Экспоненциальное сглаживание**. Это средство находится в надстройке **Пакет анализа**.

Для применения метода экспоненциального сглаживания введите данные наблюдений конкретного показателя в ячейки рабочего листа, например, A1:A10. В меню **Сервис** выберите

**Анализ данных.** В диалоговом окне выберите **Экспоненциальное сглаживание**. В поле **Входной интервал** необходимо выделить ячейки интервала анализируемых данных и дополнительно захватить пустые ячейки этого же столбца. Причем количество пустых дополнительных ячеек должно соответствовать количеству периодов, на которые вы хотите составить прогноз, плюс еще одна ячейка. Далее в поле **Фактор затухания** внесите показатель, например 0,7. В поле **Выходной интервал** выделите ячейку, с которой начнется запись значений сглаженной линии. Например, B1. Нажмите **ОК**. Если вы поставите галочку в поле **Вывод графика**, средство автоматически помимо вывода значений сглаженной линии построит график сглаженной линии и график линии исходных данных.

Важным показателем, влияющим на точность прогноза, является фактор затухания. Чем меньше фактор затухания, тем точнее отражает прогноз последние данные наблюдений, а чем больше – тем сильнее будет отставание прогноза от этих данных. Хорошие результаты получаются тогда, когда последние результаты наблюдений отражают случайные явления, которые долго не изменяют общего уровня временного ряда.

Следует избегать использования параметра **фактор затухания**, который меньше значения 0,7. Если у вас создается впечатление, что при большем значении этого показателя средство **Экспоненциальное сглаживание** действует значительно лучше, то, вероятнее всего, это происходит благодаря высокому уровню автокорреляции во временном ряду.

Автокорреляция – очень важный параметр процесса прогнозирования. Он характеризует существующую зависимость между данными наблюдений, полученными в определенное время, и данными наблюдений, полученными на несколько временных периодов раньше.

Если объединить каждый результат наблюдений с результатом, непосредственно предшествующим ему, то можно вычислить корреляцию между этими двумя наборами данных.

Для проверки автокорреляции в Excel существует функция **КОРРЕЛ**. Воспользоваться ею можно также двумя способами. Либо введите в ячейку непосредственно формулу: **=КОРРЕЛ(A1:A9;A2:A10)**, либо в меню **Вставка** выберите **Функция**. В окне мастер функций выберите категорию **Статистические** и функцию **КОРРЕЛ**. Нажмите ОК. В окне функции выделите соответствующие диапазоны данных. Второй диапазон со сдвигом на одну ячейку.

Если показатель автокорреляции высокий, значит, каждый результат в большей степени зависит от значения наблюдения, полученного непосредственно перед этим.

### **Использование множественной регрессии**

Известно, что в хозяйственной деятельности любого предприятия между определенными показателями существует значимая связь. Например, изменение объема продаж зависит от изменения продажной цены, качества продукции, а также планируемого уровня расходов на рекламу. Тенденция изменения цен, например, на однокомнатные квартиры зависит от изменения цен на двухкомнатные квартиры и комнаты.

В связи с этим возникает вопрос, каким образом можно спрогнозировать результат изменения одного показателя с учетом тенденции изменения других показателей?

Одним из таких методов является использование уравнения множественной регрессии, в которое подставляются значения предсказуемых переменных. В общем виде это уравнение выглядит таким образом:

$$Y = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i X_i,$$

где  $Y$  – прогнозируемый показатель;  $A_i$  – коэффициенты;  $X_i$  – связанные, предсказуемые показатели.

В Excel существует встроенная функция, которая позволяет проводить анализ множественной регрессии, вычислять значения коэффициентов для уравнения множественной регрессии и определять некоторые другие характеристики регрессии взаимосвязанных показателей (например, значение дисперсии).

Для того чтобы воспользоваться встроенной функцией, внесите данные наблюдений показателя, который вы собираетесь прогнозировать, в ячейки рабочего листа Excel, например, в столбец А (A2:A10). Данные наблюдений связанных показателей за аналогичный период времени внесите в соседние ячейки, в столбцы В, С, D (в зависимости от количества связанных показателей). Далее, в меню **Сервис** выберите **Анализ данных**. В открывшемся диалоговом окне выберите инструмент **Регрессия**. Нажмите **ОК**. В диалоговом окне инструмента **Регрессия** введите входной интервал  $Y$  – интервал с данными наблюдений прогнозируемого показателя (A2:A10). Входной интервал  $X$  – полностью весь интервал с данными наблюдений всех связанных показателей, например, B2:D10. Нажмите **ОК**. В новом листе (если вы выберите параметры вывода – новый рабочий лист) появятся итоги регрессионного анализа взаимосвязанных показателей.

На основе данных полученного анализа вы можете построить уравнение множественной регрессии. В качестве коэффициентов уравнения будут значения, полученные в столбце **Коэффициенты** самой нижней таблицы анализа.  $A_0$  – **Y-пересечение**,  $A_1$  –  $A_n$  – значения для соответствующих переменных  $X_1$  –  $X_n$ .

Используя полученное уравнение, вы можете определить прогнозное значение своего показателя на любой будущий период, подставляя вместо переменных  $X_1$  –  $X_n$  планируемые значения предсказуемых связанных показателей.

**Пример. Исходные условия:** в табл. 2.15 представлены данные о некотором экономическом показателе за два года.

Таблица 2.15

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 год	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>12</sub>
2 год	X <sub>13</sub>	X <sub>14</sub>	X <sub>15</sub>	X <sub>16</sub>	X <sub>17</sub>	X <sub>18</sub>	X <sub>19</sub>	X <sub>20</sub>	X <sub>21</sub>	X <sub>22</sub>	X <sub>23</sub>	X <sub>24</sub>

**Задача:** используя опции MS EXCEL построения тренда и вывод формулы тренда MS EXCEL составить прогноз на следующий год.

**Решение.** Аддитивную модель прогнозирования можно представить в следующем виде:

$$F = T + S \pm E,$$

где  $F$  – прогнозируемое значение;  $T$  – тренд;  $S$  – сезонная компонента;  $E$  – ошибка прогноза.

Для уменьшения ошибки прогнозной модели используем полиномиальный тренд. Чтобы построить линию тренда, необходимо выполнить следующие действия: открыть команду **Диаграмма**, выбрать подпункт **Добавить линию тренда**. В окне **Линия тренда** необходимо выбрать **Полиномиальная**, степень **6** (рис. 2.38). В этом пункте в подпункте **Параметры** выделить строку **Показывать уравнение на диаграмме**.

Используя уравнение на диаграмме, делаем вычисления и заполняем колонку **Значение тренда**.

Для определения сезонной компоненты вычитаем из фактических значений объемов продаж значение тренда. Величину сезонной компоненты вычисляем как показано на рис. 2.38.

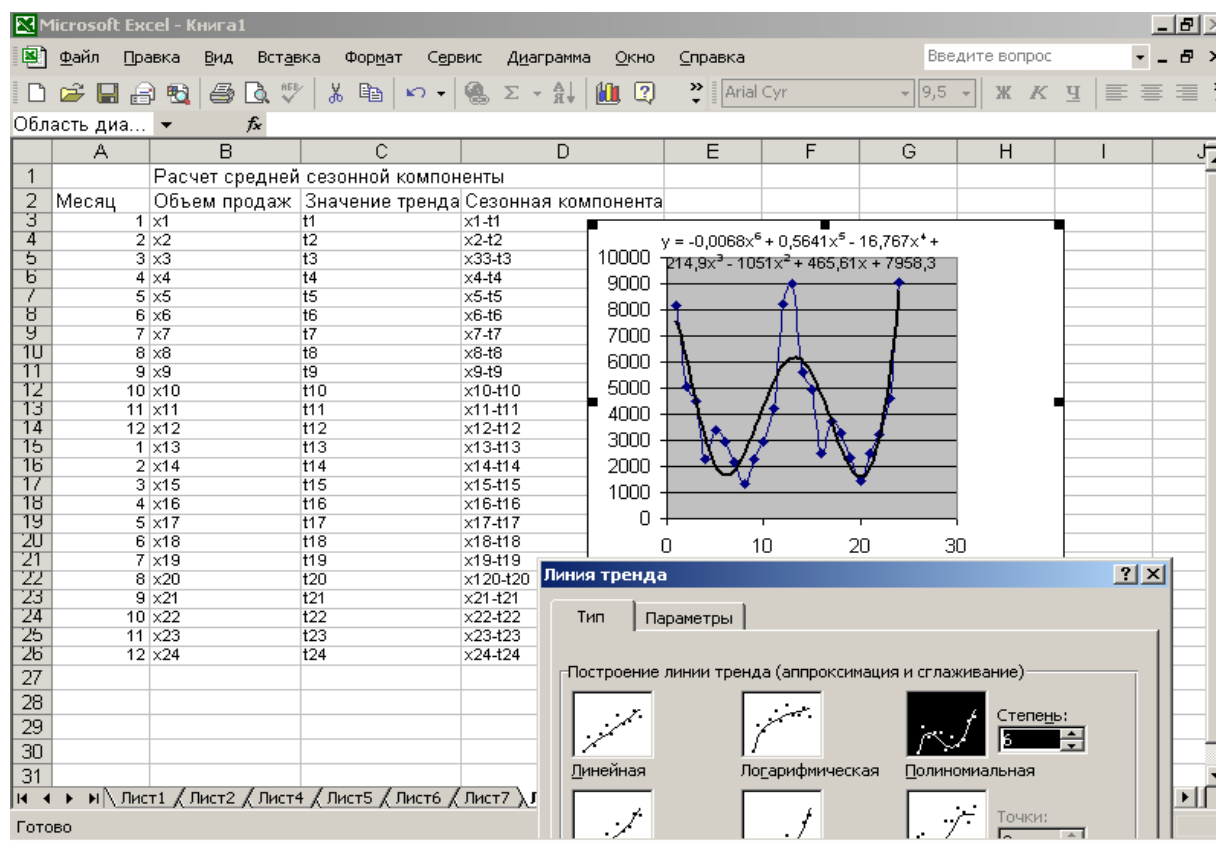


Рис. 2.38. Построение линии тренда  
и расчет сезонной компоненты

Скорректируем значение сезонной компоненты таким образом, чтобы их сумма была равна нулю. Для этого просуммируем сезонные компоненты одного и того же месяца разных лет, найдем среднее значение сезонной компоненты за каждый месяц и найдем их сумму, эту сумму разделим на количество месяцев, полученное значение вычитаем из среднего. На рис. 2.39 показан расчет средних значений сезонной компоненты.

Находим значение параметров модели, для этого среднюю сезонную компоненты прибавляем к значению тренда.

Теперь можно рассчитывать ошибку модели как разность между фактическими значениями и значениями модели (рис. 2.40).

Находим среднеквадратическую ошибку модели (E):

$$E = \frac{\sum O^2}{\sum (T + S)^2},$$

где  $T$  – трендовое значение объема продаж;  $S$  – сезонная компонента;  $O$  – отклонения модели от фактических значений.

Расчет средних значений сезонной компоненты					
Месяцы	1-й сезон	2-й сезон	Итого	Среднее	Сезонная компонента
1	x1-t1	x13-t13	i1=(x1-t1)+(x13-t13)	i1/2	i1/2-1
2	x2-t2	x14-t14	i2	i2/2	i2/2-1
3	x3-t3	x15-t15	i3	i3/2	i3/2-1
4	x4-t4	x16-t16	i4	i4/2	i4/2-1
5	x5-t5	x17-t17	i5	i5/2	i5/2-1
6	x6-t6	x18-t18	i6	i6/2	i6/2-1
7	x7-t7	x19-t19	i7	i7/2	i7/2-1
8	x8-t8	x20-t20	i8	i8/2	i8/2-1
9	x9-t9	x21-t21	i9	i9/2	i9/2-1
10	x10-t10	x22-t22	i10	i10/2	i10/2-1
11	x11-t11	x23-t23	i11	i11/2	i11/2-1
12	x12-t12	x24-t24	i12	i12/2	i12/2-1
				I=Σ i/12	

Рис. 2.39. Расчет средних значений сезонной компоненты

Расчет ошибки модели			
Месяц	Объем продаж	Значение модели	Ошибка модели
1	x1	m1=(i1/2-1)+t1	x1-m1
2	x2	m2=(i2/2-1)+t2	x2-m2
3	x3	m3=(i3/2-1)+t3	x3-m3
4	x4	m4	x4-m4
5	x5	m5	x5-m5
6	x6	m6	x6-m6
7	x7	m7	x7-m7
8	x8	m8	x8-m8
9	x9	m9	x9-m9
10	x10	m10	x10-m10
11	x11	m11	x11-m11
12	x12	m12	x12-m12
13	x13	m13=(i1/2-1)+t13	x13-m13
14	x14	m14=(i2/2-1)+t14	x14-m14
15	x15	m15	x15-m15
16	x16	m16	x16-m16
17	x17	m17	x17-m17
18	x18	m18	x18-m18
19	x19	m19	x19-m19
20	x20	m20	x20-m20
21	x21	m21	x21-m21
22	x22	m22	x22-m22
23	x23	m23	x23-m23
24	x24	m24	x24-m24

Рис. 2.40. Расчет ошибок

Построение модели прогнозирования показано на рис. 2.41.

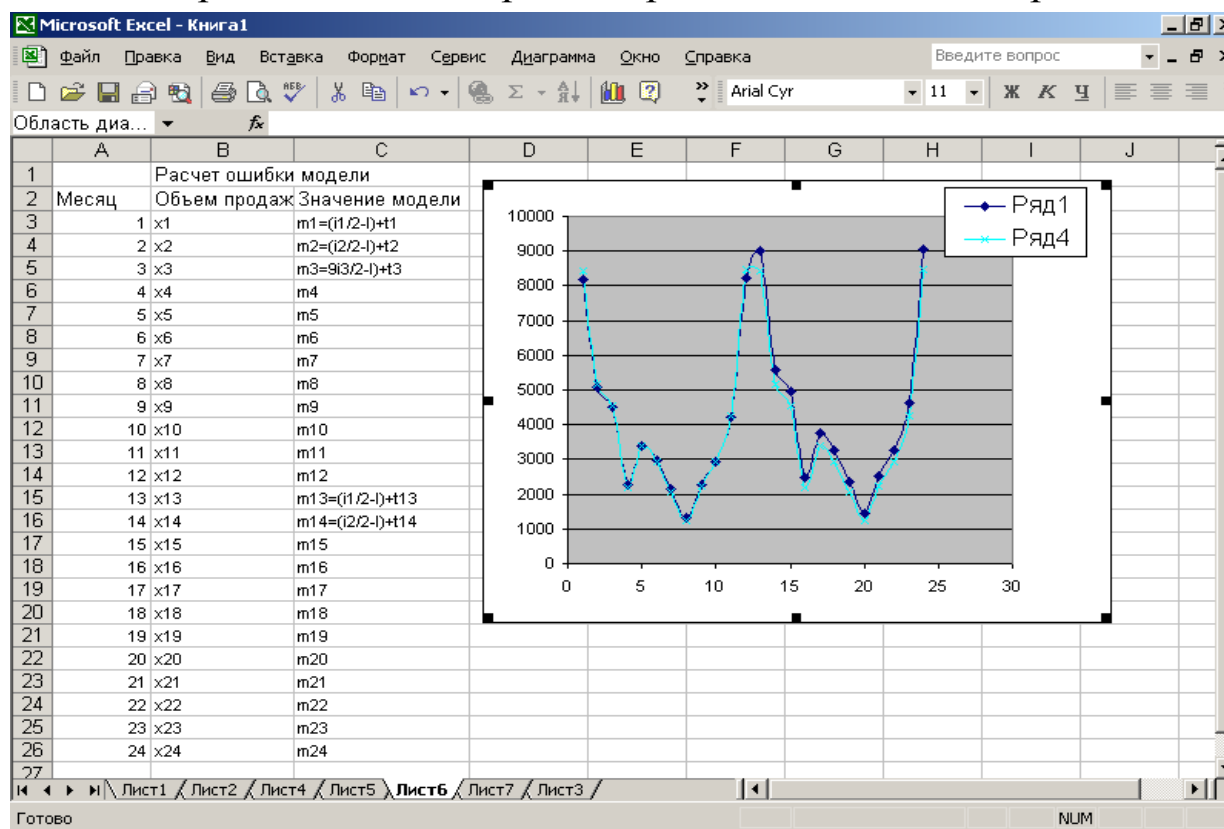


Рис. 2.41. Модель прогноза объема продаж

**Пример. Исходные данные:** предприятие предоставило данные об изменении некоторого экономического показателя за десять периодов (табл.2.16).

Таблица 2.16

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение показателя	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$	$F_{11}$

**Задача:** используя инструмент **Экспоненциальное сглаживание** анализа данных MS EXCEL, сделать прогноз на одиннадцатый период.

**Решение.** Предполагается, что наблюдение некоторой величины  $T$  производится через равные промежутки времени. Результат наблюдений обозначим  $T_n$ , где  $n$  – номер наблюдения. Прогноз  $F_{n+1}$  для следующего момента времени рассчитывается по

формуле:

$$F_{n+1} = F_n + (1 - \alpha) \cdot (T_n - F_n),$$

где  $\alpha$  – фактор затухания, выбирается обычно от 0,7 до 0,8. Меньшие значения фактора затухания ускоряет отклик прогноза на скачок наблюдаемого процесса, но могут привести к непредсказуемым выбросам.

Вначале, располагая лишь одним результатом наблюдений  $T_1$ , когда прогноза  $F_1$  нет и формулой (2.89) воспользоваться еще невозможно, в качестве прогноза  $F_2$  следует взять  $T_1$ .

$$F_{n+1} = \alpha F_n + (1 - \alpha) T_n.$$

Очевидно, что при уменьшении фактора затухания в прогнозе, доля последнего наблюдения увеличивается, а доля предыдущих наблюдений убывает.

Расчет прогноза:

$$F_2 = \alpha T_1 + (1 - \alpha) T_2,$$

$$F_3 = \alpha F_2 + (1 - \alpha) T_3,$$

...

$$F_{11} = \alpha F_{10} + (1 - \alpha) T_{10}.$$

### Алгоритм построения прогноза

1. Запустите Excel и щелкните на кнопке **Сохранить**.
2. С помощью кнопки **Создать папку** в появившемся окне **Сохранение документа** создайте на диске свою рабочую папку и сохраните в ней файл Книга1 под именем Пример 2.xls.
3. Введите в диапазоне A1:A11 заголовков и данные наблюдений, руководствуясь рис. 2.42.
4. Введите в ячейке B1 заголовок Прогноз.
5. Раскройте пункт меню **Сервис**. Если в выпавшем подменю нет команды **Анализ данных**, то выполните команду **Сервис, Надстройки**. В появившемся окне **Надстройки** (рис. 2.43) в списке надстроек установите флажок слева от строки **Analysis**

**ToolPak - VBA** (функции VBA для работы пакета анализа) и щелкните на кнопке **ОК**.

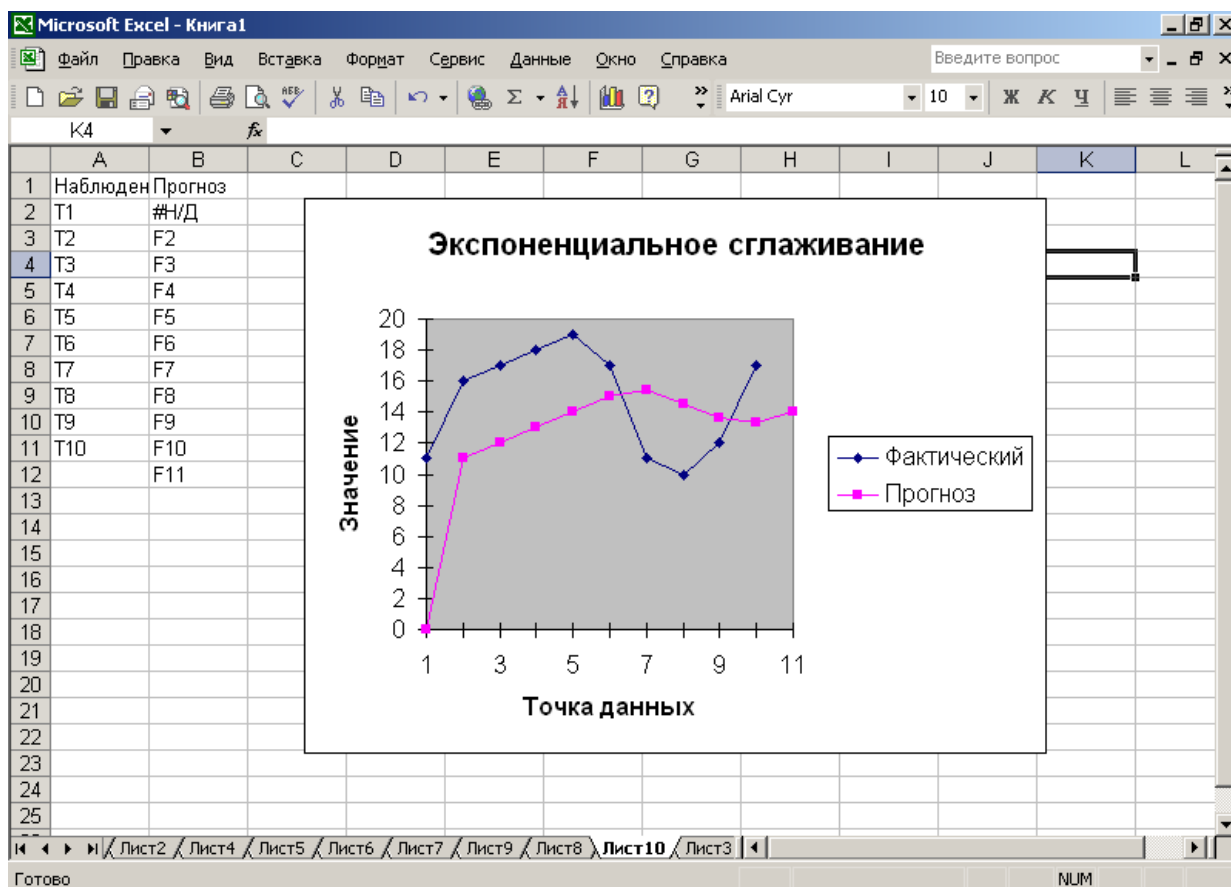


Рис. 2.42. Прогноз по методу экспоненциального сглаживания (фактор затухания равен 0,8)

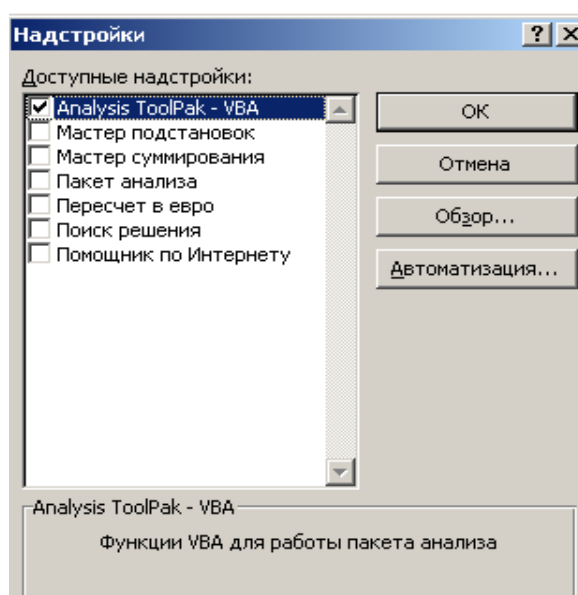


Рис.2.43. Установка пакета **Анализ данных**

6. Выполните команду **Сервис, Анализ данных**. Появится окно **Анализ данных** (рис. 2.44). Пролистайте список инструментов анализа и обратите внимание на то, что их достаточно много.

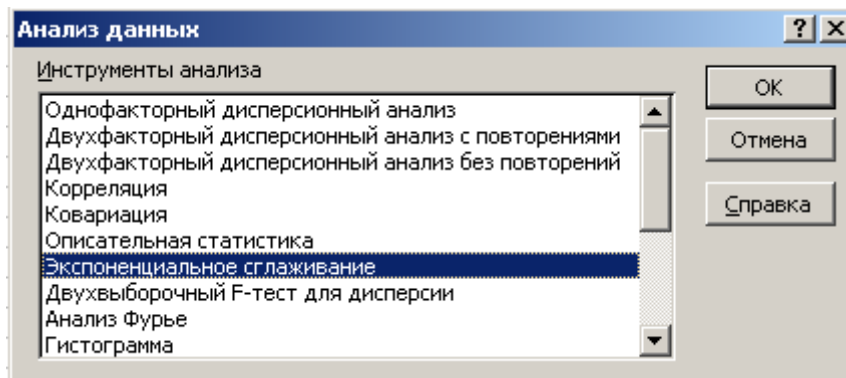


Рис. 2.44. Выбор инструмента анализа

7. В списке инструментов анализа выберите строку **Экспоненциальное сглаживание** и щелкните на кнопке **ОК**. Появится окно **Экспоненциальное сглаживание** (рис. 2.45), которое следует заполнить.

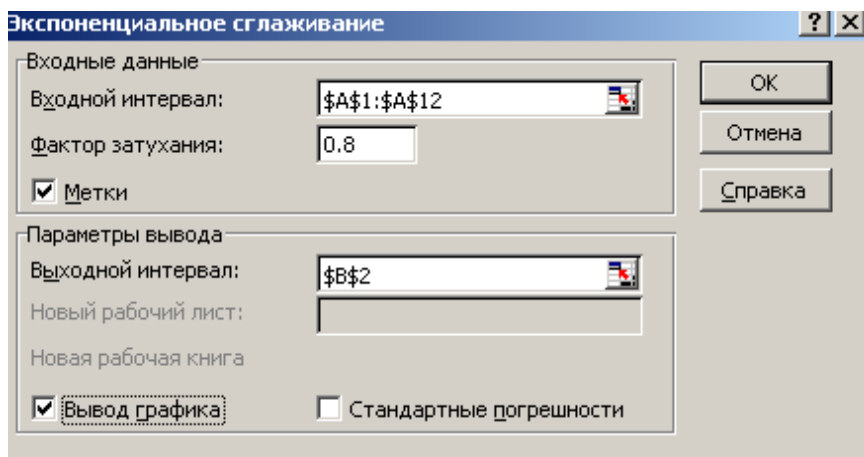


Рис. 2.45. Заполнение окна Экспоненциальное сглаживание

8. Установите курсор в поле **Входной интервал**. Выделите интервал входных данных A1:A12. В поле **Входной интервал** появится строка \$A\$1:\$A\$12.

9. Задайте фактору затухания значение 0,8.

10. Установите флажок в поле **Метка**, означающий, что

первая ячейка входного интервала является заголовком.

11. Установите курсор в поле **Выходной интервал**. Выделите ячейку B2 – первую ячейку выходного интервала. В поле **Выходной интервал** появится строка \$B\$2.

12. Установите флажок в поле **Вывод графика** и щелкните на кнопке **ОК**. На рабочем листе будет выведен прогноз и диаграмма, позволяющая сравнить прогноз с фактическими данными.

13. Установите в диапазоне ячеек B3:B12 числовой формат с двумя разрядами дробной части.

14. Проанализируйте полученные результаты. В ячейке A11 записано значение экономического показателя за десятый период наблюдений. В ячейке B11 записан прогноз на десятый период, полученный сглаживанием на основании данных предыдущих девяти интервалов наблюдений. В ячейке B12 записан прогноз экономического показателя на следующий период. Истинное значение экономического показателя станет известно только в следующем периоде. Запись в ячейке B2 означает недостаток данных. Сравнивая график фактических данных с графиком прогноза, можно сделать вывод о том, что прогноз, полученный сглаживанием, реагирует на скачок фактической функции, но медленнее, чем этого бы хотелось. Реакция будет более быстрой, если уменьшить значение фактора затухания.

15. Повторите получение прогноза, заменив значение 0,8 фактора затухания на минимальное рекомендуемое значение 0,7. Появившееся окно (рис. 2.46) с предложением перезаписать данные закройте щелчком на кнопке **ОК**.

Можно заметить, что теперь прогноз быстрее отслеживает скачок фактической функции. Снова повторите получение прогноза, заменив значение 0,7 фактора затухания на 0,1. Вы убедитесь, что в последнем случае качество прогноза заметно возросло,

а устойчивость прогноза сохранилась.

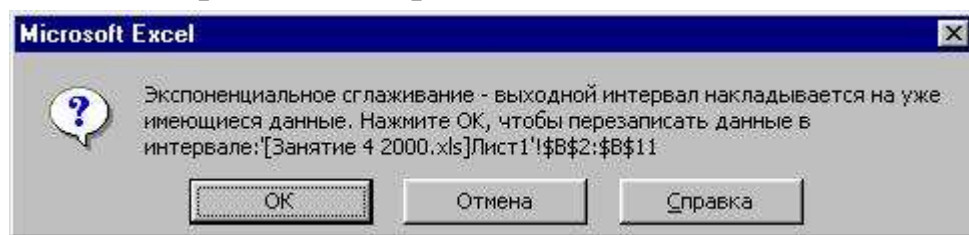


Рис. 2.46. Предупреждение Excel о предстоящей перезаписи данных

Прогноз производится для различных значений фактора затухания. После чего оценивается лучшее его значение. На практике параметр сглаживания часто ищется с поиском на сетке. Возможные значения параметра разбиваются сеткой с определенным шагом. Например, рассматривается сетка значений от  $\alpha = 0,1$  до  $\alpha = 0,9$ , с шагом  $0,1$ . Затем выбирается  $\alpha$ , для которого сумма квадратов (или средних квадратов) остатков (наблюдаемые значения минус прогнозы на шаг вперед) является минимальной.

Пакет **Анализ данных** содержит длинный список инструментов анализа. Описание этих инструментов можно найти в справочной системе Excel.

16. Для обращения к справке нажмите клавишу **F1**. Если использование **Помощника** не предусмотрено, то на вкладке мастера ответов (рис. 2.47) в поле **Выберите действие** введите название инструмента анализа, например, **Экспоненциальное сглаживание**, и щелкните на кнопке **Найти**.

Если **Помощник** используется, то введите свой вопрос в аналогичном окне **Помощника**. Затем щелкните на кнопке **Найти**. В появившемся списке разделов, связанных интересующим Вас инструментом анализа, выберите нужный Вам раздел, и соответствующая справка Excel будет выведена на экран (рис.2.48).

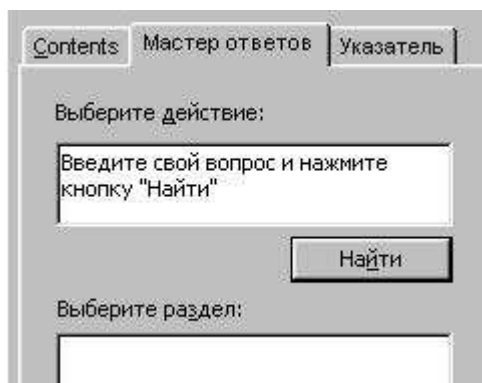
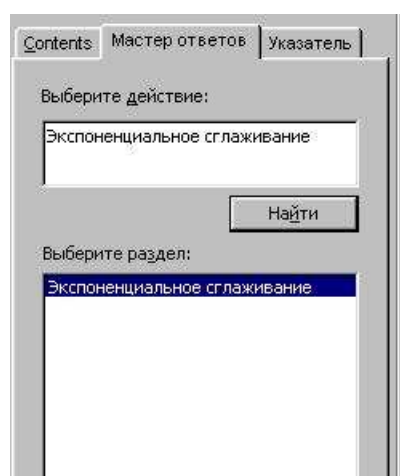



Рис. 2.47. Обращение к справке




### Экспоненциальное сглаживание

Один из инструментов пакета анализа. Чтобы получить дополнительные сведения об установке и применении пакета анализа, нажмите кнопку .

Предназначается для предсказания значения на основе прогноза для предыдущего периода, скорректированного с учетом погрешностей в этом прогнозе. Использует константу сглаживания  $\alpha$ , по величине которой определяет, насколько сильно влияют на прогнозы погрешности в предыдущем прогнозе.

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(A_t - F_t) = F_t + (1 - \text{dampFact})(A_t - F_t)$$

Чтобы получить более подробные сведения о параметрах диалогового окна **Экспоненциальное сглаживание**, нажмите кнопку .

**Примечание.** Для константы сглаживания наиболее подходящими являются значения от 0,2 до 0,3. Эти значения показывают, что ошибка текущего прогноза установлена на уровне от 20 до 30 процентов ошибки предыдущего прогноза. Более высокие значения константы ускоряют отклик, но могут привести к непредсказуемым выбросам. Низкие значения константы могут привести к сдвигу аргумента для предсказанных значений.

Дополнительные источники

Рис. 2.48. Пример вывода справки по инструменту анализа

## Экспоненциальное сглаживание

**Пример. Исходные данные:** известны значения некоторого экономического показателя за 32 предыдущих периода [21] (рис. 2.49).

**Задача:** используя инструмент **Экспоненциальное сглаживание** анализа данных MS EXCEL, сделать прогноз на следующий период.

**Решение.** Для реализации простого экспоненциального сглаживания будем следовать алгоритму из примера 2. Для начала построим график прогноза с фактором затухания равным 0,8 (рис. 2.50). Легко видеть, что кривая прогноза существенно отстает от кривой фактических данных, особенно в последних периодах. Выбор фактора затухания равным 0,6 дает более удовле-

творительные результаты (рис. 2.51).

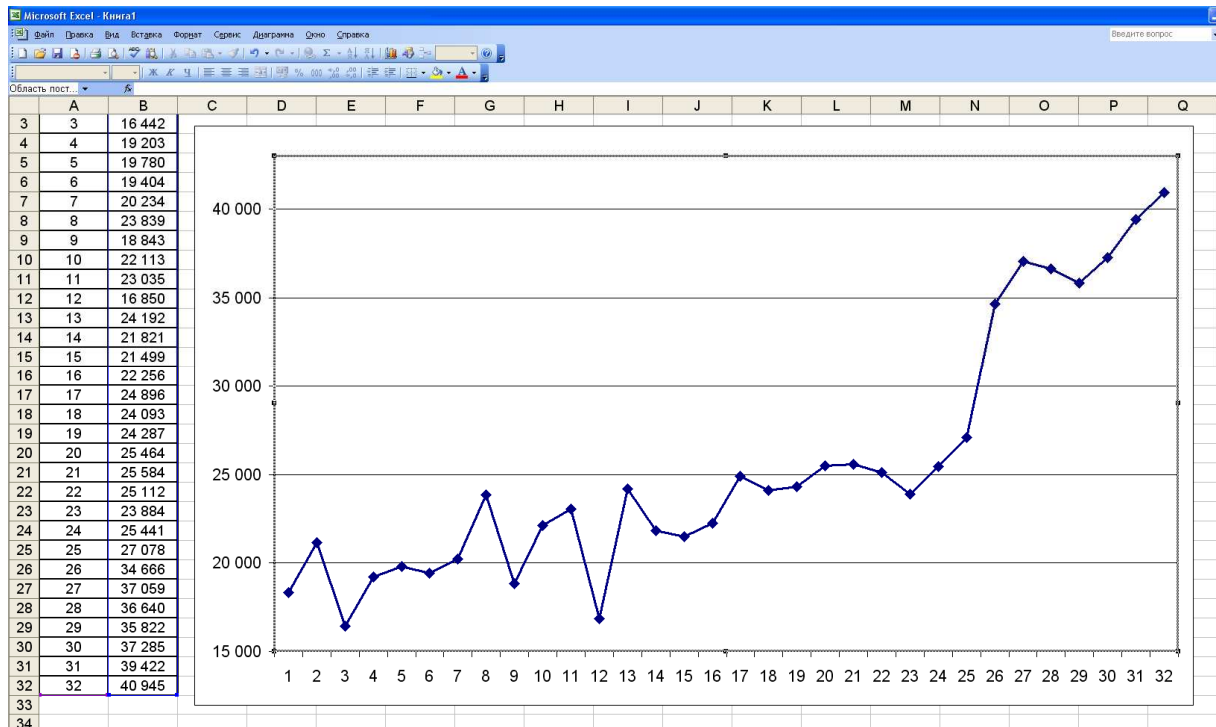


Рис. 2.49. Исходные данные примера

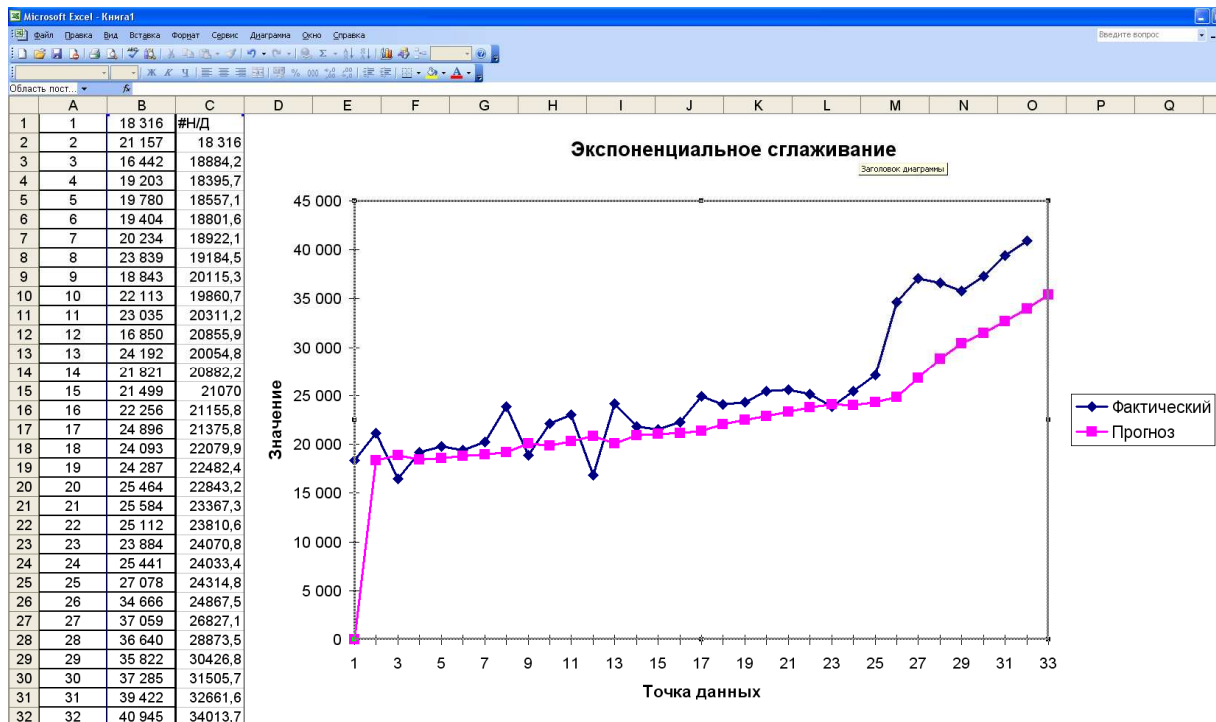


Рис. 2.50. Прогноз по методу экспоненциального сглаживания (фактор затухания равен 0,8)

Исправить недостаток расхождения кривой прогноза и кри-

вой продаж лучше всего, если воспользоваться модифицированной моделью экспоненциального сглаживания, в которой учитывается тренд:

$$S_t = \alpha A_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}),$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1},$$

$$F_{t+1} = S_t + T_t,$$

где  $S_t$  – начальный прогноз в период  $t$ ,  $T_t$  – тренд в период  $t$ ,  $F_{t+1}$  – прогноз на период  $t+1$  с учетом тренда,  $\beta$  – константа сглаживания для тренда.

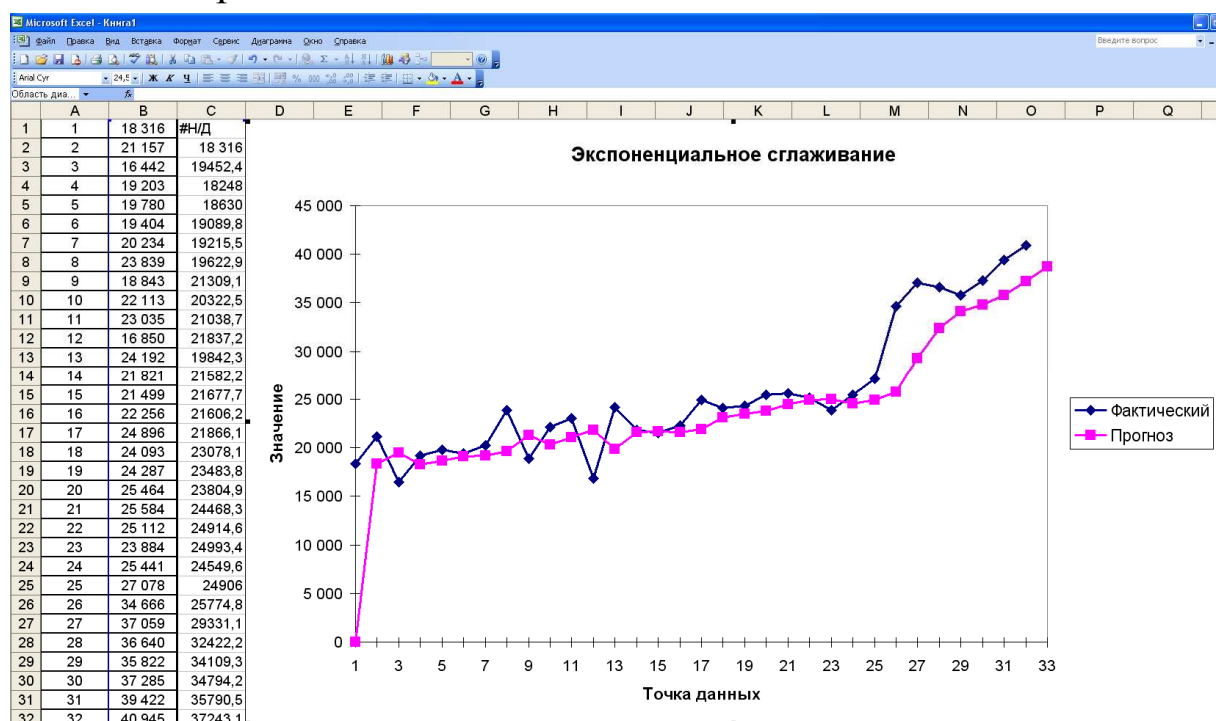


Рис. 2.51. Прогноз по методу экспоненциального сглаживания (фактор затухания равен 0,6)

В качестве исходных значений при расчетах будем использовать  $S_0 = 18316$  (значение показателя за первый период) и  $T_0 = 0$  (тренд отсутствует). Результаты моделирования для набора констант сглаживания  $\alpha = 0,2$ ;  $\beta = 0,3$  и  $\alpha = 0,5$ ;  $\beta = 0,15$  представлены на рис. 2.52.

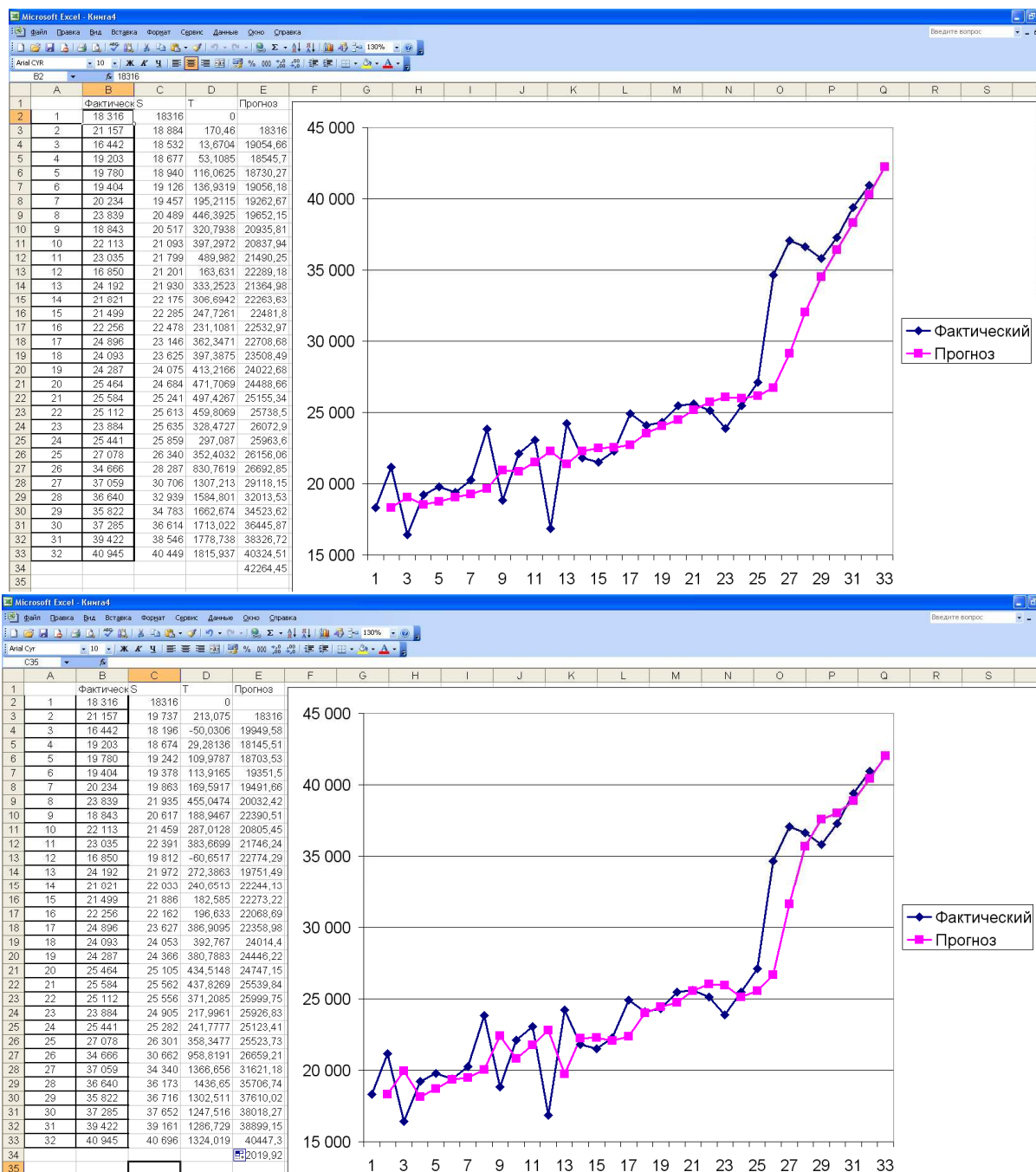


Рис. 2.52. Прогноз по модифицированному методу экспоненциального сглаживания (константы сглаживания  $\alpha = 0,2$ ;  $\beta = 0,3$  и  $\alpha = 0,5$ ;  $\beta = 0,15$ )

Теперь, как мы видим, кривая прогноза гораздо более точно повторяет кривую фактических значений. Это дает основания рассчитывать, что с помощью построенной кривой возможно составить обоснованный прогноз.

Выбор констант сглаживания  $\alpha$  и  $\beta$  является процессом неоднозначным и сложным. Напомним, что критерием точности прогнозной модели может считаться стандартная ошибка прогноза (standard error of forecast):

$$S_E = \sqrt{\frac{\sum (A_i - F_i)^2}{N-1}},$$

где  $S_E$  – средняя ошибка прогнозирования;  $A_i$  – фактическое значение показателя в период  $i$ ;  $F_i$  – прогноз на период  $i$ ;  $N$  – размер временного ряда.

Следовательно, наилучшей комбинацией констант сглаживания будет считаться та, которая обеспечивает минимальное значение стандартной ошибки прогноза.

В табл. 2.17 приведены значения  $S_E$  для всех использованных моделей данного примера.

Таблица 2.17

Вид модели	Настроечные параметры	Стандартная ошибка прогноза
Простое экспоненциальное сглаживание	$\alpha=0,2$	4210,414
Простое экспоненциальное сглаживание	$\alpha=0,4$	3162,607
Модифицированное экспоненциальное сглаживание с трендом	$\alpha=0,2; \beta=0,3$	2816,48
Модифицированное экспоненциальное сглаживание с трендом	$\alpha=0,5; \beta=0,15$	2679,323

**Пример. Исходные данные:** известны ежемесячные значения продаж предприятия за 2 предыдущих года [22] (рис. 2.53).

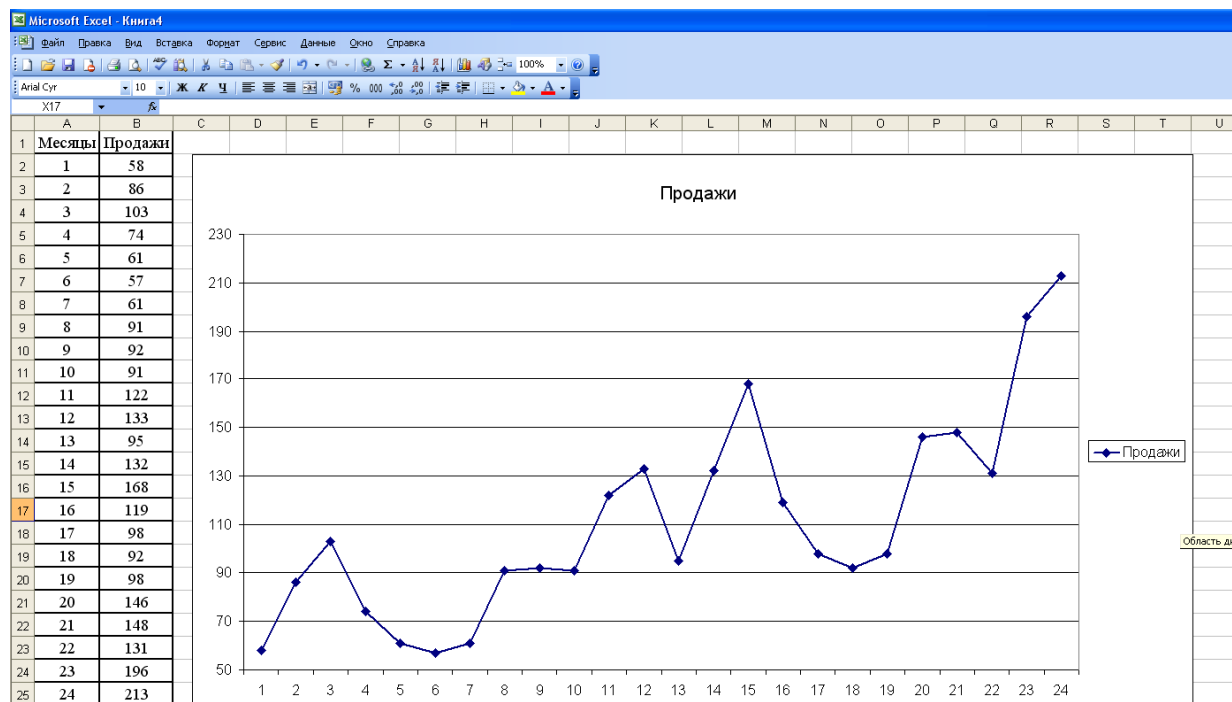


Рис. 2.53. Исходные данные примера

**Задача:** используя инструменты анализа данных MS EXCEL, сделать прогноз на следующий год.

**Решение.** Отмечаются явно выраженные сезонные колебания продаж, причем уменьшение продаж. Определение сезонных индексов позволяет получить прогноз на будущий период деятельности предприятия. Алгоритм расчета сезонных индексов предусматривает определение следующих величин:

*Общий средний спрос = средняя сумма продаж за прошлые периоды*

$$\text{Среднемесячный спрос} = \frac{\text{Общий средний спрос}}{\text{Количество периодов}},$$

$$\text{Сезонный индекс} = \frac{\text{Средний спрос за прошлые периоды}}{\text{Среднемесячный спрос}}$$

Прогнозируемый спрос в следующем периоде находится из соотношения:

$$\text{Спрос} = \frac{\text{Годовой спрос в следующем периоде}}{12 \text{ мес}} * \text{Сезонный индекс}.$$

Годовой спрос в следующем или прогнозируемом периоде

определяется по данным предыдущих периодов с учетом различных факторов, влияющих на увеличение либо уменьшение спроса. Значения рассчитанных индексов сезонности занесены в табл. 2.18 отдельно по каждому периоду и характеризуют состояние деловой активности предприятия в тот или иной рассматриваемый период времени.

Таблица 2.18

## Статистика продаж за два года и величины сезонных индексов

Месяцы	Продажи		Средние продажи за 1-2 гг.	Среднемес. продажи за 1-2 гг.	Сезонный индекс
	1-й год	2-й год			
1	58	95	76,5	111	0,689
2	86	132	109	111	0,982
3	103	168	135,5	111	1,221
4	74	119	96,5	111	0,869
5	61	98	79,5	111	0,716
6	57	92	74,5	111	0,671
7	61	98	79,5	111	0,716
8	91	146	118,5	111	1,068
9	92	148	120	111	1,081
10	91	131	111	111	1,000
11	122	196	159	111	1,432
12	133	213	173	111	1,559
Всего:	1029	1636	1332,5		

Для расчета прогноза спроса на товар в следующем году воспользуемся методом трендового проектирования. Временные серии данных обычно имеют четыре компонента: тренд, сезонность, циклы и случайные вариации.

Тренд ( $T$ ) – рост или спад значений за период измерения.

Сезонность ( $S$ ) является моделью данных, которая повторяется через определенные промежутки времени, измеряемые днями, неделями, месяцами или кварталами.

Циклы ( $C$ ) – модели данных, которые встречаются каждые несколько лет.

Случайные вариации ( $R$ ) – выбросы, шум измерений.

Известны две основные формы временных серий моделей в статистике. Наиболее широко используется мультипликативная модель, которая предполагает функцию спроса как произведение четырех компонент:

$$Спрос = T \cdot S \cdot C \cdot R.$$

Аддитивная модель представляет функцию спроса как суммарную компонент:

$$Спрос = T + S + C + R.$$

Обычно предполагают, что случайные вариации  $R$  усредняются за рассматриваемый период и основное внимание концентрируют на сезонных компонентах и компонентах, являющихся комбинацией тренда и цикличности.

Метод трендового проектирования устанавливает линию тренда по серии точек прошедшего периода, а затем проектирует линию в будущее для прогноза. Линейный тренд определяется методом наименьших квадратов (рис. 2.54).

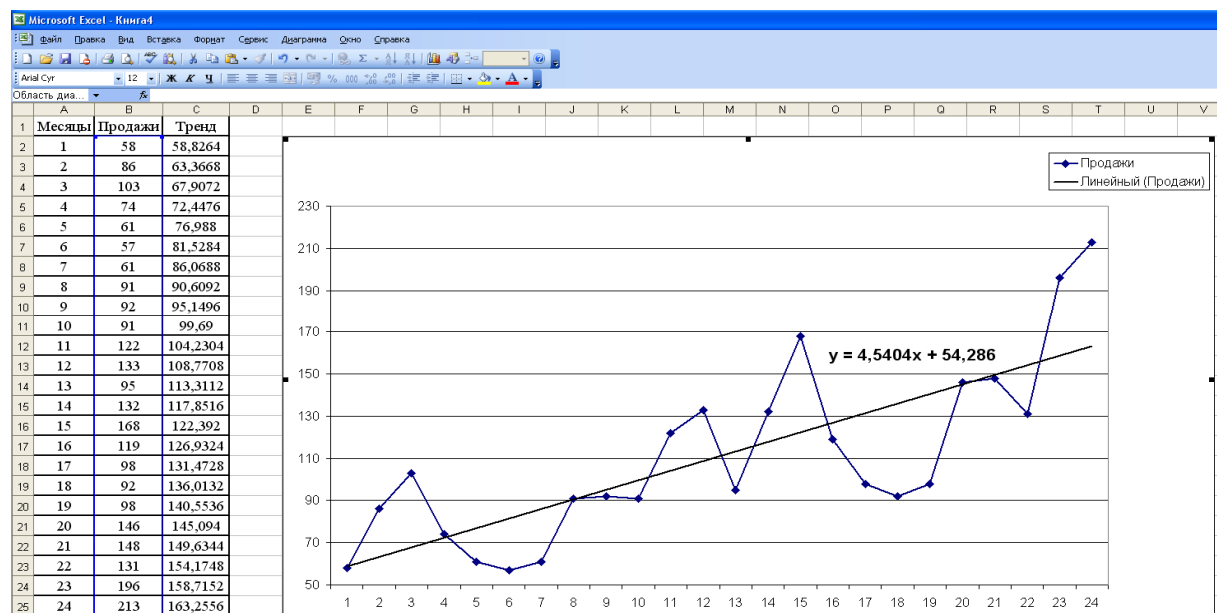


Рис. 2.54. Построение линии тренда по исходным данным

Прогнозируемый среднемесячный объем продаж в следующем году получим как сумму прогнозируемых двенадцати месячных продаж, рассчитанных по формуле тренда, деленную на

12 месяцев. Она равна 192,76 ед. продукции.

Результаты расчетов прогнозируемого месячного спроса в следующем году представлены в табл. 2.19 и в графическом виде на рис. 2.55.

Таблица 2.19

Месяцы	Прогноз среднemes. продаж	Сезонный индекс	Прогноз продаж
1	192,76	0,689	180
2	192,76	0,982	132,81
3	192,76	1,221	189,29
4	192,76	0,869	235,36
5	192,76	0,716	167,51
6	192,76	0,671	138,02
7	192,76	0,716	129,34
8	192,76	1,068	138,02
9	192,76	1,081	205,87
10	192,76	1,000	208,37
11	192,76	1,432	192,76
12	192,76	1,559	276,03
<b>Всего:</b>			<b>2313,89</b>

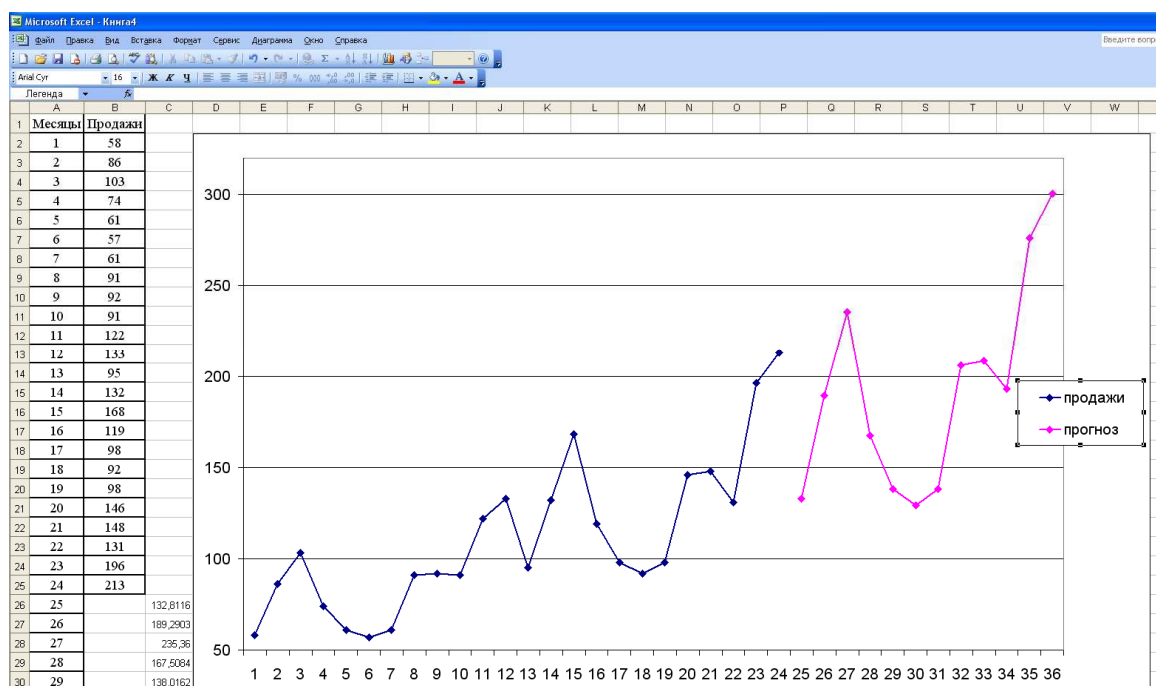


Рис. 2.55. Прогноз продаж комбинированным методом

## 2.8. Программное обеспечение интервальных вычислений

Серия программного обеспечения для интервальных вычислений была разработана с 1960-х годов в Университете Карлсруэ, и существующее семейство библиотек XSC (для расширения научных вычислений – *eXtention for Scientific Computing*) доказало свои преимущества на основе накопленного опыта применения. Так, системы *Pascal-XSC* [Klatte et al, 1992], *Fortran-XSC* и *C-XSC* [Klatte et al, 1992; Hammer et al, 1995] расширяют *Pascal*, *Fortran* и *C++* на интервалы. Обычным свойством этих инструментов является то, что они управляют одним из главных источников вычислительных ошибок путем реализации точного точечного умножения [Kulisch и Mirander, 1981; Wolff von Gudenberg, 1994]. Эти библиотеки доступны для большинства платформ и дают программное обеспечение, поддерживающее стандарт IEEE 754, когда этот стандарт не полностью реализован в аппаратуре компьютера.

Новая версия библиотеки *C-XSC* согласована с новым стандартом *ISO-C++* и в настоящее время разрабатывается под именем *C-XSC++*.

Библиотека *Basic Interval Arithmetic Subroutines Library* [Corliss, 1991] может быть образцом для любой интервальной библиотеки, независимо от языка, на котором эта библиотека будет программироваться. Несколько программных средств были разработаны на основе этого источника; наиболее популярной является, возможно, библиотека *Profil/Bias*, написанная на *C++* (Krmppel, 1994). Эта библиотека свободно доступна для большинства платформ, но она менее полна, чем *C-XSC*. Библиотека *INTLIB* (*INTerval LIBrary*) была разработана Kierfott'ом на языке *Fortran* специально для решения систем нелинейных уравнений

[Kierfott *et al*, 1992; Kierfott, 19966].

Совсем новая реализация компанией SUN компиляторов *Forte Fortran/HPC* и C++ особенно заслуживает внимания. Эти компиляторы являются по своей сути первыми настоящими интервальными компиляторами, которые позволяют программировать алгоритмы, основанные на интервальных вычислениях без какой-либо дополнительной библиотеки. В последнее время эти компиляторы запускаются только на компьютерах с операционной системой *Solaris* [23].

Интерпретация интервальных вычислений состоит в том, что некоторые задачи имеют естественную формулировку в терминах интервалов. В вычислительном отношении задача сводится к расчету интервально-значных отклонений, которые дают наилучшие возможные ситуации различных процессов.

Известно, что интервальная арифметика и интервальные методы реализованы в виде дополнительных пакетов в таких хорошо известных системах компьютерной математики, как *Matlab* и *Maple*, а в системе *Mathematica* (начиная с версии 5.0) интервальная арифметика реализована прямо в ядре программы.

*Wolfram Mathematica* (начиная с 5-й версии) является пакетом символьной математики, имеет большое количество функций, а также служит открытой средой, позволяющей дополнять пакет своими собственными разработками. Решение интервальных задач и алгоритмов в системе представлено узким набором базовых функций, в основном предназначенных для проведения точности расчетов: сложение, вычитание, умножение деление, возведение в степень, поиск значения тригонометрической функции, процедуры сравнения интервалов, функции расчета нахождения числа или интервала в заданном интервале, функции расчета области пересечения и объединения интервалов, расчет модуля интервала. В системе имеется возможность визуализации интервальных

расчетов. Синтаксис системы прост и понятен, но написание специальных функций производится полным словом, а в отдельных случаях – парой слов, что усложняет работу в системе.

Mathworks Matlab (начиная с версии 5.3) – технический язык высокого уровня программирования и среда для обработки алгоритмов, визуализации и анализа данных, проведения расчетов. Интервальная арифметика в СКА Matlab не реализована в ядре, такая арифметика реализована профессором Гамбургского университета технологий (Германия) С. Румпом как библиотека *Intlab* [24]. Несмотря на широкие возможности этой библиотеки, в ней не предвидена работа с неправильными интервалами, которые необходимы при решении некоторых задач автоматизированного управления, теории принятия решений.

Maplesoft Maple – это лидер современной символьной компьютерной алгебры. До этого времени система остается привлекательной для большинства ученых и исследователей благодаря хорошему интерфейсу, большой базе справочника, простоте синтаксиса, многоязычности. Система обладает возможностями вычислений приблизительно 3000 функций и правил их преобразований. Интервальная арифметика и функции интервального анализа не заложены разработчиками в ядре системы. Интервальная математика реализована учеными из университета Вупперталя (Германия) профессорами Ф. Крамером, И. Геликом и Ф. Хофшустером как библиотека *IntrakX* [25]. В этой библиотеке имеется весь набор базовых арифметических, тригонометрических, сравнительных и объединительных операций, есть возможность возведения в степень, поиск значения элементарных функций, когда аргумент задан интервальным числом, и др. Также эта библиотека включает в себя метод Ньютона для вычисления (локализации) всех нулей непрерывной дифференцированной действительной функции, процедуры для реальных интервалов и ком-

плексной интервальной арифметики. Синтаксис для проведения интервальных расчетов легкий и логичный, ничем не отличается от общего синтаксиса системы

Ниже приведена сравнительная таблица синтаксиса трех рассматриваемых СКА на примере операции сложения интервалов  $[1, 2]$  и  $[3, 4]$ .

Таблица 2.20

Сравнительная таблица трех СКА: Maple, Mathematica, Matlab

Аналитическое уравнение	Maple	Mathematica	Matlab
$[a, b] + [c, d] =$ $= [a + c, b + d]$	<code>E:=[1,2]&amp;+[3,4];</code> <code>[4,6]</code>	<code>In[1]:=Interval[{1,2}]+Interval[{3, 4}]</code> <code>Out[1]={{4, 6}}</code>	<code>&gt;&gt; A=interval([1,2])</code> <code>&gt;&gt; B=interval([3,4])</code> <code>&gt;&gt; A*B</code> <code>interval ans = [4,6]</code>

Как видно из таблицы, наиболее простой синтаксис имеет СКА Maple (IntraX).

Проведение обзора и анализа СКА по одиннадцати качественным параметрам (возможность дополнения системы собственными доработками, быстрота, объем необходимой памяти на жестком диске, простота синтаксиса, количество функций, наличие международных сертификатов, популярность, надежность системы, простота процесса инсталляции, стоимость одной лицензионной версии программы и привлекательность интерфейса системы) показало, что наиболее «качественной» и пригодной для реализации модели и метода прогнозирования макроэкономических показателей в условиях неопределенности является СКА Maple.

В табл. 2.21 приведен синтаксис Maple IntraX базовых арифметически интервальных операций и функций.

Таблица 2.21

## Базовые интервальные арифметические операции и функции

Операция	Аналитическое уравнение	Синтаксис Maple (IntpakX)
Сложение интервалов	$[x] + [y]$	<code>&amp; +</code>
Разница интервалов	$[x] - [y]$	<code>&amp; -</code>
Умножение интервалов	$[x] \cdot [y]$	<code>&amp; *</code>
Деление интервалов	$[x] / [y]$	<code>&amp; /</code>
Возведение в интервальную степень	$[x]^{[y]}$	<code>&amp; **</code>
Возведение в численную степень	$[x]^n$	<code>&amp; intpower</code>
Корень квадратный из интервального числа	$\sqrt{[x]}$	<code>&amp; sqrt</code>
Логарифм интервального числа	$\ln([x])$	<code>&amp; ln</code>
Экспонента из интервального числа	$\exp([x])$	<code>&amp; exp</code>
Синус интервального числа	$\sin([x])$	<code>&amp; sin</code>
Косинус интервального числа	$\cos([x])$	<code>&amp; cos</code>
Тангенс интервального числа	$\tan([x])$	<code>&amp; tan</code>

## Литература к разделу 2

1. Абель, Э. Макроэкономика [Текст]: пер. с англ. / Э. Абель, Б. Бернанке. – СПб.: Питер, 2010. – 768 с.

2. Автоматизированные информационные технологии в экономике [Текст]: учеб. / под ред. проф. Г.А. Титоренко. – М.: Юнити, 2003. – 399 с.

3. Алтунин, А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях [Текст]: моногр. / А.Е. Алтунин, М.В. Сему-

хин. – Тюмень: Изд-во ТГУ, 2000. – 352 с.

4. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов [Текст]: моногр.: пер. с англ. / Т. Андерсон. – М.: Мир, 1976. – 756 с.

5. Бараненко, С.П. Стратегическая устойчивость предприятия [Текст]: моногр. / С.П. Бараненко, В.В. Шеметов. – М.: Центрполиграф, 2004. – 493 с.

6. Барський, Ю.М. Як знизити інфляцію: аналіз причин та пошук антиінфляційних заходів [Текст] / Ю.М. Барський, В.М. Бардась // Економічні науки: зб. наук. пр.: Сер. Облік і фінанси. – Луцьк, 2009. – №6 (24). – С. 5 – 17.

7. Добронез, Б.С. Интервальная математика [Текст]: учеб. пособие / Б.С. Добронез. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2004. – 216 с.

8. Калмыков, С.А. Методы интервального анализа [Текст] / С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, 1986. – 224 с.

9. Безкровний, А.В. Розвиток інфляційного процесу в Україні [Текст]/ А.В. Безкровний // Економіка АПК: міжнар. наук.-виробн. журн. – К., 2009. – №1. – С. 77 – 79.

10. Белова, В.М. Теоретические и прикладные аспекты метода центра неопределенности / В.М. Белова, В.А. Сухарев, Ф.Г. Унгер. – Новосибирск: Наука. СИФ РАН, 1995. – 144 с.

11. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем [Текст] / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 378 с.

12. Бідюк, П.І. Побудова системи адаптивного прогнозування фінансово-економічних процесів та її застосування [Текст] / П.І. Бідюк, А.В. Федоров // Наукові праці: наук.-метод. журн. Сер. Комп'ютерні технології. – Миколаїв, 2009. – №104, Т.117.– С. 119 – 129.

13. Бутник, О.М. Економіко-математичне моделювання динамічних закономірностей розвитку економічних систем [Текст]: моногр. / О.М. Бутник. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2003. – 224 с.

14. Вагнер, І.М. Стратегічний аналіз як методичний інструмент поведінки підприємства в умовах невизначеності [Текст] / І.М. Вагнер // Вісник ЖДТУ «Економічні науки». – Житомир, 2010. – №3 (53). – С 49 – 52.

15. Важинський, Ф.А. Основні методи прогнозування соціально-економічного розвитку регіону [Текст] / Ф.А. Важинський, І.Ф. Коломієць // Збірник наук. праць УДЛУ. – Вип. 14.7. Л., 2004. – С. 166 – 170.

16. Вартамян, В.М. Модель, метод и инструментальные средства интервального прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания для случая неопределенности данных [Текст] / В.М. Вартамян, Д.С. Ревенко // Радиоэлектронные и компьютерные системы: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. № 5(39). – Х., 2009. – С. 16-19.

17. Вартамян, В.М. Обзор и анализ методов прогнозирования динамических процессов с неопределенными данными [Текст] / В.М. Вартамян, Д.С. Ревенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып.41. – Х., 2009. – С. 177-182.

18. Жабко, А.П. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов [Текст] / А.П. Жабко, В.Л. Харитонов // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 10. – С. 125-134.

19. Вартамян, В.М. Алгебраические методы исследования устойчивости динамических систем [Текст] / В.М. Вартамян. – Х.: Гос. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2000. - 90 с.

20. Электронный ресурс –

<http://icc.mpei.ru/documents/00000359.html>

21. Черкесов, А.Г. Прогнозирование спроса в логистике [Текст] / А.Г. Черкесов // Проблемы прогнозирования. – 2005, № 5(11). – С. 18- 41.

22. Красников, В.Н. Комбинированный метод краткосрочного прогнозирования продаж средств сотовой связи [Текст] / В.Н. Красников, А.А. Никишов, Ю.А. Романенков // Економіка: проблеми теорії та практики: зб. наук. пр. – Вип. 200: В 4 т. Т. 1. – Д.: ДНУ, 2005. – С. 62-67.

23. Armstrong, J.S. Long-range forecasting [Text] / J.S. Armstrong. – New York: John Wiley & sons, 1985. – 696 p.

24. Rump, S.M. INTLAB - INTerval LABoratory [Text] / S.M. Rump. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1999. – 104 p.

25. Kramer, W. Interval calculus in Maple [Text] / W. Kramer, I. Geulig. – Wuppertal: BUW, 2001. – 43 p.

26. Четыркин, Е.М. Статистические методы прогнозирования [Текст] / Е.М. Четыркин. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Статистика, 1997. – 227 с.

27. Вартамян, В.М. Алгебраїчні критерії локалізації коренів полінома у заданих областях комплексної площини [Текст] / В.М. Вартамян, М.М. Федоренко, Ю.О. Романенков, І.В. Дронова, А.В. Кононенко // Авіаційно-космічна техніка і технологія: зб. наук. пр. Нац. аерокосм. ун-та ім. М.Є. Жуковського „ХАІ”. - Вип. № 3 (19). – Х., 2005. - С. 82-87.

28. Вартамян, В.М. Разработка маркетинговой стратегии предприятия на основе комплексного прогнозного моделирования [Текст] / В.М. Вартамян, Д.С. Ревенко // Экономика и управление предприятиями машиностроительной отрасли: проблемы теории и практики: сб. науч. тр. – Вып. 1. – Х., 2008. – С. 26 – 33.

29. Вартамян, В.М. Інструментальні засоби прогнозування для випадку невизначеності вхідних даних [Текст] / В.М. Варта-

нян, Д.С. Ревенко, Р.А. Сухобрус // Вісник Харк. нац. техн. ун-ту сільськ. господар. ім. П. Василенка. – Вип. 73.– Х., 2008. – С. 98 – 100.

30. Варталян, В.М. Огляд та аналіз інструментальних засобів систем комп'ютерної алгебри для реалізації інтервальних розрахунків [Текст] / В.М. Варталян, Д.С. Ревенко // Прогресивна техніка та технології харчових виробництв ресторанного господарства і торгівлі: зб. наук. пр. Харк. держ. ун-ту харчування та торгівлі. – Вип. 1 (9). – Х., 2009. – С. 624 - 629.

31. Варталян, В.М. Построение и анализ интервальных нестатистических моделей [Текст] / В.М. Варталян, Л.Г. Шах, Ю.А. Романенков // Технологические системы. – 2003. - № 3. – С. 19 – 24.

32. Высочина, М.В. Изучение метода нечеткой логики в рамках дисциплины «Методы принятия управленческих решений» [Текст] / М.В. Высочина // Экономика и управление. - К., 2009. – №2-3. – С. 170 – 173.

33. Дербенцев, В.Д. Моделювання тенденцій економічного росту національної економіки [Текст] / В.Д. Дербенцев // Економіка та підприємництво: зб. наук. пр.- К., 2009. – Вип. 22. – С. 205 – 217.

34. Дубницкий, В.Ю. Применение метода экспоненциального сглаживания для краткосрочного прогнозирования финансовых параметров деятельности банка [Текст] / В.Ю. Дубницкий, О.Н. Сидоренко, О.А. Чубань // Бизнес Информ. - Х., 2009. – №8. – С. 92 – 95.

35. Дьяконов, В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах [Текст]. – 2-е изд., доп. и перераб./ В.П. Дьяконов. -М.: «СОЛОН-Пресс», 2008. – 744 с.

36. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений [Текст]: пер. с англ.

/ Л. Заде. – М.: Мир, 1976. – 167 с.

37. Иванов, В.В. Анализ временных рядов и прогнозирование экономических показателей [Текст] / В.В. Иванов. – Х.: ХНУ, 1999. – 228 с.

38. Коваленко, О. Інфляція в Україні: особливості та вплив на фінансову систему [Текст] / О. Коваленко // Формування ринкових відносин в Україні.– К., 2009. – №19 (86). – С. 308 – 315.

39. Кожемякіна, С.М. Перелік макроекономічних показників, які розраховуються у складі середньострокових макропрогнозів в європейських країнах та Росії [Текст] / С.М. Кожемякіна // Формування ринкових відносин в Україні. - К., 2008. – №7 (86). – С. 9 – 14.

40. Крянев, А.В. Математические методы обработки неопределенных данных [Текст]: моногр./ А.В. Крянев, Г.В. Лукин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.

41. Курило, О.Б. Вплив інфляції на економічний розвиток України [Текст] / О.Б Курило, Н.В. Дубинець // Наук. вісник НЛТУ України. – Л., 2008. – №18.6. – С. 280 – 288.

42. Литвиненко, Т.М. Невизначеність ринкового середовища та шляхи її локалізації [Текст] / Т.М. Литвиненко // Теоретичні та прикладні питання економіки: зб. наук. пр.– К., 2009. – №19. – С. 46 – 55.

43. Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов [Текст] / Ю.П. Лукашин. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.

44. Необходимые алгебраические условия адекватности полиномиальных интервальных моделей динамических процессов [Текст] / В.М. Вартамян, Ю.А. Романенков, Д.С. Ревенко, В.Ю. Кашеева // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Х., 2010. – Вып. 43. – С. 54 – 57.

45. Никитюк, Т. Ретроспективний погляд на теорію

невизначеності підприємницької діяльності [Текст] / Т. Никитюк // Теоретичні та практичні питання економіки: зб. наук. пр. – К., 2009. – №19. – С. 105 – 112.

46. Николаенко, Л.Ф. Модели краткосрочного прогнозирования временных рядов [Текст] / Л.Ф. Николаенко, П.А. Иващенко // Економічний простір. – Д., 2008. – №19. – С. 300 – 307.

47. Николаенко, С.А. Практический подход к определению момента начала нового экономического кризиса в США [Текст] / С.А. Николаенко // Экономический журнал ВШЭ. – М., 2004. – №3. – С. 376 – 398.

48. Осецький, В.Л. Співвідношення безробіття та інфляції: соціально-економічні наслідки у кризовий період [Текст] / В.Л. Осецький, О.О. Сльозко // Ринок праці та зайнятість населення: наук.-виробн. журн. – К., 2009. – №1. – С. 42 – 44.

49. Основні прогнозні макроекономічні показники економічного і соціального розвитку України від нового уряду [Текст] // Економіст. - К., 2010. – №3. – С. 10 – 11.

50. Павленко, Л.В. Оценка инвестиционных проектов в условиях неопределенности [Текст] / Л.В. Павленко // Вестник Бердянского университета бизнеса и менеджмента. – Бердянск, 2001. – №2(6). – С. 30 – 35.

51. Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания для статистических рядов интервальных данных [Текст] / В.М. Вартамян, Ю.А. Романенков, В.Ю. Кашеева, Д.С. Ревенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 44. – Х., 2009. – С. 232 – 240.

52. Перепелица, В.А. Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных [Текст] /

В.А. Перепелица, Ф.Б. Тебуева. – М.: Академия естествознания, 2007 [Электронный ресурс]: <http://www.monographies.ru/22>.

53. Прикладной интервальный анализ [Текст] / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 468 с.

54. Присенко, Г.В. Прогнозування соціально-економічних процесів [Текст] / Г.В. Присенко, Е.І. Равікович. – К.: КНЕУ, 2005. – 378 с.

55. Рабочая книга по прогнозированию [Текст] / под ред. коллег. И.В. Бестужев-Лада. – М.: Мысль, 1982. – 430 с.

56. Раскин, Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения [Текст]: моногр. / Л.Г. Раскин, Е.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.

57. Ревенко, Д.С. Обзор статистических методов прогнозирования динамических процессов с неопределенными данными [Текст] / Д.С. Ревенко // Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Х., 21-22 нояб. 2008 г. – С. 121.

58. Ревенко, Д.С. Формирование подходов к прогнозированию с целью минимизации рисков инвестиционных проектов [Текст] / Д.С. Ревенко, А.С. Ревенко // Инвестиционные приоритеты эпохи глобализации: материалы II Междунар. науч.-практ. конф. - Днепропетровск, 5-6 марта. 2009 г. – С. 24 – 26.

59. Ревенко, Д.С. Анализ качества инструментальных средств интервальных вычислений [Текст] / Д.С. Ревенко, А.С. Ревенко // Современные национальные экономические модели: проблемы и перспективы развития: материалы науч.-практ. Интернет-конф. – Симферополь, 13 марта. 2009 г. – С. 73 – 74.

60. Ревенко, Д.С. Исследование и прогнозирование инфляционных процессов в Украине на основе опережающих многофакторных регрессионных моделей [Текст] / Д.С. Ревенко,

В.А. Лыба // Оптимум – 2010: материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., – Х., 1-3 дек. 2010 г. – С. 195.

61. Ревенко, Д.С. Исследование и прогнозирование инфляционных процессов в Украине на основе опережающих многофакторных регрессионных моделей [Текст] / Д.С. Ревенко, В.А. Лыба // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». Технический прогресс и эффективность производства. – Вып. 61. – Х., 2010. – С. 9 – 13.

62. Ревенко, Д.С. Інформаційна технологія комплексного прогнозування економічних процесів з інтервальною невизначеністю [Текст] / Д.С. Ревенко, В.О. Лыба // Стратегії інноваційного розвитку економіки: бізнес, наука, освіта: матеріали II Міжнар. наук.-практ. конф. – Х., 7-10 квіт. 2010 р. – С. 56-59.

63. Ревенко, Д.С. Інформаційна технологія комплексного прогнозування економічних процесів з інтервальною невизначеністю [Текст] / Д.С. Ревенко, В.О. Лыба // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПИ». Технічний прогрес і ефективність виробництва. – Вип. 6. – Х., 2010. – С. 157 – 163.

64. Ревенко, Д.С. Метод комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент интервального динамического ряда [Текст] / Д.С. Ревенко, В.А. Лыба // Современные проблемы моделирования социально-экономических систем: материалы II Междунар. науч.-практ. конф., – Х., 8-9 апреля 2010 г. – С. 90-93.

65. Ревенко, Д.С. Метод комплексной идентификации и прогнозирования структурных компонент динамических процессов с неопределенными данными [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян // Экономика и управление предприятиями машиностроительной отрасли: проблемы теории и практики: сб. науч. тр. – Вып. 3. – Х., 2009. – С. 98 – 106.

66. Ревенко, Д.С. Метод краткосрочного прогнозирования в условиях информационной асимметрии и неопределенности [Текст] / Д.С. Ревенко // Моделирование и прогнозирование экономических процессов: материалы III Всеукр. науч.-практ. конф. – К., 9-11 дек. 2009 г. – С. 28.

67. Ревенко, Д.С. Метод краткосрочного прогнозирования в условиях информационной асимметрии и неопределенности [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян // Бизнес Информ. – 2009. - №10. – С. 145 – 148.

68. Ревенко, Д.С. Методы и модели прогнозирования динамических процессов с неопределенными данными [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян // Бизнес Информ. – 2009. - №6. – С. 71 – 74.

69. Ревенко, Д.С. Моделирование инфляционных процессов в Украине на основе опережающих многофакторных регрессионных моделей [Текст] / Д.С. Ревенко, В.А Лыба // Моделирование и прогнозирование экономических процессов: материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. – К., 8-11 дек. 2010 г. – С. 120 – 121.

70. Ревенко, Д.С. Модель интегрального опережающего индекса для прогнозирования макроэкономической динамики Украины [Текст] / Д.С. Ревенко // Бизнес Информ. – 2010. - №9. – С. 119 – 123.

71. Ревенко, Д.С. Модель интервального прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания для случая неопределенности данных [Текст] / Д.С. Ревенко // Научно-техническое развитие: экономика, технологии, управление: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. – К., 15-18 апр. 2009 г. – С. 348 – 349.

72. Ревенко, Д.С. Модель краткосрочного прогнозирования динамических процессов с неопределенными данными [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян // Бизнес Информ. – 2009. - №8. –

С. 77 – 81.

73. Ревенко, Д.С. Обзор методов прогнозирования динамических процессов с неопределенными данными [Текст] / Д.С. Ревенко // Моделирование современных экономических процессов и информационные технологии: материалы I Всеукр. науч.-практ. конф. – Днепропетровск, 9-10 апр. 2009 г. – С.87 – 89.

74. Ревенко, Д.С. Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания для случая неопределенности исходных данных [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 42. – Х., 2009. – С. 164 – 171.

75. Ревенко, Д.С. Предпосылки для разработки опережающих интегральных показателей для прогнозирования развития экономики Украины [Текст] / Д.С. Ревенко, Т.А. Кузьменко // Современные информационные технологии в экономике и управлении предприятиями, программами и проектами: материалы VIII Междунар. научно-практ. конф., Алушта, 20 – 26 сент. 2010 г. – С. 175.

76. Ревенко, Д.С. Прогнозная модель простого экспоненциального сглаживания для случая интервальной неопределенности исходных данных [Текст] / Д.С. Ревенко // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XIII Междунар. молодежного форума. – Х., 30 марта – 1 апр. 2009 г. – С. 220.

77. Ревенко, Д.С. Разработка метода формирования интервальных данных на основе экспертной информации [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян // Экономика и управление предприятиями машиностроительной отрасли: проблемы теории и практики: сб. науч. тр. – Вып. 1. – Х., 2009. – С. 24 – 30.

78. Ревенко, Д.С. Разработка методики комплексного прогнозирования и анализа движения денежных потоков в условиях

неопределенности исходных данных / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян // Бизнес Информ. – 2010. - №2. – С. 50 – 55.

79. Ревенко, Д.С. Разработка экспертного метода формирования исходных интервальных данных [Текст] / Д.С. Ревенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 43. – Х., 2009. – С. 170 – 179.

80. Ревенко, Д.С. Реалізація інтервальних розрахунків в системах комп'ютерної алгебри [Текст] / Д.С. Ревенко // Сучасні інформаційні технології в економіці та управлінні підприємствами, програмами та проектами: матеріали VII Міжнар. наук.-практ. конф. – Алушта, 7 – 13 вер. 2009 р. – С. 213 – 214.

81. Ревенко, Д.С. Реалізація інтервальних розрахунків в системах комп'ютерної алгебри (на прикладі розв'язання задачі інтервальної моделі експоненціального згладжування [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян, М.А. Голованова // Вісник Харк. нац. техн. ун-ту сільськ. господар. ім. П. Василенка. – Вип. 87. – Х., 2009. – С. 120 – 122.

82. Ревенко, Д.С. Статистическая оценка динамических процессов с неопределенными данными [Текст] / Д.С. Ревенко, В.М. Вартамян, Ю.А. Романенков // Экономика и управление предприятиями машиностроительной отрасли: проблемы теории и практики: сб. науч. тр. – Вып. 4. – Х., 2008. – С. 53 – 64.

83. Ревенко, Д.С. Экспертный метод формирования исходных интервальных данных [Текст] / Д.С. Ревенко // Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Х., 15-18 дек. 2009 г. – С. 75.

84. Сацик, В. Циклічність економічного розвитку України [Текст] / В. Сацик // Економіст. – К., 2005. – №5. – С. 80 – 83.

85. Стариченко, Є.М. Актуальні питання макроекономічного

прогнозування з використанням неструктурних моделей [Текст] / Є.М. Стариченко // Економіка АПК. – К., 2009. – №2. – С. 64 – 68.

86. Таха, Х.А. Введение в исследование операций [Текст] / Х. А. Таха. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.

87. Френкель, А.А. Использование интегральных индексов в анализе циклических изменений российской экономики [Текст] / А.А. Френкель, Н.Н. Райская, Я.В. Сергиенко // Материалы междунауч. науч. конф. по проблемам развития экономики и общества. – М., 6-8 апр. 2010 г. – С. 125.

88. Фурдичко, Л.Є. Особливості інфляції: світовий та вітчизняний досвід оцінювання її оптимального рівня [Текст] / Л.Є. Фурдичко, Л.О. Фурдичко // Наук. вісник НЛТУ України. – Л., 2009. – №19.13. – С. 137 – 140.

89. Цасик, В. Циклічність економічного розвитку України [Текст] / В. Цасик // Економіст. – К., 2005. – №5. – С. 80 – 83.

90. Чевычелова, Е.С. Подходы к анализу неопределенности среды функционирования предприятия при осуществлении адаптивного стратегического планирования [Текст] / Е.С. Чевычелова // Экономика, менеджмент, предпринимательство: сб. науч. тр. – Луганск, 2009. – №21. – С. 37 – 43.

91. Черевиков, Є.Л. Моделі розрахункової загальної рівноваги у практиці державного регулювання економіки [Текст] / Є.Л. Черевиков, О.В. Стеценко // Вчені записки університету «Крок». – К., 2009. – №19. – С. 58 – 68.

92. Черепня, О.В. Факторы внешней среды как составляющая сбалансированной системы показателей предприятия [Текст] / О.В. Черепня // Бизнес Информ. – Х., 2009. – №7. – С. 63 – 70.

93. Четыркин, Е.М. Вероятность и статистика [Текст] / Е.М. Четыркин, И.Л. Калихман. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 319 с.

94. Шарый, С.П. Конечномерный интервальный анализ

[Электронный ресурс] / С.П. Шарый. – М., 2009. – 570 с. Режим доступа к книге:

<http://www.sbras.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.

95. Шарый, С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статистических систем с интервальной неопределенностью [Текст] / С.П. Шарый // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. – М., 1997. – №3. – С. 51 – 61.

96. Швиндина, А.А. Адаптация организационных структур управления к современным рыночным изменениям [Текст] / А.А. Швиндина // Вестник СумГУ. Сер. Экономика. – Сумы, 2008. – №1. – С. 20 – 25.

97. Эйтингон, В.Н. Методы организации экспертизы и обработки экспертных оценок в менеджменте [Текст] / В.Н. Эйтингон, М.А. Кравец, Н.П. Панкратова. – Воронеж: ВГУ, 2004. – 44 с.

98. Экспертные методы прогнозирования [Текст]: текст лекций / под ред. С.А. Саркисяна. – М.: МАИ, 1985. – 60 с.

99. Электронный ресурс – [www.bank.gov.ua](http://www.bank.gov.ua) / Официальный сайт Национального банка Украины.

100. Электронный ресурс – [www.icps.com.ua](http://www.icps.com.ua) / Официальный сайт Международного центра перспективных исследований.

101. Электронный ресурс – [www.smida.gov.ua](http://www.smida.gov.ua) / Официальный сайт Агентства развития инфраструктуры фондового рынка Украины.

102. Электронный ресурс – [www.ukrstat.gov.ua](http://www.ukrstat.gov.ua) / Официальный сайт Государственного комитета статистики Украины.

103. Ямароне, Р. Основные экономические индикаторы [Текст]: пер. с англ. / Р.Э. Ямароне. – М.: Омега – Л (Новая редакция), 2007. – 320 с.

104. Branson, W. Macroeconomic Theory and Policy [Text] / W. Branson. – New York: Harper & Row, 1989. – 656 p.

105. Business Forecasting [Text] / J. Holton Wilson, Barry Keat-

ing. Sec. edition. Irwin / McGraw-Hill, Inc. – 1994. – 476 p.

106. Coyne, K.P. Bringing discipline to strategy [Text] / K.P. Coyne, S. Subramaniam // The McKinsey Quarterly. – 1996. – №4.

107. Gandolfo, G. Economics Dynamics [Text] / G. Gandolfo, – Springer, 1991. – 612 p.

108. Gliang, A. Fundamental Methods of Mathematical Economics [Text] / A. Gliang, – McGraw, 2004. – 708 p.

109. Grant, R.M. Contemporary Strategy Analysis [Text] / R.M. Grant, Oxford: Blackwell, 1995.

110. Harris, R. Applied Time Series Modelling and Forecasting [Text] / R. Harris, R. Sollis. - Wiley. UK. – 302 p.

111. Kearfott, R.B. Rigorous global search: continuous problems [Text] / R. Baker Kearfott. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers, 1996. – 264 p.

112. Lawrens, P. Organization and Environment [Text] / P. Lawrens, J. Lorsch. – Cambridge.: Harvard, 1967.

113. Moore, R.E. Interval analysis [Text] / R.E. Moore. – N.Y.: Prentice-Hall, 1966. – 264 p.

114. Neumaier, A. Interval methods for of equations [Text] / A. Neumaier, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

115. Power, D.J. Web-based and model-driven decision support systems: concepts and issues [Text] / D.J. Power // Americas Conference on Information Systems, Long Beach, California, 2000. – V.2. – P. 1083 – 1095.

116. Revenko, D.S. Economic and mathematical modeling of changes in economic activity of Ukraine [Text] / D.S. Revenko, V.A. Lyba, M.V. Kantsevich // Integrated computer technology in engineering: materials of international scientific and practical. conf. - Kharkiv, 23-26 nov. 2010 year. – 115 p.

### РАЗДЕЛ 3

## ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА «ГУСЕНИЦА-SSA»

### 3.1. Теоретические сведения о методе «Гусеница»-SSA

Подход «Гусеница»-SSA может быть использован для решения разнообразных задач, связанных с исследованием одномерных временных рядов. Существуют его обобщения для двумерных временных рядов [1], а также для случайных полей [2], но в данной работе ограничимся задачами анализа и прогноза только одномерных временных рядов.

В основе подхода «Гусеница»-SSA лежит представление временного ряда в виде матрицы, которая затем раскладывается в сумму матриц с помощью сингулярного разложения [3], каждой из которых сопоставляется аддитивная составляющая исходного временного ряда. Таким образом, получаем разложение ряда в сумму составляющих, причём информация о каждой из них содержится в сингулярных числах и векторах.

Подход независимо появился в России под названием «Гусеница» и в других странах, под разными названиями – Singular Spectrum Analysis, Eigen Decomposition. Первые упоминания о нём относятся к 60–70-м годам прошлого века.

К ранним упоминаниям о методе «Гусеница» относятся работы О.М. Калинина, М.Д. Белонина, М.М. Кислицина. В 1997 году вышел сборник [2], содержащий статьи о истории развития метода, описание базового алгоритма, теоретические вопросы, а также примеры применения. В нём были опубликованы работы Д.Л. Данилова, А.А. Жиглявского, В.Н. Солнцева, Н.Э. Голяндиной, В.В. Некруткина, М.М. Кислицина. В 2001 г. на английском языке вышла монография N. Golyandina, V. Nekrutkin, A.

Zhigljavsky «Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques» [4], которая на сегодняшний день является основным трудом по подходу «Гусеница». В настоящее время ведётся работа над обобщением подхода для двумерных рядов, а также для рядов с пропусками [5]. Существует программный комплекс, который позволяет интерактивно решать задачи анализа и прогноза временных рядов с помощью подхода «Гусеница».

В других странах подход получил название SSA (Singular Spectrum Analysis). Его идея возникла из применения метода главных компонент к анализу цифровых сигналов, одновременно появившись в прикладных исследованиях, например, в океанологии. Ещё одной областью, в которой был сформулирован метод SSA, была теория динамических систем.

В настоящее время метод используется в различных областях прикладных исследований: для исследования интернет-трафика, в биометрике, для скрытой передачи данных. По-прежнему актуально его применение в метеорологии и геологии.

### **Базовый алгоритм**

Основой метода «Гусеница»-SSA является алгоритм, который применяется к некоторой числовой последовательности – временному ряду. Алгоритм состоит из четырёх шагов: вложение, сингулярное разложение, группировка и диагональное усреднение. Первые два в совокупности называются разложением, последние – восстановлением. Алгоритм раскладывает временной ряд на аддитивные компоненты и предоставляет информацию, на основе которой среди них можно найти те, которые в сумме дают некоторую искомую составляющую ряда (например, тренд или периодическую составляющую).

### **Разложение**

Пусть  $F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$  – одномерный вещественнозначный временной ряд длины  $N$ ,  $N \geq 3$ . Выберем значение параметра  $L$ ,

$L \in \mathbb{N}$ ,  $1 < L < N$ , который называется длиной окна. Результат работы алгоритма во многом зависит от значения  $L$ , вопрос его выбора рассматривается позже.

Построим по ряду  $F_N$  матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , называемую траекторной матрицей ряда:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{N-L} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_{N-L+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{L-1} & f_L & \dots & f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Заметим, что так как  $x_{ij} = f_{i+j-2}$ , то матрица  $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^{i=L, j=K}$  – ганкелева, т.е. для любых индексов  $i, j$ ,  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq K$ , таких, что  $i + j = k$ ,  $x_{ij} = c_k$ .

Обозначим  $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{L \times L}$ . Матрица  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  симметричная и неотрицательно определённая, а значит её собственные числа  $\{\lambda_k\}_{k=1}^L$  вещественны и неотрицательны. Запишем их следующим образом:  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ . Пусть  $U_1, \dots, U_L$  – соответствующие им ортонормированные собственные вектора. Будем называть  $d = \max\{k : \lambda_k > 0\}$  порядком сингулярного разложения. Обозначим

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathbf{X}^T U_k, \quad k = 1, \dots, d.$$

Тогда сингулярным разложением матрицы  $\mathbf{X}$  называется её представление в виде суммы

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_d, \quad \mathbf{X}_k = \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T. \quad (3.2)$$

Вектор  $U_k$  называют  $k$ -м левым сингулярным вектором или просто  $k$ -м собственным вектором,  $V_k$  –  $k$ -м правым сингулярным вектором или  $k$ -м факторным вектором. Набор  $(\sqrt{\lambda_k}, U_k, V_k^T)$

будем называть  $k$ -ой собственной тройкой, которая иногда обозначается как ET, от английского eigentriple.

### Восстановление

Разобьём множество собственных троек с номерами  $\{1, \dots, d\}$  на некоторое количество непересекающихся подмножеств

$I_j : \{1, \dots, d\} = \bigcup_{j=1}^m I_j$ . Обозначим  $\mathbf{X}_{I_j} = \sum_{k \in I_j} \mathbf{X}_k$ . С помощью такой

группировки собственных троек получаем разложение матрицы  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \mathbf{X}_{I_2} + \dots + \mathbf{X}_{I_m}.$$

Построим теперь по каждой из матриц  $\mathbf{X}_{I_j}$  ряд  $F^{(j)}$  так, чтобы получить разложение исходного ряда  $F = \sum_j F^{(j)}$ . В слу-

чае, когда матрица  $\mathbf{X}_{I_j}$  – ганкелева, это можно сделать процедурой, обратной к построению траекторной матрицы. Но полученная  $\mathbf{X}_{I_j}$  не всегда ганкелева и поэтому необходимо предварительно провести усреднение матрицы по её диагоналям вида  $\{x_{pq} : p + q = \text{const}\}$ .

Для произвольной матрицы  $\mathbf{Y}$  процедура приведения её к ганкелевому виду и последующее преобразование в ряд (обозначим его как  $G$ ) выглядит следующим образом. Пусть матрица  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $\mathbf{Y} = \{y_{ij}\}_{i,j=1}^{i=L, j=K}$ . Введём обозначения:  $\tilde{L} = \min\{L, K\}$ ,  $\tilde{K} = \max\{L, K\}$  и

$$\tilde{y}_{ij} = \begin{cases} y_{ij}, & \text{если } L \leq K, \\ y_{ji}, & \text{если } L > K. \end{cases}$$

Элементы ряда  $G = (g_0, \dots, g_{N-1})$ ,  $N = K + L - 1$  выражаются следующим образом:

$$g_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{y}_{m,n-m+2}, & 0 \leq n < \tilde{L}-1, \\ \frac{1}{\tilde{L}} \sum_{m=1}^{\tilde{L}} \tilde{y}_{m,n-m+2}, & \tilde{L}-1 \leq n < \tilde{K}, \\ \frac{1}{N-n} \sum_{m=n-\tilde{K}+2}^{N-\tilde{K}+1} \tilde{y}_{m,n-m+2}, & \tilde{K} \leq n < N. \end{cases} \quad (3.3)$$

Таким образом, результатом этапа восстановления, а значит и результатом работы всего алгоритма «Гусеница»-SSA, является разложение исходного ряда  $F$  в сумму аддитивных составляющих

$$F = F^{(1)} + \dots + F^{(m)}, \quad (3.4)$$

где  $m$  – это количество  $I_j$ , которые формируют разбиение множества всех собственных троек  $\{1, \dots, d\}$ .

### Комментарии к алгоритму

Траекторная матрица ряда состоит из столбцов, представляющих собой отрезки ряда длиной  $L$ , взятые последовательно с единичным сдвигом. Именно способу построения траекторной матрицы метод обязан названием «Гусеница».

Что касается матрицы  $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ , то в случае, когда ряд  $F$  – стационарный,  $\mathbf{S}$  представляет собой оценку ковариационной матрицы.

Видно, что алгоритм «Гусеница»-SSA после формирования  $\mathbf{X}$  похож на алгоритм метода главных компонент (PCA - Principal Component Analysis). Собственные числа имеют здесь ту же интерпретацию, что и в PCA. Неформально говоря, отношение

$$\frac{\sum_{i \in I} \lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}, \quad I \subset \{1, \dots, d\}$$

отражает вклад составляющей ряда, восстановленной по группе

собственных троек  $I$ , в вид исходного ряда [4, раздел 4.3]. Отсюда понятна простая идея сглаживания ряда – восстановление ряда по первым компонентам.

Алгоритм метода управляется, во-первых, заданием параметра  $L$ , а во-вторых, выбором  $I$  на этапе группировки. Процесс выбора  $I$  при решении задачи выделения некоторой аддитивной составляющей назовём идентификацией.

Как уже было сказано, существуют интерактивные подходы к идентификации собственных троек, соответствующих тренду или периодической составляющей.

### **Выбор параметра $L$ – длины окна**

Свойства сингулярного разложения приводят к тому, что выбор длины окна  $L' = K = N - L + 1$  порождает факторные вектора, равные собственным векторам разложения с длиной окна  $L$ . Вследствие этого будем выбирать  $L$  из диапазона  $2 \leq L \leq N / 2$ .

До последнего времени не существовало математически обоснованного решения проблемы выбора  $L$ , и различные источники предлагали лишь выработанные на опыте рекомендации. Broomhead и King в [6] дают рекомендации по выбору  $L$  для рядов ограниченного спектра, но отмечают, что «с теоретической точки зрения эта проблема всё ещё открыта». Vautard развил их идеи в [7], но лишь на общем уровне. Он отмечает сложность данной проблемы и косвенно подтверждает это, делая ошибочное утверждение, что метод не позволяет выделять периодические составляющие с длиной больше  $L$ .

Математическая теория, которая позволила дать ответ на вопрос выбора длина окна при решении разнообразных задач, была предложена В.В. Некруткиным в [8].

### 3.2. Ряды конечного ранга, управляемые линейными рекуррентными формулами

Таким образом, при прогнозировании с помощью метода «Гусеница»-SSA мы рассматриваем множество временных рядов, описываемых с помощью линейных рекуррентных формул (ЛРФ). При этом порядок ЛРФ может быть, вообще говоря, заранее неизвестен, поэтому класс рядов, управляемых такими ЛРФ, достаточно широк и важен для практических применений. Например, бесконечный временной ряд управляется ЛРФ тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией произведений экспонент, полиномов и гармоник.

Ряд, управляемый ЛРФ, естественным образом порождает рекуррентное продолжение, так как каждый его член равен линейной комбинации некоторого количества предыдущих. Поэтому коэффициенты этой линейной формулы (если они известны) могут быть использованы и для продолжения временного ряда. Важно отметить, что нам необязательно искать ЛРФ минимальной размерности, так как любая ЛРФ, управляющая рядом, приводит к одному и тому же продолжению. Тем самым, главной задачей является нахождение порядка и коэффициентов некоторой ЛРФ, управляющей рядом. Общая идея нахождения ЛРФ состоит в следующем.

Пусть  $d$  – минимальная размерность всех ЛРФ, управляющих рядом. Можно доказать, что если длина окна  $L$  больше, чем  $d$ , и длина временного ряда достаточно велика, то размерность траекторного пространства ряда  $F$  равняется  $d$ . Траекторное пространство порождает (при слабых и естественных ограничениях) ЛРФ размерности  $L-1$ , которая управляет временным рядом. Базовый метод «Гусеница»-SSA порождает естественный базис траекторного пространства, на основе которого конструи-

тивно строится управляющая ЛРФ. Если мы применим эту ЛРФ к последним точкам ряда, то получим продолжение ряда  $F$ .

Та же самая идея работает и в случае продолжения аддитивной компоненты  $F^{(1)}$  ряда  $F = F^{(1)} + F^{(2)}$ . Здесь мы предполагаем, что компонента  $F^{(1)}$  управляется некоторой ЛРФ и является разделимой с остаточным рядом  $F^{(2)} = F - F^{(1)}$  при выбранном значении длины окна  $L$ . Тогда она может быть выделена с помощью метода «Гусеница»-SSA и продолжена по соответствующей линейной рекуррентной формуле.

Предположим, что рассматриваемый ряд  $F$  может быть представлен в виде суммы ряда  $F^{(1)}$  допускающего рекуррентное продолжение, и остаточного ряда  $F^{(2)}$ . Если второй ряд является шумом, то мы приходим к задаче прогнозирования сигнала  $F^{(1)}$  при наличии шума  $F^{(2)}$ . Также можно ставить задачу прогнозирования ряда  $F^{(1)}$ , если это тренд или сезонная компонента ряда  $F$ .

В реальных задачах условия, при которых ряд или компонента ряда допускает точное продолжение, как правило, не выполняются. В этом случае главным предположением для возможности прогнозирования является предположение о том, что при некоторой длине ряда компоненты ряда  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  приближенно сильно разделимы с помощью метода «Гусеница»-SSA. Тогда с помощью «Гусеница»-SSA мы можем приближенно восстановить ряд  $F^{(1)}$  и получить тем самым аппроксимацию как самого ряда  $F^{(1)}$ , так и его траекторного пространства. Другими словами, мы получаем сразу и ЛРФ, приближенно управляющую рядом  $F^{(1)}$ , и начальные данные для этой формулы. Следовательно, мы имеем все, чтобы построить приближенное рекуррентное продолжение ряда  $F^{(1)}$  (т.е. прогноз).

Рассмотрим временной ряд  $F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$  с  $N \geq 3$  и зафиксируем длину окна  $L$  ( $1 < L < N$ ).

В результате процедуры вложения мы получаем последовательность векторов вложения  $X_i^{(L)} = X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T$ ,  $i = 1, \dots, K$ ,  $\wp^{(L)} = \wp^{(L)}(F_N) \xrightarrow{\text{def}} \text{span}(X_1, \dots, X_K)$  – траекторное пространство ряда  $F_N$ .

*Определение.* Пусть  $0 < d < L$ . Если  $\dim \wp^{(L)} = d$ , то мы будем говорить, что ряд  $F_N$  имеет  $L$ -ранг  $d$ , и записывать это как  $\text{rank}_L(F_N) = d$ . Для нулевого ряда положим  $\dim \wp^{(L)} = 0$ .

Очевидно, что равенство  $\text{rank}_L(F_N) = d$  может быть справедливым только, если

$$d \leq \min(L, K). \quad (3.5)$$

При фиксированном  $d$  будем называть  $L$ , для которого выполнено условие (3.5), допустимым. Заметим, что если длина окна, равная  $L$ , является допустимой, то и длина окна, равная  $N - L + 1$ , также допустима.

*Определение.* Если равенство  $\text{rank}_L(F_N) = d < N / 2$  имеет место для любого допустимого  $L$ , то будем говорить, что ряд  $F_N$  имеет ранг  $d$  ( $\text{rank}_L(F_N) = d$ ). Если такое  $d$  существует, то ряд  $F_N$  будем называть рядом конечного ранга.

*Предложение.*

1.  $\text{rank}_L(F_N) = d < N / 2$ .
2. Ортонормированная система собственных векторов  $\{U_i\}_{i=1}^d$ , соответствующих положительным собственным числам  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  матрицы  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ , составляет ортонормированный базис пространства  $\wp^{(L)}$ .

3. Число  $\text{rank}_L(F_N)$  равняется порядку сингулярного разло-

жения траекторной матрицы  $X$ .

Следующее утверждение показывает, что множество рядов конечного ранга достаточно большое.

*Предложение.* Любой ряд, являющийся линейной комбинацией произведений полиномов, экспонент и косинусов, является рядом конечного ранга.

*Определение.* Будем говорить, что временной ряд  $F_N$  имеет конечно-разностную размерность, не большую, чем  $d$  ( $fdim(F_N) \leq d$ ), если  $1 \leq d \leq N - 1$  и найдутся числа  $a_1, \dots, a_d$  такие, что

$$f_{i+d} = \sum_{k=1}^d a_k f_{i+d-k}, \quad 0 \leq i \leq N - d - 1, \quad a_d \neq 0. \quad (3.6)$$

Легко увидеть, что при  $d \leq N - 2$  из неравенства  $fdim(F_N) \leq d$  следует  $fdim(F_N) \leq d + 1$ .

*Определение.* Число  $d = \min\{k : fdim(F_N) \leq k\}$  называется конечно-разностной размерностью (сокращенно – просто размерностью ряда  $F_N$ ) и записывается  $fdim(F_N) \leq d$ . Для нулевого ряда  $F_N$  с  $f_n \equiv 0$  положим  $fdim(F_N) = 0$ .

Как правило, мы будем предполагать, что  $fdim(F_N) > 0$ .

*Определение.* Формула (3.6) называется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ). ЛРФ (3.6) с  $d = fdim(F_N)$  называется минимальной ЛРФ. Если (3.6) справедливо, то будем говорить, что ряд  $F_N$  управляется линейной рекуррентной формулой (3.6).

Заметим, что минимальная ЛРФ определяется однозначно. Приведем примеры ЛРФ, управляющих некоторыми модельными рядами:

- а) степенная последовательность  $f_n = a^n : f_{i+1} = af_i, d = 1$ ;
- б) экспоненциально–гармоническая последовательность

$$f_n = Ae^{\alpha n} \cos(2\pi\omega n + \phi),$$

где  $\omega \in (0, 1/2)$ , управляется ЛРФ

$$f_{i+2} = 2e^\alpha \cos(2\pi\omega) f_{i+1} - e^{2\alpha} f_i, \quad d = 2;$$

в) линейная последовательность  $f_n = an + b$  с  $a \neq 0$ :

$$f_{i+2} = 2f_{i+1} - f_i, \quad d = 2;$$

г) квадратичная последовательность  $f_n = n^2$ :

$$f_{i+3} = 2f_{i+2} - 3f_{i+1} + f_i, \quad d = 3;$$

Следующее утверждение показывает эквивалентность класса рядов конечного ранга и рядов, управляемых ЛРФ, для рядов, бесконечных в обе стороны. Рассмотрим бесконечный в обе стороны ряд  $F = (\dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots)$ . Для него можно рассмотреть аналогичное определение ранга как ранга траекторной матрицы с бесконечным числом столбцов. Заметим, что для бесконечного ряда ограничения на  $i$  и  $d$  в определении конечно-разностной размерности ряда пропадают и можно уже говорить не о том, существует или нет конечно-разностная размерность, а о том, является ли она конечной или бесконечной. Если размерность конечна, то существует ЛРФ, управляющая рядом; иначе такой линейной рекуррентной формулы не существует.

*Предложение.* Любой бесконечный ряд является рядом конечного ранга  $d$  тогда и только тогда, когда он имеет размерность  $d$ .

Отсюда, в частности, следует, что все приведенные выше примеры рекуррентных формул задают минимальные ЛРФ.

Заметим, что для временных рядов конечной длины ряд конечного ранга не обязательно имеет конечно-разностную размерность. В качестве контрпримера можно привести ряд с  $f_n = 1$  для  $0 \leq n \leq N-2$  и  $f_{N-1} = 2$ . Очевидно, что  $\text{rank}_L(F_N) = 2$  для  $2 \leq L \leq N-1$ . В то же время, при  $d < N-1$  равенство (3.6) не мо-

жет выполняться ни для какого набора коэффициентов  $a_k$ .

Следующая теорема показывает, что получить из ряда конечного ранга ряд, управляемый ЛРФ, можно, отбросив несколько первых и несколько последних элементов ряда. Обозначим  $F_{i,j} = (f_{i-1}, \dots, f_{j-1})$ .

*Теорема.* Пусть  $1 \leq \text{rank}_L(F_N) = d < L$ . Тогда найдутся целые числа  $d_0$  и  $M$ , такие что  $0 \leq d \leq d_0$ ,  $0 \leq M \leq d - d_0$  и  $\text{fdim}(F_{M+1, M+K+d_0}) = d_0$ .

### ЛРФ и характеристический полином

Представляет интерес описание поведения ряда, управляемого полученной ЛРФ. Покажем, как это поведение может быть выражено в терминах корней характеристического полинома.

Пусть ряд  $F = (f_0, \dots, f_n, \dots)$  управляется ЛРФ (3.6) с  $a_d \neq 0$  и  $i \geq 0$ . Рассмотрим характеристический полином линейной рекуррентной формулы (3.6)

$$P_d(\lambda) = \lambda^d - \sum_{k=1}^d a_k \lambda^{d-k}$$

и обозначим  $k_m$  ( $1 \leq m \leq p$ ) кратности его (в общем случае, комплексных) несовпадающих корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ( $k_1 + \dots + k_p = d$ ). Заметим, что, так как  $a_d \neq 0$ , все корни  $\lambda_m$  отличны от нуля.

*Теорема.* Вещественнозначный ряд  $F$  удовлетворяет линейной рекуррентной формуле (3.6) тогда и только тогда, когда

$$f_n = \sum_{m=1}^p \left( \sum_{j=0}^{k_m-1} c_{mj} n^j \right) \lambda_m^n, \quad (3.7)$$

где комплексные коэффициенты  $c_{mj}$  зависят от первых  $d$  элементов ряда  $f_0, \dots, f_{d-1}$ .

*Замечание.* Если корень  $\lambda_m$  вещественный, то его вклад в сумму (3.7) имеет форму полинома по  $n$ , умноженного на  $\lambda_m^n$  (т.е.

на экспоненту). Более того, соответствующие коэффициенты  $c_{mj}$  также вещественны. Если корень  $\lambda_m$  является комплексным, то характеристический полином имеет также сопряженный к нему комплексный корень той же кратности. Переписав один из этих корней как  $\rho e^{i2\pi\omega}$  с  $\omega \in (0, 1/2)$ , мы получим, что совместный вклад обоих корней в сумму (3.7) имеет вид полинома по  $n$ , умноженного на  $\rho^n \cos(2\pi\omega n + \phi)$ . Более того, в этом случае соответствующие коэффициенты  $c_{mj}$  и  $c_{ij}$  также являются сопряженными комплексными числами. В обоих случаях, если кратность корня  $\lambda_m$  равна 1, то полином по  $n$  становится константой.

Таким образом, любой бесконечный ряд, удовлетворяющий линейной рекуррентной формуле (3.6) для любого  $i$ , обязательно является суммой произведений экспонент, полиномов и гармоник.

Рассмотрим подробно случаи  $d = 1$  и  $d = 2$ .

$d = 1$ .

В этом случае у характеристического полинома  $p_1(\lambda) = \lambda + b_1$  может быть только один вещественный корень  $\lambda_1$  и  $f_n = c\lambda_1^n$ . Обозначим  $\alpha = \ln(|\lambda_1|)$ . Если  $\lambda_1 > 1$ , то ряд  $F$  с  $f_n = ce^{\alpha n}$ , является возрастающей экспонентой. При  $0 < \lambda_1 < 1$  ряд  $F$  с  $f_n = ce^{\alpha n}$  – убывающая экспонента. При  $\lambda_1 = 1$  члены ряда  $F$  равны одной и той же константе:  $f_n = c$ . При  $\lambda_1 < 0$  ряд  $F$  с  $f_n = c(-1)^n e^{\alpha n}$  имеет пилообразный вид. Заметим, что выражение  $(-1)^n$  можно трактовать как косинус с периодом, равным двум.

$d = 2$ .

*Два различных вещественных корня.* Этот случай сводится к случаю с  $d = 1$ , и ряд  $F$  является суммой двух экспонент с различными показателями.

Один вещественный корень кратности два. Здесь  $f_n = (an + b)\lambda_1^n$ . Интерес представляет случай  $\lambda_1 = 1$ , когда  $F$  является линейной последовательностью.

Два комплексно-сопряженных корня. Если два корня являются комплексно-сопряженными, то их можно представить в виде  $\lambda_1 = a + ib$  и  $\lambda_2 = a - ib$ , т.е. оба корня задаются точкой  $(a, b)$  на комплексной плоскости. Записав эту точку в полярных координатах, мы получим  $\lambda_1 = \rho e^{i2\pi\omega}$  и  $\lambda_2 = \rho e^{-i2\pi\omega}$ , где  $\rho$  – модуль корня, а  $\omega$  – полярный угол. Оба эти корня порождают два слагаемых в (3.7), которые при суммировании приводят к ряду с общим членом

$$f_n = A\rho^n \cos(2\pi\omega n + \phi),$$

причем параметры  $A$  и  $\phi$  определяются начальными данными, к которым применяется ЛРФ. При  $\rho = 1$  мы получаем чисто гармоническую последовательность. В этом случае можно сказать, что соответствующие комплексно-сопряженные корни полинома лежат в координатах комплексной плоскости на единичной окружности.

Асимптотическое поведение компоненты ряда, соответствующей вещественному корню (или паре комплексно-сопряженных корней), существенно зависит от  $\rho = |\lambda_m|$ . Продемонстрируем влияние отклонения  $\rho$  от единицы на простейшем случае  $d = 1$ , что соответствует вещественному корню кратности 1. Тогда, если к примеру  $\lambda_1 = \rho = 0,8$  и  $|c_{10}| \neq 0$ , то  $|f_n|$  за 10 шагов уменьшается примерно в 10 раз, а за 100 шагов – в  $5 \cdot 10^9$  раз. Наоборот, если  $\lambda_1 = \rho = 1,2$  (и  $|c_{10}| \neq 0$ ), то  $|f_n|$  возрастает в 6 раз за 10 шагов и в  $8 \cdot 10^7$  раз за 100 шагов.

### Главные и побочные корни характеристического полинома

Если ряд  $F_N$  имеет размерность, равную  $d$ , то характеристический полином его минимальной линейной рекуррентной формулы имеет ровно  $d$  корней. Но один и тот же ряд может подчиняться многим другим ЛРФ порядка  $r > d$ . Рассмотрим такую ЛРФ

$$f_{r+i} = b_1 f_{r+i-1} + b_2 f_{r+i-2} + \dots + b_r f_i. \quad (3.8)$$

Характеристический полином  $P_r(\lambda)$  ЛРФ (3.8) имеет  $r$  корней,  $d$  из которых (мы будем называть их главными корнями) совпадают с корнями минимальной ЛРФ. Другие  $r - d$  корней являются побочными: в силу единственности представления (3.7) коэффициенты  $c_{mj}$ , соответствующие этим корням, равны нулю. Однако сама ЛРФ (3.8) управляет более широким классом рядов по сравнению с минимальной.

Так как корни характеристического полинома определяют его коэффициенты однозначно, то тем самым корни полинома задают сам полином. Следовательно, удалив (обнулив) все побочные корни характеристического полинома, мы получим минимальную ЛРФ временного ряда.

*Пример.* Годовая сезонность.

Пусть ряд  $F_N$  имеет период 12 (например, этот ряд описывает некоторое сезонное поведение). Тогда его можно представить в виде суммы константы и шести гармоник:

$$f_n = c_0 + \sum_{k=1}^5 \cos(2\pi nk / 12 + \phi_k) + c_6 \cos(\pi n). \quad (3.9)$$

При условии, что  $c_k \neq 0$  для  $k = 0, \dots, 6$ , ряд имеет размерность 12. Другими словами, характеристический полином минимальной ЛРФ, управляющей рядом (3.9), имеет 12 корней. Все эти корни имеют единичные модули. Два вещественных корня  $+1$

и -1 соответствуют первому и последнему членам представления (3.9). Гармоническая компонента с частотой  $\omega_k = k / 12$  порождает два комплексно-сопряженных корня  $\exp(\pm i2\pi k / 12)$ , соответствующих полярному углу  $\pm 2\pi k / 12$ .

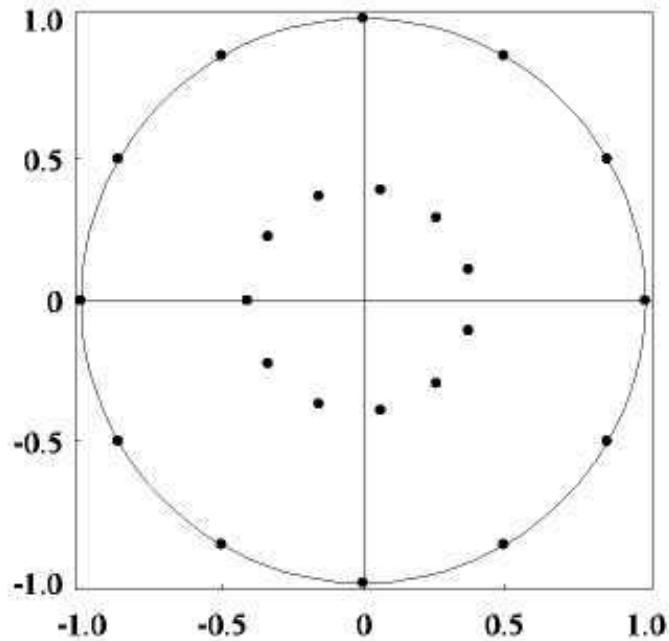


Рис. 3.1. Годовая сезонность: главные и побочные корни.

Рассмотрим теперь ЛРФ, которая не является минимальной. Пусть длина ряда  $N$  достаточно большая. Если мы выберем некоторую длину окна  $L > 13$  и возьмем  $r = 12$ ,  $\wp_r = \wp^{(L)}(F_N)$ , то вектор  $R = (a_{L-1}, \dots, a_1)^T$  определенный в (\*<sup>1</sup>), порождает ЛРФ

---

<sup>1</sup> Пусть  $\wp_d \subset \mathbb{R}^L$  — некоторое линейное подпространство размерности  $d$ . Для любого вектора  $X \in \mathbb{R}^L$  будем обозначать  $X^\nabla \in \mathbb{R}^{L-1}$  вектор, состоящий из первых  $L-1$  компонент вектора  $X$ . Обозначим  $P_1, \dots, P_d$  некоторый ортонормированный базис пространства  $\wp_d$  и рассмотрим линейное векторное пространство  $\wp_d^\nabla$ , натянутое на векторы  $P_1^\nabla, \dots, P_d^\nabla$ . Пусть  $\pi_i$  — последняя координата вектора  $P_i$ . Предположив, что  $e_L = (0, \dots, 0, 1) \notin \wp_d$ , получим неравенство  $v^2 = \pi_1^2 + \dots + \pi_d^2 < 1$ . Естественно назвать  $v^2$  коэффициентом вертикальности пространства  $\wp_d$ .

$$f_{i+L-1} = a_1 f_{i+L-2} + \dots + a_{L-1} f_i, \quad (3.10)$$

которая не минимальна, но в то же время управляет рядом (3.9).

Возьмем  $c_0 = \dots = c_6 = 1$ ,  $\phi_1 = \dots = \phi_5 = 0$  и  $L = 24$ . Корни характеристического полинома формулы (3.10) изображены на рис. 3.1.

Можно заметить, что главные 12 корней полинома образуют правильный 12-угольник с вершинами, лежащими на единичном круге комплексной плоскости. Одиннадцать побочных корней расположены внутри единичного круга и невелики по модулю.

В случае приближенной делимости тяжело сравнивать результаты рекуррентного и векторного прогнозов теоретически. Вообще говоря, близость результатов двух методов прогноза говорят в пользу его устойчивости (достоверности).

Рекуррентный прогноз проще для интерпретации в силу удобного описания ЛРФ в терминах ее характеристического полинома. С другой стороны, результаты анализа данных показывают, что векторный прогноз обычно более «консервативен» (или

*Заметим, что коэффициент вертикальности равняется квадрату косинуса угла между вектором  $e_L$  и пространством  $\mathcal{F}_d$ , а следовательно, эта характеристика не зависит от выбора базиса пространства.*

*Из  $e_L \notin \mathcal{F}_d$  следует, что  $d < L$ . Положим*

$$R = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{i=1}^d \pi_i P_i^\nabla, \quad R = (a_{L-1}, \dots, a_1)^T. \quad (*)$$

*Теорема. Пусть  $X = (x_1, \dots, x_L)^T \in \mathcal{F}_d$  и  $e_L \notin \mathcal{F}_d$ . Тогда  $x_L = \sum_{k=1}^{L-1} a_k x_{L-k}$ ,*

*где коэффициенты  $a_k$  определены равенством (5).*

*Следствие из этой теоремы дает нам вид одной из управляющих рядом ЛРФ размерности  $L-1$ .*

*Следствие. Пусть  $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}^{(L)}(F_N)$  и  $e_L \notin \mathcal{F}_d$ . Тогда выполняется соотношение  $f_{i+L-1} = \sum_{k=1}^{L-1} a_k f_{i+L-1-k}$ ,  $0 \leq i \leq K-1$ , где коэффициенты  $a_k$  определены равенством (\*). Таким образом, вектор  $R$  задает коэффициенты управляющей рядом ЛРФ.*

менее «радикален») в тех случаях, когда рекуррентный прогноз демонстрирует резкое возрастание или убывание ряда.

### **Выводы и рекомендации**

1. *Постановка задачи.* Есть ряд  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$  и стоит задача прогноза компоненты ряда  $F_N^{(1)}$ . Если  $F_N^{(2)}$  может рассматриваться как шумовая компонента, то задача состоит в прогнозировании сигнала  $F_N^{(1)}$  в присутствии шума  $F_N^{(2)}$ .

2. *Основные предположения:*

а) ряд  $F_N^{(1)}$  допускает рекуррентное продолжение с помощью ЛРФ относительно небольшой размерности  $d$ ;

б) существует такое число  $L$ , что ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  приближенно разделимы при выборе длины окна, равной  $L$ . Это – важное предположение, так как любой временной ряд  $F_N^{(1)}$  можно рассматривать как аддитивную компоненту ряда  $F_N$  в том смысле, что  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$  с  $F_N^{(2)} = F_N - F_N^{(1)}$ . Условие о (приближенной) делимости означает, что  $F_N^{(1)}$  является естественной аддитивной компонентой ряда  $F_N$  с точки зрения метода «Гусеница»-SSA.

3. *Правильный выбор параметров.* Так как мы должны выбрать длину окна  $L$ , обеспечивающую достаточно хорошее качество делимости, и выбрать набор собственных троек, соответствующих ряду  $F_N^{(1)}$ , то все основные правила для «Гусеница»-SSA, как метода анализа временного ряда, остаются в силе. Заметим, что в данном случае нам необходимо отделить ряд  $F_N^{(1)}$  от  $F_N^{(2)}$ , но мы не нуждаемся в полном разложении всего ряда  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ .

4. *Особенности и опасности.* Задача прогнозирования с помощью «Гусеница»-SSA имеет свои особенности по сравнению с

задачей анализа.

1) Так как выбранная длина окна  $L$  (вместе с набором собственных троек) порождает ЛРФ размерности  $L-1$ , которая используется в качестве рекуррентной прогнозирующей формулы, то проблема побочных корней характеристического полинома становится довольно важной. Выбор  $L = d + 1$ , где под  $d$  подразумевается размерность минимальной ЛРФ, является оптимальным. К сожалению, на практике маленькие значения  $L$  не обеспечивают достаточного качества разделимости. Поэтому необходимо выбрать наименьшую длину окна, большую чем  $d$  и приводящую к достаточно хорошей разделимости.

2) Линейное пространство  $\wp_r$  размерности  $r$ , определяющее прогнозирующую ЛРФ, является линейной оболочкой собственных векторов из выбранных собственных троек. Так как условие  $r > d$  должно быть выполнено, число собственных выбираемых троек, соответствующих ряду  $F_N^{(1)}$ , должно быть не меньше, чем  $d$ .

3) При анализе ряда с помощью «Гусеница»-SSA, если мы дополним множество правильно выбранных собственных троек некоторыми лишними собственными тройками с маленькими сингулярными значениями, то результат восстановления существенно не изменится. Если же мы имеем дело с прогнозом, то такое действие может вызвать сильное изменение пространства  $\wp_r$ ; его размерность увеличится и, как следствие, ЛРФ прогноза также изменится. Все это может привести к кардинальному изменению прогноза. Заметим, что величины дополнительных сингулярных значений в этом случае не важны. Таким образом, к выбору собственных троек, описывающих ряд  $F_N^{(1)}$ , необходимо относиться очень внимательно.

*5. Характеристики прогноза.* Перечислим несколько харак-

теристик, которые могут быть полезны при оценке качества прогноза.

1) Характеристики делимости. Все характеристики делимости, рассмотренные подробно в работе [9], посвященной анализу временных рядов, важны также и для прогнозирования.

2) Корни полинома. Корни характеристического полинома прогнозирующей ЛРФ могут помочь в описании поведения прогноза. Эти корни полинома могут быть полезны при ответе на следующие вопросы:

а) пусть мы ожидаем (предполагаем), что прогноз должен иметь некоторую специальную форму (например, ожидается, что значения будут возрастать). Описывают ли корни полинома такую возможность? Например, для экспоненциального роста необходимо, чтобы был вещественный корень единичной кратности, немного больший по значению, чем 1; если мы пытаемся спрогнозировать годовую сезонность, то должна присутствовать пара комплексных корней с частотами  $\approx k / 12$ , и т.д.;

б) возможно ли получение опасно неустойчивого, противоречивого прогноза? В терминах корней полинома, каждый побочный корень увеличивает такой шанс. Если модуль побочного корня существенно меньше единицы, то небольшое изменение начальных данных для применяемой ЛРФ не должно привести к существенным ошибкам долгосрочного прогноза. Однако побочные корни с большими, чем 1, модулями могут привести к проблемам даже для краткосрочного прогноза.

3) Коэффициент вертикальности. Значение коэффициента вертикальности  $\nu^2$  равно квадрату косинуса угла между пространством  $\mathcal{S}_r$  и вектором-ортом  $e_L$ . Условие  $\nu^2 < 1$  является необходимым для возможности прогнозирования. Если величина  $\nu^2$  близка к 1, то коэффициенты прогнозирующей ЛРФ будут большими и, следовательно, некоторые корни характеристического

полинома также будут большими по модулю. Если ожидаемое поведение значений прогноза не предполагает резкого возрастания или убывания, то большие значения коэффициента вертикальности говорят о возможных проблемах, которые могут возникнуть, в частности, о возможной неустойчивости прогноза. Такая ситуация означает, что были выбраны лишние собственные тройки (или вообще, предположения о ряде не выполнены).

*б. Роль начальных данных.* Не считая числа  $M$  шагов прогноза, к формальным параметрам алгоритма SSA-прогнозирования относятся длина окна  $L$  и набор  $I$  собственных троек, описывающих ряд  $F_N^{(1)}$ . Эти параметры определяют как прогнозирующую ЛРФ, так и начальные данные для применения этой ЛРФ. Очевидно, что результаты прогноза существенно зависят от начальных данных, особенно если прогнозирующая ЛРФ имеет лишние корни.

Метод SSA-прогнозирования в качестве начальных данных использует последние значения  $\tilde{f}_{N-L+1}^{(1)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(1)}$  восстановленного ряда  $\tilde{F}_N^{(1)}$ . В силу свойств диагонального усреднения последние (и первые) члены ряда  $F_N^{(1)}$  обычно восстанавливаются с меньшей точностью по сравнению с серединой ряда. Этот эффект может вызвать увеличение ошибок прогноза.

Например, любой линейный (и не являющийся константой) ряд с общим членом  $f_n = an + b$  управляется минимальной ЛРФ  $f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$ , которая не зависит от  $a$  и  $b$ . Параметры  $a$  и  $b$ , используемые при прогнозе (в данном случае – продолжении ряда), полностью определяются начальными значениями  $f_{N-2}$  и  $f_{N-1}$ . Очевидно, что ошибки в начальных данных могут существенно изменить поведение прогноза, даже сменить тенденцию к возрастанию на тенденцию к убыванию.

Таким образом, важно проверять последние точки восста-

новленного ряда, в частности, сравнивать их с ожидаемым поведением ряда  $F_N^{(1)}$ .

7. *Восстановленный ряд и ЛРФ.* В ситуации сильной разделимости рядов  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ , а также правильного выбора собственных троек восстановленный ряд будет управляться ЛРФ и совпадать с рядом  $F_N^{(1)}$ . Несогласованность в соответствии между восстановленным рядом и рядом, управляемым найденной ЛРФ, является индикатором возможных ошибок: недостаточного качества разделимости (возможно, вызванного неправильным выбором параметров) или общего несоответствия модели. Две характеристики данного соответствия могут оказаться полезными.

1) Глобальная аппроксимация. Кроме использования ЛРФ для прогнозирования мы можем применять ее для аппроксимации или всего ряда, или его частей. Например, если мы вместо последних возьмем первые значения восстановленного ряда и сделаем  $N - L + 1$  шагов прогнозирующей процедуры, то мы можем проверить, насколько хорошо восстановленный ряд глобально описывается (аппроксимируется) данной ЛРФ.

2) Локальная аппроксимация. Описанная выше процедура соответствует долгосрочному прогнозированию. Чтобы проверить качество краткосрочного прогноза, мы должны проверить локальное соответствие между восстановленным рядом и прогнозирующей ЛРФ. Для этого рассмотрим несколько другую процедуру.

Этот метод используется для построения эмпирических доверительных интервалов и называется мультистартовым рекуррентным продолжением. Согласно ему, для относительно небольшого  $Q$  выполняется  $Q$  шагов процедуры мультистартового рекуррентного продолжения, т.е. происходит  $Q$ -кратное применение прогнозирующей ЛРФ к скользящим начальным данным,

меняющимся от  $(\tilde{f}_0^{(1)}, \dots, \tilde{f}_{L-2}^{(1)})$  до  $(\tilde{f}_{K-Q}^{(1)}, \dots, \tilde{f}_{N-Q-1}^{(1)})$ ,  $K = N - L + 1$ .

Полученные результаты сравниваются со значениями  $f_{L-1}^{(1)}, \dots, f_{N-1}^{(1)}$ .

Поскольку как ЛРФ, так и начальные данные содержат некоторые ошибки, то локальное несоответствие для небольших  $Q$  обычно более информативно, чем глобальное. Более того, проверяя результаты локальной аппроксимации для различных  $Q$ , можно оценить максимальное число шагов  $M$ , при прогнозировании на которое можно получить разумные результаты.

8. *Устойчивость и надежность прогноза.* В то время как правомерность прогнозирования, основанная на требовании сохранения структуры ряда в будущем, не может быть проверена на основе внутренних свойств временного ряда, устойчивость прогноза поддается некоторой проверке. Упомянем несколько способов такой проверки.

1) Различные алгоритмы. Близость результатов различных вариантов прогноза (например, рекуррентного и векторного прогнозов) говорит в пользу его достоверности.

2) Различные начальные данные. Так как последние элементы восстановленного ряда могут содержать значительные ошибки, то можно начать прогноз с одной из предыдущих точек. Результаты сравнения прогнозов, начатых с разных точек, также говорят об устойчивости прогноза.

3) Различные длины окна. Если характеристики разделимости устойчивы при небольших изменениях длины окна, то можно сравнивать прогнозы при измененных  $L$ .

4) Прогнозирование укороченного временного ряда. Укоротим исходный ряд  $F_N$  удалением нескольких его последних элементов. Если условия разделимости устойчивы относительно такой операции, то мы можем сравнивать прогноз укороченного ряда с последними, удаленными точками ряда. Этот способ более

объективен, так как в построении прогноза не участвуют те точки ряда, на которых прогноз тестируется. Однако его недостатком является то, что значения в последних (наиболее «недавних») точках ряда не учитываются при построении прогноза.

### **3.3. Оценка частотных параметров модели Тейла-Вейджа в задачах краткосрочного прогнозирования**

Современное состояние проблемы прогнозирования можно охарактеризовать несколькими ключевыми аспектами:

1) современная наука располагает обширным кругом хорошо формализованных методов, позволяющих решать подавляющее большинство практических задач [10];

2) все методы прогнозирования имеют свои ограничения и допущения, и абсолютно универсальных среди них нет и в обозримом будущем не предвидится [11];

3) исследователь при решении практических задач обладает возможностью использовать несколько методов прогнозирования (порой это число даже избыточно) и иногда выбор конкретного метода имеет большее значение, чем его особенности;

4) существует круг задач, которые в силу своих объективных свойств (малая длина ряда, наличие пропусков, высокий уровень зашумленности и т.п.) не могут быть корректно решены с помощью современных методов прогнозирования без предварительной обработки данных [10, 11].

К упомянутым задачам можно отнести и те, которые находятся «на стыке» областей применения некоторых методов. В этом случае при попытке последовательного применения нескольких методов прогнозирования возможно получение кардинально разных результатов, которые не удовлетворят исследователя. При этом проверка выбранной методики на прошлых

данных (так называемый ретроспективный анализ) может давать и удовлетворительные результаты.

*Постановка проблемы.* Рассмотрим класс временных рядов, описывающих процессы, имеющих сезонную динамику. Отметим, что класс таких рядов гораздо шире, чем это кажется. Дело в том, что понятие «сезон» в прогнозировании применим к любым систематическим колебаниям. Кроме того, цикл колебаний может существенно отличаться от предполагаемых величин (год, месяц, неделя, сутки, час и т.д.). И если удаётся выявить величину цикла этих колебаний, то такой временной ряд можно использовать для прогнозирования с использованием аддитивных и мультипликативных моделей [10, 12].

Суть этих моделей состоит в представлении исходного ряда в виде суммы или произведения трех составляющих:

$$F = T + S + E \quad (3.11)$$

или

$$F = T \cdot S \cdot E, \quad (3.12)$$

где  $F$  – прогнозируемое значение;  $T$  – тренд;  $S$  – сезонная компонента;  $E$  – ошибка прогноза.

На практике отличить аддитивную модель от мультипликативной можно по величине сезонной вариации. Аддитивной модели, в отличие от мультипликативной, присуща практически постоянная сезонная вариация. Отметим, что мультипликативная модель зачастую сводится к аддитивной путем логарифмирования ряда [10].

Сезонная компонента  $S$  предполагается периодической с периодом  $l$

$$S(t) = S(t+l), \quad (3.13)$$

причем для однозначности параметризации модели обычно предполагают, что для аддитивной модели выполняется условие

$$S(1) + S(2) + \dots + S(l) = 0, \quad (3.14)$$

а для мультипликативной модели выполняется условие

$$S(1) \cdot S(2) \cdot \dots \cdot S(l) = 1. \quad (3.15)$$

Модификациями метода экспоненциального сглаживания для сезонных рядов являются методы Хольта-Винтерса и Тейла-Вейджа. В качестве модели ряда используется его представление в виде комбинации линейного тренда с сезонной составляющей, наложенной либо мультипликативно (модель Хольта-Винтерса), либо аддитивно (модель Тейла-Вейджа). Предполагается, что коэффициенты тренда и сезонная составляющая могут медленно меняться во времени. В соответствии с этим вычислительный процесс устроен как адаптивная процедура, управляемая тремя параметрами адаптации (один параметр – адаптация уровня, второй – угла наклона, третий – коэффициентов сезонности). В ходе вычислений строится сглаженный ряд, представляющий собой в каждый момент времени  $t$  прогноз по данным до момента  $(t-1)$  включительно.

Трудности в применении упомянутых методов возникают в случаях, когда неизвестно точное значение периода сезонности, либо ряд содержит менее двух полных периодов. Следует отметить, что при анализе динамики социально-экономических параметров (таких как продажи, спрос и т.п.), нередки случаи, когда реальное значение периодов сезонности может существенно отличаться от предполагаемых.

Таким образом, возникает задача оценки периода сезонности для корректного применения методов экспоненциального сглаживания. Ошибка в оценке этого параметра всего на 8,3% (доля месяца в годовом периоде) чревата получением неверных значений коэффициентов сезонности, и может привести к ошибочному прогнозу.

Подход к решению. Будем рассматривать ряд, длина кото-

рого  $L$  больше одного, но менее двух предполагаемых периодов сезонности:

$$l \leq L \leq 2l. \quad (3.16)$$

Для оценки периода сезонности будем использовать метод «Гусеница»-SSA, который позволяет разложить исходный ряд на гармонические составляющие. Относительно малая длина ряда является естественным ограничением метода, однако опыт практического использования показал, что в рядах с малым уровнем шума выявить частоту основной гармоники удастся при длине ряда, сравнимой с ее полным периодом.

Период главной гармоники в общем случае может не совпадать с периодом сезонности в силу того, что не всякая сезонная составляющая является гармонической. Однако полученная таким способом оценка выглядит более обоснованной, чем предположения о значении периода сезонности на уровне «здравого смысла».

Кроме частоты основной гармоники, «Гусеница»-SSA позволяет выявить также медленно меняющуюся составляющую (тренд), информацию о которой целесообразно использовать совместно с частотной в аддитивной модели экспоненциально-го сглаживания.

Предлагается следующая процедура построения прогнозной модели (рис. 3.2.) [9].

*Этап 1.* Определение тренда. Может быть использован любой из многочисленных подходов выделения тренда. Отметим, что использование полиномиальной формы тренда (например, с помощью стандартных средств MS Excel) хотя и позволяет описать динамику внутри ряда, может привести к существенному искажению итогового прогноза. В случае если физическая природа процесса заранее неизвестна, целесообразным представляется использование либо простейшего вида тренда

(линейного или экспоненциального), либо аппарата метода «Гусеница»-SSA для выявления медленно меняющейся составляющей.



Рис. 3.2. Процедура структурно-параметрического синтеза рекуррентных моделей динамических процессов методом SSA

*Этап 2.* Определение сезонной компоненты. Вычитая из фактических значений ряда значения тренда, определяются величины сезонной компоненты.

*Этап 3.* Определение периода сезонности. С помощью метода «Гусеница»-SSA анализируется исходный ряд и ряд сезон-

ных компонент. Изменяя внутренний настроечный параметр метода – длину окна, можно выявить значение частоты главной гармонике ряда. Отметим, что при выборе разных типов тренда, анализ сезонной компоненты может приводить к разным результатам. Поэтому необходимо следить за корректностью преобразований исходного ряда.

Частоту основной гармонике предлагается определять путем анализа расположения корней характеристического полинома линейной рекуррентной формулы, генерируемой методом «Гусеница»-SSA.

*Этап 4.* Корректировка сезонной составляющей таким образом, чтобы их сумма за период была равна нулю (для аддитивной модели).

*Этап 5.* Расчет ошибки модели как разности между фактическими значениями и значениями модели.

*Этап 6.* Построение итогового прогноза с использованием экспоненциального сглаживания, что позволит учесть возможное изменение тенденций, на основе которых построена модель.

**Пример.** Рассмотрим модельный ряд из 28 точек, состоящий из суммы трех гармоник разных частот, экспоненциального тренда и случайной помехи, максимальный уровень которой равен десятипроцентному уровню полезного сигнала.

Воспользовавшись стандартными средствами MS Excel, найдем линейный тренд исходного ряда (рис. 3.3).

Вычитая из значений исходного ряда значения тренда, найдем сезонную составляющую (рис. 3.4).

Как видно из рис. 3.4, сезонная составляющая ряда носит гармонический характер, ряд содержит чуть больше одного периода и последние значения ряда (примерно с 25 точки) явно не повторяют общей тенденции.

Период сезонности по рисунку можно оценить лишь при-

близительно, предположительно он равен 23-24.

Разделим ряд на периоды по 24 точки и определим значения сезонных компонент в этих точках. Добавим к тренду поправку в  $-0,5706$ , полученную после корректировки сезонной составляющей.

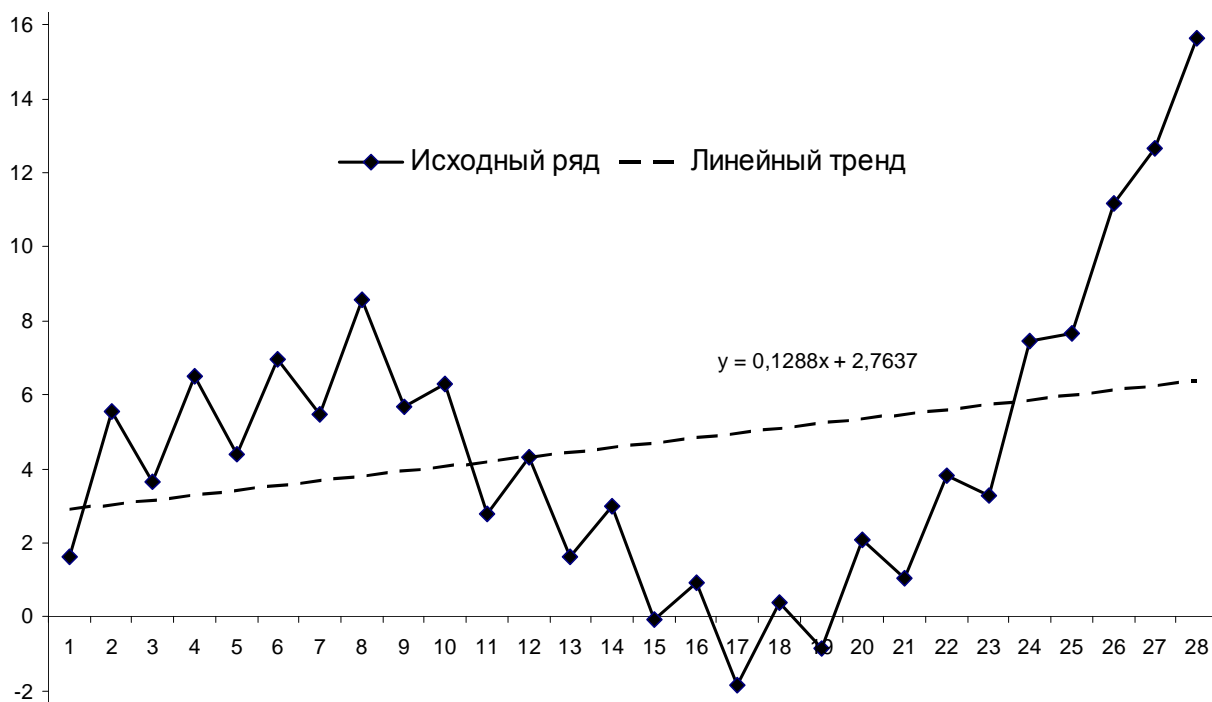


Рис. 3.3. Линейный тренд исходного ряда

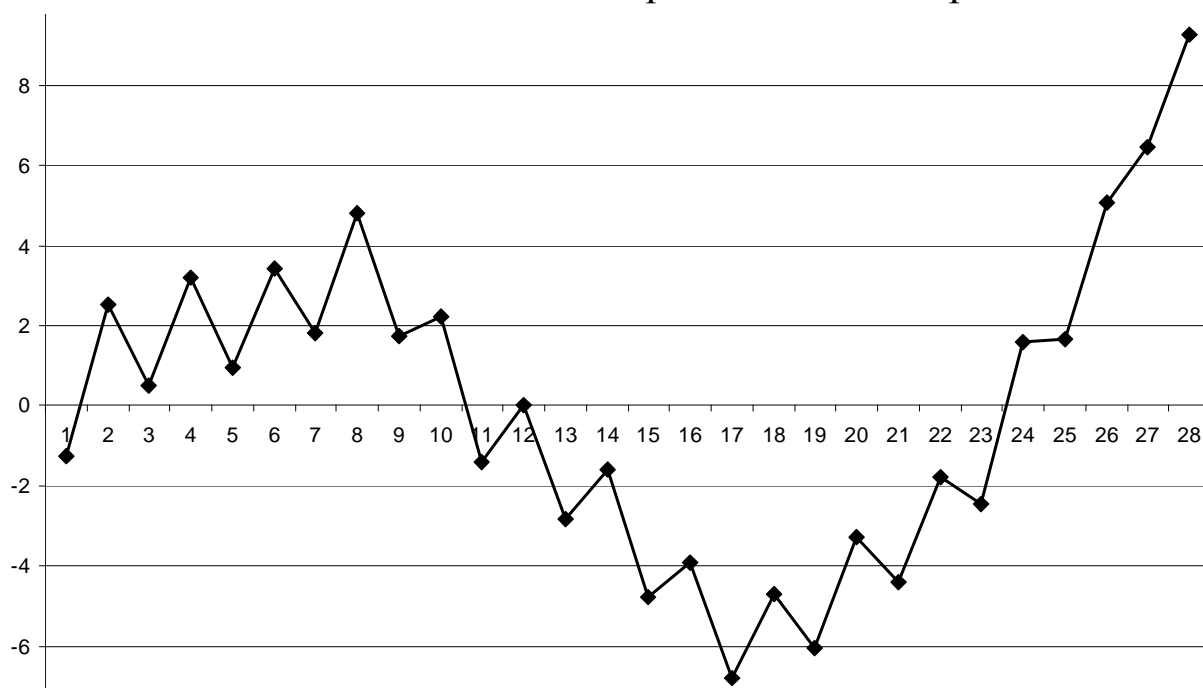


Рис. 3.4. Сезонная составляющая ряда при выделении линейного тренда

Его уравнение примет вид:

$$T = 0,1288t + 2,7637 - 0,5706 = 0,1288t + 2,1931. \quad (3.17)$$

Определим ошибку прогнозной модели (табл.3.1).

Таблица 3.1

t	Значение ряда	1-й сезон	2-й сезон	Среднее	Сезонная компонента	Значение модели	Отклонение
1	1,6389	-1,2536	1,6605	0,2034	0,7741	3,0959	-1,457
2	5,5425	2,5212	5,0606	3,7909	4,3615	6,8122	-1,2697
3	3,6448	0,4947	6,4435	3,4691	4,0397	6,6192	-2,9744
4	6,4915	3,2126	9,2756	6,2441	6,8148	9,5230	-3,0315
5	4,3762	0,9685	–	0,9685	1,5392	4,3762	0
6	6,9413	3,4048	–	3,4048	3,9755	6,9413	0
7	5,4784	1,8131	–	1,8131	2,3838	5,4784	0
8	8,5885	4,7944	–	4,7944	5,3651	8,5885	0
9	5,6670	1,7441	–	1,7441	2,3147	5,6670	0
10	6,2906	2,2389	–	2,2389	2,8096	6,2906	0
11	2,7770	-1,4035	–	-1,4035	-0,8328	2,7770	0
12	4,3322	0,0229	–	0,0229	0,5935	4,3322	0
13	1,6182	-2,8199	–	-2,8199	-2,2492	1,6182	0
14	2,9722	-1,5947	–	-1,5947	-1,0241	2,9722	0
15	-0,0717	-4,7674	–	-4,7674	-4,1967	-0,0717	0
16	0,9040	-3,9205	–	-3,9205	-3,3498	0,9040	0
17	-1,8460	-6,7993	–	-6,7993	-6,2287	-1,8460	0
18	0,3631	-4,7190	–	-4,7190	-4,1483	0,3631	0
19	-0,8422	-6,0531	–	-6,0531	-5,4825	-0,8422	0
20	2,0675	-3,2722	–	-3,2722	-2,7016	2,0675	0
21	1,0485	-4,4201	–	-4,4201	-3,8494	1,0485	0
22	3,8240	-1,7733	–	-1,7733	-1,2027	3,8240	0
23	3,2798	-2,4463	–	-2,4463	-1,8757	3,2798	0
24	7,4544	1,5995	–	1,5995	2,1701	7,4544	0
25	7,6442	Сумма		-13,6956	0	6,1871	1,4571
26	11,1731					9,9034	1,2697
27	12,6848					9,7104	2,9744
28	15,6457					12,614	3,0317
Сумма квадратов						952,3744	43,5456

Среднеквадратическая ошибка модели равна 0,041474 или 4,15%. Однако уровень этого показателя говорит лишь о том, что модель строится на данных, вмещающих в себя чуть больше одного периода (рис. 3.5). Если бы точек было 24, ошибка

была бы нулевой. Именно по этой причине, в некоторых программных продуктах не допустима реализация описываемого метода при объеме данных меньшем, чем за два полных сезона. Ошибка, рассчитанная по восьми повторяющимся точкам, будет равна 6,42%.

Строим окончательный прогноз. Для этого предлагается использовать процедуру экспоненциального сглаживания [13]:

$$F_t^{i\delta} = \alpha F_{t-1}^{\delta} + (1 - \alpha) F_t^i, \quad (3.18)$$

где  $F_t^{i\delta}$  – прогноз;  $F_{t-1}^{\delta}$  – фактическое значение в предыдущем аналогичном сезоне;  $F_t^i$  – значение модели;  $\alpha$  – константа сглаживания.

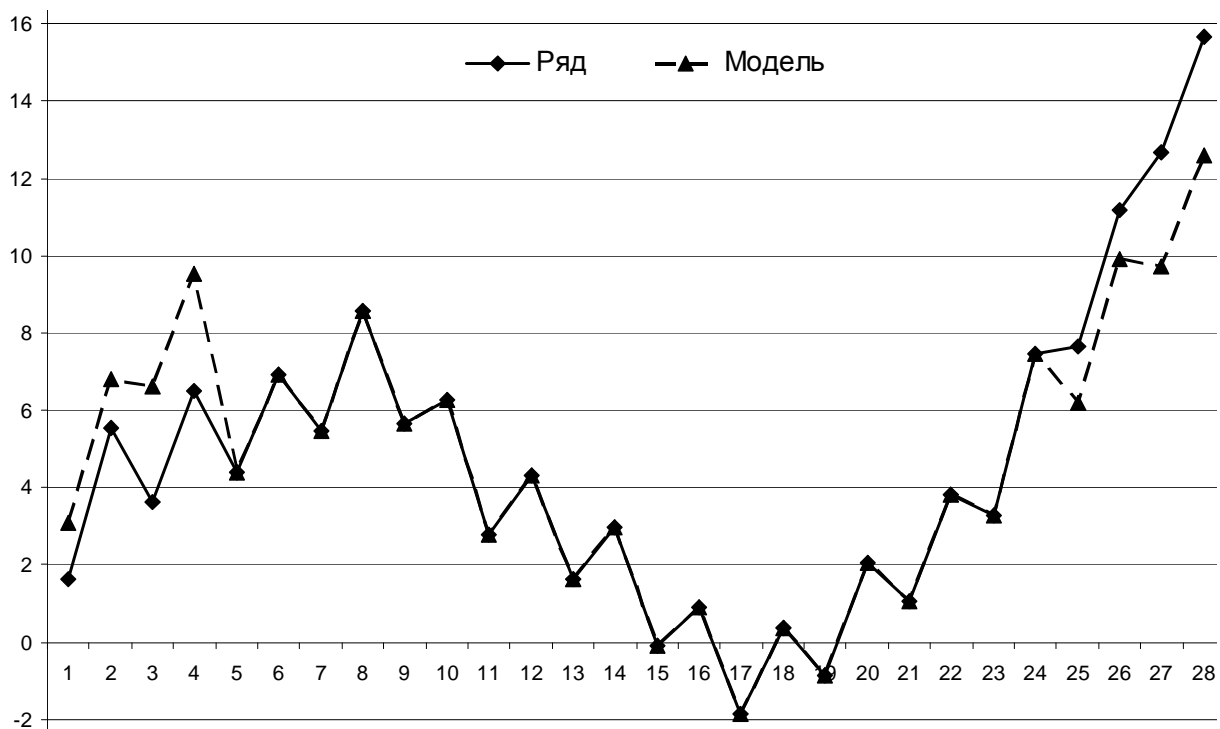


Рис. 3.5. Адекватность модели с линейным трендом

Таким образом, прогноз на 29-й интервал определяется следующим образом.

Определяем прогнозное значение модели:

$$F_{29}^i = 0,1288 \cdot 29 + 2,1931 + 1,5392 \pm 6,42\% = 7,4674 \pm 0,4794. \quad (3.19)$$

Фактическое значение в предыдущем аналогичном сезоне составило

$$F_5^{\hat{o}} = 4,3762. \quad (3.20)$$

Примем константу сглаживания  $\alpha = 0,2$ . Получим прогнозное значение:

$$F_{29}^{i\hat{o}} = 0,2 \cdot F_5^{\hat{o}} + (1-0,2)F_{29}^i = 0,2 \cdot 4,3762 + (1-0,2)(7,4674 \pm 0,4794) = 6,8492 \pm 0,3835. \quad (3.21)$$

Аналогичным образом определим прогнозы на 23 будущих периода (рис. 3.6). Качество прогноза неудовлетворительное, что выражается, во-первых, в высоком темпе нарастания ошибки, а во-вторых, в наличии значительного разрыва исходного ряда и первого прогнозного значения (29-я точка).

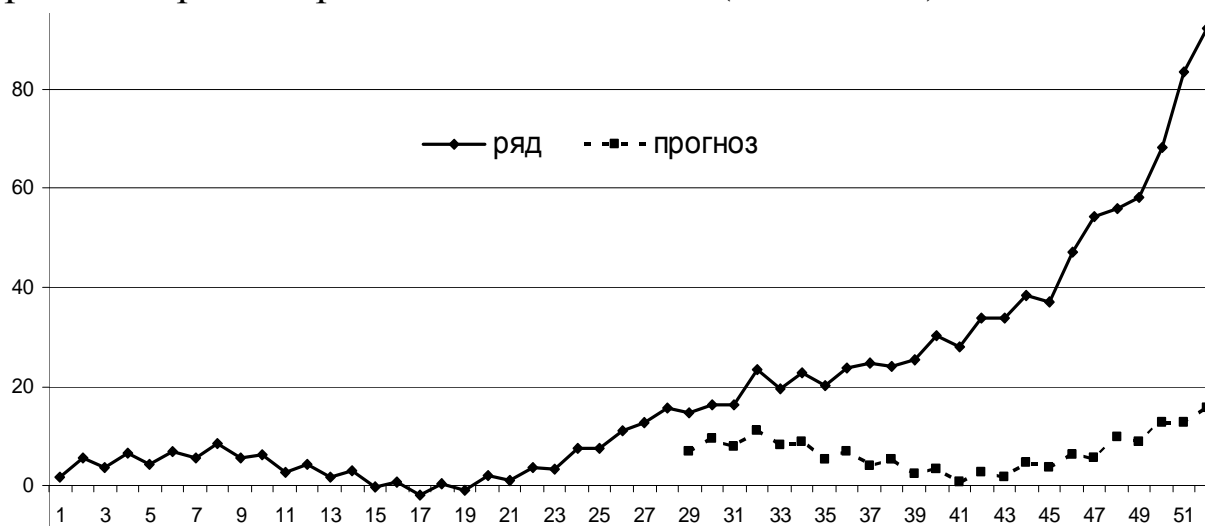


Рис. 3.6. Прогноз на сезон на основе модели с линейным трендом

Аналогичным методом построим модель с экспоненциальным трендом. Его уравнение примет вид:

$$T = 4,8761 \cdot e^{0,0028t} - 1,0185. \quad (3.22)$$

Как видно из рис. 3.8, прогноз на основе модели с экспоненциальным трендом, найденным с помощью MS Excel, еще менее точен, чем с линейным.

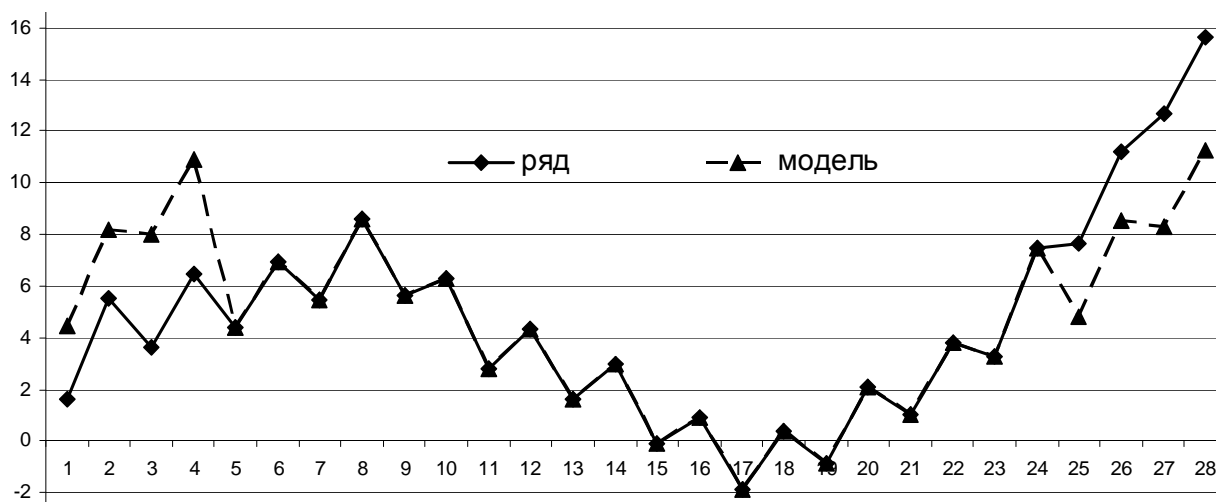


Рис. 3.7. Адекватность модели с экспоненциальным трендом

Таким образом, можно убедиться, что при отсутствии информации о точном значении периода сезонности и малой длине ряда, модель прогнозирования Тейла-Вейджа обладает низкой точностью и становится практически неприменимой.

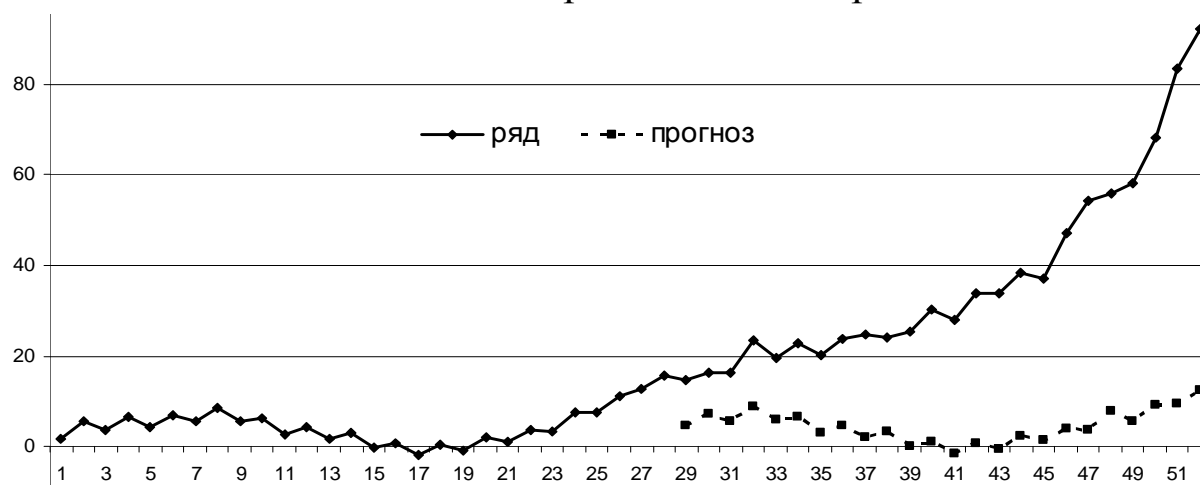


Рис. 3.8. Прогноз на сезон на основе модели с экспоненциальным трендом

Воспользуемся теперь программным продуктом CaterpillarSSA 3.40, реализующим метод «Гусеница»-SSA. В ходе анализа исходного ряда получено указанное на рис. 3.9 расположение корней характеристического полинома линейной рекуррентной формулы.

Руководствуясь основными рекомендациями метода «Гу-сеница»-SSA, предположим, что три корня, находящихся в правой части рис. 3.9 (обведены кружками), можно отнести к группе так называемых главных корней, т.е. характеризующих реальную динамику процесса. Причем корень на вещественной оси соответствует медленно меняющейся составляющей ряда, а пара комплексных корней, ближайших к точке  $(1;0)$  и лежащих на единичной окружности – гармонической составляющей с наименьшей частотой [9].

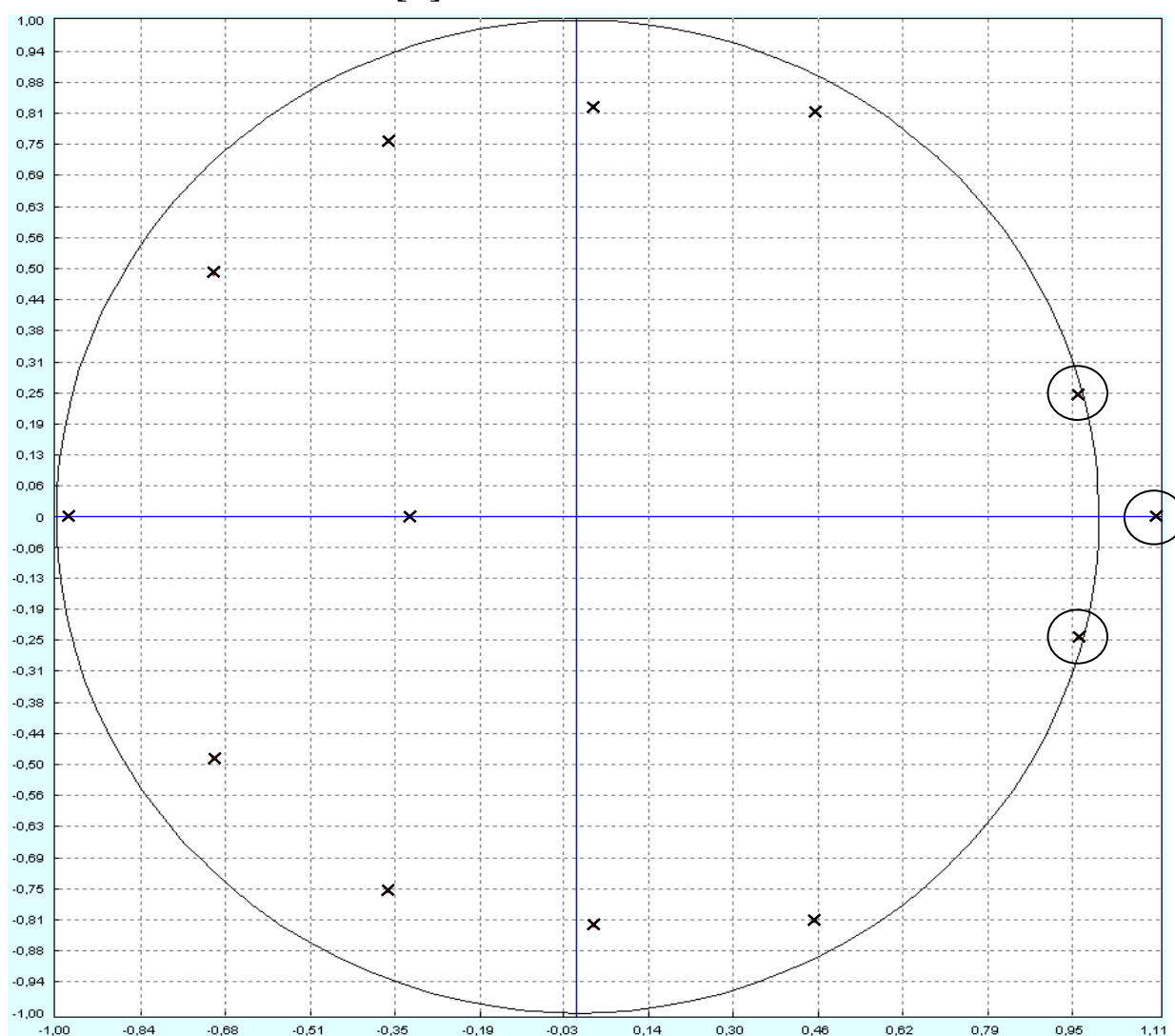


Рис. 3.9. Расположение корней характеристического полинома

Значение частоты этой гармоники используем для опреде-

ления периода сезонности:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}, \quad (3.23)$$

$$l = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}} = \frac{2\pi}{\operatorname{arctg} \frac{0,24606}{0,96786}} = 25,2379. \quad (3.24)$$

Для определения параметров тренда используем координаты вещественного корня:

$$\beta = \ln(\operatorname{Re}) = \ln(1,10076) = 0,096, \quad (3.25)$$

$$T = Ce^{\beta t} = e^{0,096t}. \quad (3.26)$$

Воспользуемся полученными частотными оценками и повторим описанную процедуру построения аддитивной модели (рис. 3.10, 3.11).

$$l = 25, T = e^{0,096t} - 0,92998. \quad (3.27)$$

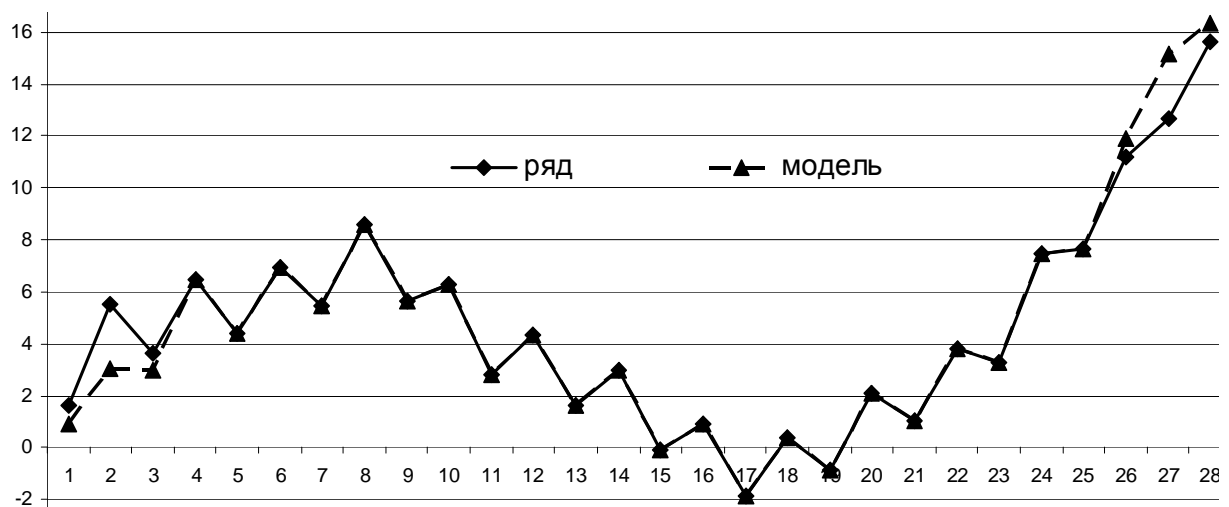


Рис. 3.10. Адекватность модели с частотными параметрами, полученными методом «Гусеница»-SSA

При этом среднеквадратическая ошибка, рассчитанная по шести повторяющимся точкам, составила 2,21%.

Ошибка прогноза существенно уменьшилась, разрыв между первым прогнозом и значением ряда отсутствует, что говорит об удовлетворительной степени адекватности предложен-

ного подхода. Учитывая, что значение внутреннего параметра экспоненциального сглаживания  $\alpha$  было выбрано неоптимальным, возможно добиться большей точности прогноза, воспользовавшись поисковыми настроечными процедурами.

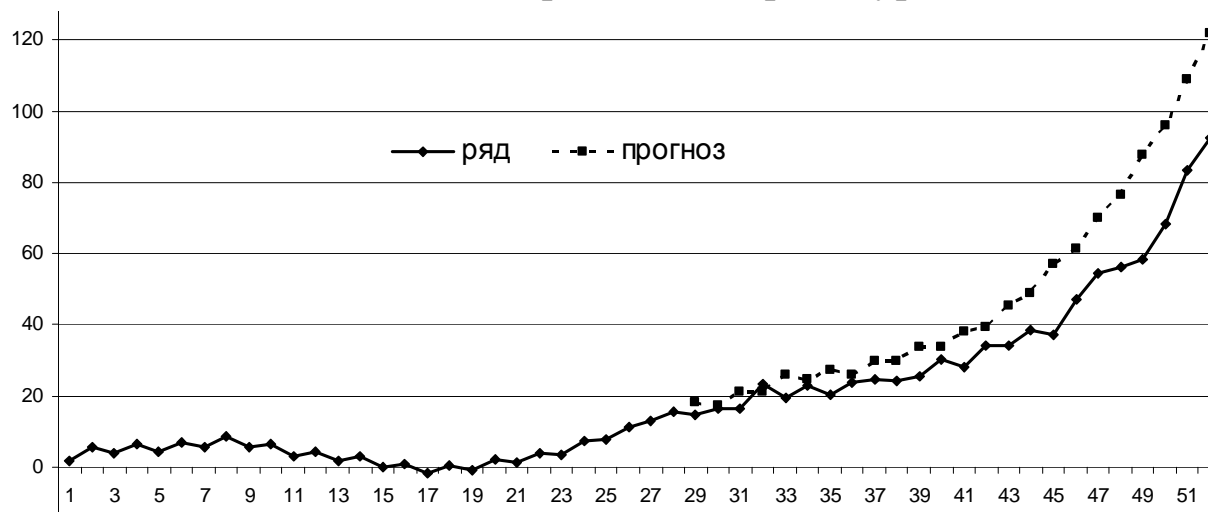


Рис. 3.11. Прогноз на сезон на основе смешанной модели

**Выводы.** В результате решения задачи краткосрочного прогнозирования процесса с сезонной динамикой были получены следующие результаты:

1) длина ряда менее двух полных периодов сезонности служит препятствием для корректного использования любого из рассматриваемых методов прогнозирования;

2) метод «Гусеница»-SSA позволяет определять значение периода сезонности с высокой точностью даже в зашумленных рядах (в модельном примере максимальный уровень шума – 10%, погрешность определения частоты основной гармоники – менее 1%);

3) кроме периода сезонности, целесообразно также определять методом «Гусеница»-SSA параметры тренда;

4) точность смешанного подхода, основанного на идентификации частотных характеристик и передаче их из модели «Гусеница»-SSA в модель Тейла-Вейджа, выше точности этих методов, используемых по отдельности.

### 3.4. Синтез смешанных прогнозных моделей коротких временных рядов

Рассмотрим ряд длиной  $l$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_l). \quad (3.28)$$

В некоторых задачах краткосрочного прогнозирования возникает необходимость разделения исходного ряда на медленно меняющиеся и гармонические составляющие.

Опишем возможности применения для решения этих задач метода «Гусеница»-SSA. Этот современный метод для анализа и прогнозирования временных рядов путем сингулярного разложения исходного ряда на компоненты позволяет оценивать структуру ряда, выявлять тенденции и особенности ряда. Особенностью метода, несмотря на его строгость и формализованность, является его интерактивность. Она проявляется например при анализе корней характеристического полинома (ХП) линейной рекуррентной формулы (ЛРФ), которая является одним из результатов применения метода «Гусеница»-SSA и представляет собой модель исходного ряда. Приведем зависимость расположения корней ХП ЛРФ от формы исходного модельного ряда (табл. 3.2).

Таким образом, любой бесконечный ряд, удовлетворяющий линейной рекуррентной формуле конечного порядка, является суммой произведений экспонент, полиномов и гармоник.

В ходе использования метода «Гусеница»-SSA перед пользователем стоит задача разделения корней на главные и побочные, т.е. выделения полезных составляющих ряда и шумов. При анализе коротких рядов (когда в исходном ряду менее двух периодов основной низкочастотной составляющей) задача разделения корней становится еще более критичной в силу малой длины ряда и, как следствие, искажения действительного расположения корней.

Таблица 3.2

## Расположение корней ХП ЛРФ для модельных рядов

Форма модельного ряда	Расположение корней
константа $F = C$	один корень $(\text{Re}, \text{Im})=(1, 0)$
полином n-ой степени $F = C_0 + C_1 t + \dots + C_n t^n$	n совпадающих корней $(\text{Re}, \text{Im})=(1, 0)$
синусоида $F = C \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi)$	два комплексно-сопряженных корня $\text{tg} \omega = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}, T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{Re}^2 + \text{Im}^2 = 1$
экспонента $F = C \cdot e^{\alpha t}$	один корень $(\text{Re}, \text{Im})=(\text{Re}, 0)$ $\alpha = \ln(\text{Re}), \text{Re} > 1$ – растет, $\text{Re} < 1$ – убывает
произведение полинома и синусоиды $F = (C_0 + C_1 t + \dots + C_n t^n) \text{Sin}(\omega t + \varphi)$	n совпадающих комплексно-сопряженных корней $\text{tg} \omega = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}, T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{Re}^2 + \text{Im}^2 = 1$
произведение полинома и экспоненты $F = (C_0 + C_1 t + \dots + C_n t^n) e^{\alpha t}$	n совпадающих корней $(\text{Re}, \text{Im})=(\text{Re}, 0)$ $\alpha = \ln(\text{Re}), \text{Re} > 1$ – растет, $\text{Re} < 1$ – убывает
произведение экспоненты и синусоиды $F = e^{\alpha t} \text{Sin}(\omega t + \varphi)$	два комплексно-сопряженных корня $\text{tg} \omega = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}, T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{Re}^2 + \text{Im}^2 = \ln(\text{Re})$
произведение полинома, экспоненты и синусоиды $F = (C_0 + C_1 t + \dots + C_n t^n) e^{\alpha t} \text{Sin}(\omega t + \varphi)$	n совпадающих комплексно-сопряженных корней $\text{tg} \omega = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}, T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{Re}^2 + \text{Im}^2 = \ln(\text{Re})$

Дадим некоторые рекомендации для анализа корней методом «Гусеница»-SSA коротких временных рядов.

Пусть значимыми для исследователя являются компоненты, степень уменьшения (роста) которых не превышает  $m$ , а также гармонические составляющие, период которых укладывается в длину ряда не более  $k$  раз:

$$\frac{f_1^{(i)}}{f_l^{(i)}} \leq m, \quad \frac{f_l^{(j)}}{f_1^{(j)}} \leq m, \quad (3.29)$$

$$\frac{l}{T^{(i)}} \leq k, \quad (3.30)$$

где  $f_1^{(i)}, f_l^{(i)}$  и  $f_1^{(j)}, f_l^{(j)}$  – первые и последние значения  $i$ -ой и  $j$ -ой компоненты ряда,  $T^{(i)}$  – период  $i$ -ой компоненты ряда.

Рассмотрим область на комплексной плоскости, где расположены корни  $\lambda_i$  ХП ЛРФ, соответствующие условиям (3.29, 3.30) (рис. 3.12).

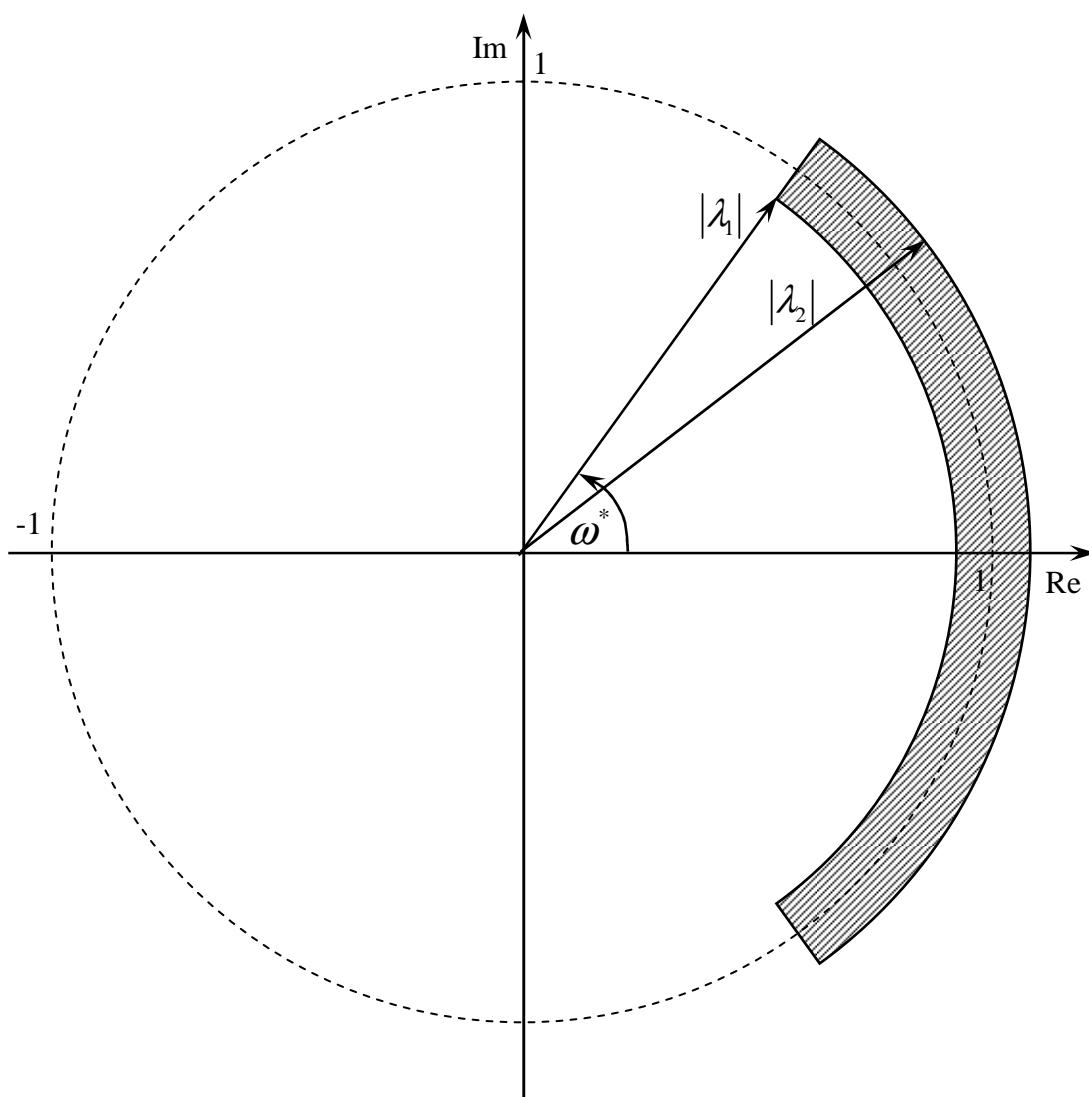


Рис 3.12. Область расположения главных корней ХП ЛРФ на комплексной плоскости

$$\frac{C e^{\ln|\lambda_1| \cdot t}}{C e^{\ln|\lambda_1| \cdot (t+l-1)}} = m, \quad (3.31)$$

$$e^{\ln|\lambda_1|(1-l)} = m, \quad (3.32)$$

$$\ln|\lambda_1| \cdot (1-l) = \ln m, \quad (3.33)$$

$$\ln|\lambda_1| = \frac{\ln m}{1-l}, \quad (3.34)$$

$$|\lambda_1| = e^{\frac{\ln m}{1-l}}, \quad (3.35)$$

$$|\lambda_2| = e^{\frac{\ln m}{l-1}}, \quad (3.36)$$

$$\omega^* = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)} = \frac{2\pi k}{l}. \quad (3.37)$$

### 3.5. Применение средств сингулярного анализа в задачах виброакустической диагностики авиационных двигателей

При производстве, испытании и эксплуатации авиационных двигателей возникают задачи по выявлению источников и причин появления вибраций. В современных условиях они решаются путем измерения уровня шума и вибраций на разных режимах работы двигателя с последующим анализом измеренных сигналов. Особенностью этих задач является высокая частота съема и записи сигнала (около 11 кГц), большой объем выборки (длина временного ряда измеряется сотнями тысяч точек), а также заранее неизвестный уровень зашумленности сигнала. При анализе вибрационных характеристик двигателей традиционно используется разложение сигналов в ряд Фурье. Однако, наряду с традиционными методами анализа перспективным является современный интерактивный метод анализа «Гусеница»-SSA. Так, например, программное средство CaterpillarSSA 3.30 реализует следующие возможности:

- удобное графическое представление для интерактивной идентификации собственных троек, соответствующих тренду,

периодическим (циклическим) компонентам и шуму;

- восстановление (извлечение) компонент временного ряда выбором собственных троек;

- возможность периодограммного анализа временных рядов;

- аппроксимация (локальная и глобальная) временного ряда рядом, управляемым ЛРФ;

- возможность анализа рекуррентной формулы, используемой для прогноза;

- обнаружение разладки путем сравнения структуры, обнаруженной методом «Гусеница»-SSA на базовом и тестовом участках.

В ходе виброанализа двухвального ГТД Д-136 с помощью этого метода были выявлены следующие особенности:

- большая длина ряда (около 800000 точек) не позволяет использовать теоретически оптимальные настройки метода, тем самым вызывает необходимость разработки обоснованной стратегии анализа ряда (например, разделение на фрагменты, анализ с использованием разной длины окна и т.п.);

- «Гусеница»-SSA, в отличие от метода Фурье позволяет выявить фрагменты с высоким уровнем зашумленности (сбои в процессе измерения, наложения сигналов на переходных режимах и т.д.);

- на этапе анализа корней ЛРФ, управляющей рядом, возможна оценка степени затухания гармонических составляющих, что позволяет диагностировать состояние некоторых узлов и агрегатов (старение, износ и т.п.);

- в случае единичных пропусков во временном ряду данных, метод «Гусеница»-SSA позволяет с достаточно высокой точностью восстанавливать пропущенные значения сигнала;

- форма представления результатов анализа обладает боль-

шей информативностью, чем традиционный спектральный анализ;

– сравнение данных анализа, полученных для одного и того же двигателя (агрегата) с различным остаточным ресурсом позволяет производить диагностику по техническому состоянию с прогнозированием тенденций выработки его узлов и деталей, идентифицируемых по их характерным частотам и амплитудам.

*Пример.*

Исследуем вибросигнал, снимаемый с двухвального двигателя Д-136 с частотой 11025 Гц. Параметры двигателя представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Параметры двухвального двигателя Д-136

<b>Параметр</b>	<b>Значение</b>
<b>1</b>	<b>2</b>
Дискретизация	11025 Гц
Количество роторов	2
Частота вращения ротора НД	11000 об/мин
Частота вращения ротора ВД	13600 об/мин
Привод агрегатов	от ротора ВД
Число ступеней компрессора ротора НД	6
Число ступеней турбины ротора НД	1
Число ступеней компрессора ротора ВД	7
Число ступеней турбины ротора ВД	1
Число подшипников ротора НД	2
Число подшипников ротора ВД	2

<b>1</b>	<b>2</b>
Количество лопаток компрессора ротора НД по ступеням:	
1 ступень	27
2 ступень	29
3 ступень	34
4 ступень	37
5 ступень	41
6 ступень	57
Количество лопаток турбины ротора НД по ступеням:	
1 ступень	69
Количество лопаток компрессора ротора ВД по ступеням:	
1 ступень	69
2 ступень	74
3 ступень	77
4 ступень	81
5 ступень	87
6 ступень	92
7 ступень	95
Количество лопаток турбины ротора ВД по ступеням:	
1 ступень	110
Число тел качения подшипников ротора НД:	
Первый подшипник	18 шариков, виброскорость = 6 мм/с
Второй подшипник	24 ролика, виброскорость = 7 мм/с
Число тел качения подшипников ротора ВД:	
Первый подшипник	18 шариков, виброскорость = 5 мм/с
Второй подшипник	24 ролика, виброскорость = 6 мм/с
Число зубьев шестерни привода	60, виброскорость = 5 мм/с

После дискретизации файла получим временной ряд длиной 73629 точек. Проанализируем некоторые вычислительные аспекты процедуры разложения ряда большой длины, например, зависимость между длиной окна и временем разложения ряда на компоненты методом «Гусеница»-SSA (табл.3.4, рис. 3.13).

Разложение осуществляем с помощью программы CaterpillarSSA 3.40 Standard F Edition (характеристики ЭВМ: процессор AMD Athlon II X2 250 3,01 ГГц, 2 Гб ОЗУ). Параметры разложения: центрирование – нет, точность разложения –  $10^{-6}$ , метод вычисления собственных векторов – Lapack.

Полученная зависимость хорошо аппроксимируется степенной функцией (рис.3.14):

$$T = 0.3838L^{1.9887},$$

где  $L$  – длина окна,  $T$  – время разложения в миллисекундах.

Проанализируем зависимость времени разложения временного ряда при фиксированной длине окна ( $L=300$ ) от степени прореживания ряда (табл.3.5, рис. 3.15).

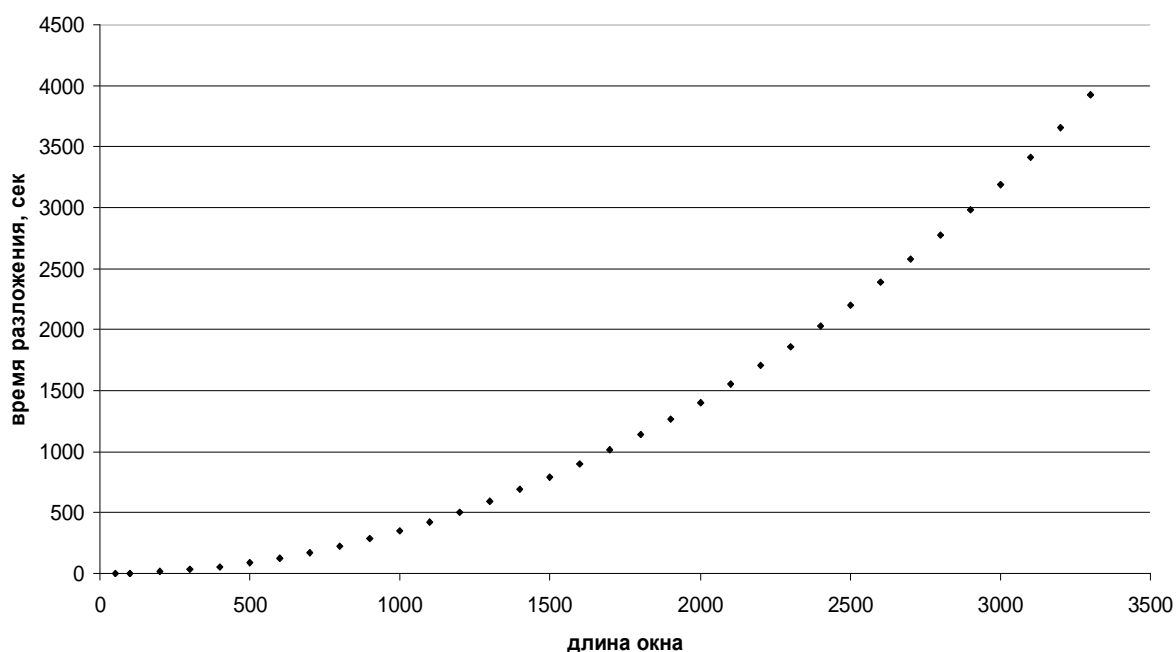


Рис. 3.13. Зависимость между длиной окна и временем разложения ряда на компоненты

Таблица 3.4

Зависимость между длиной окна и временем разложения ряда  
на компоненты

Длина окна	Время разложения	
	сек	мин
50	0,969	0,01615
100	3,672	0,0612
200	14,265	0,23775
300	31,859	0,530983
400	56,422	0,940367
500	88,125	1,46875
600	126,688	2,111467
700	172,532	2,875533
800	225,453	3,75755
900	285,485	4,758083
1000	352,703	5,878383
1100	426,109	7,101817
1200	506,235	8,43725
1300	593,641	9,894017
1400	688,25	11,47083
1500	789,203	13,15338
1600	898,469	14,97448
1700	1014,281	16,90468
1800	1136,89	18,94817
1900	1267,297	21,12162
2000	1405,609	23,42682
2100	1550,078	25,83463
2200	1702,343	28,37238
2300	1862,75	31,04583
2400	2031,437	33,85728
2500	2204,422	36,74037
2600	2385,984	39,7664
2700	2577,422	42,95703
2800	2772,657	46,21095
2900	2978,469	49,64115
3000	3191,875	53,19792
3100	3412,25	56,87083
3200	3652,141	60,86902
3300	3924,156	65,4026
3400...	out of memory	

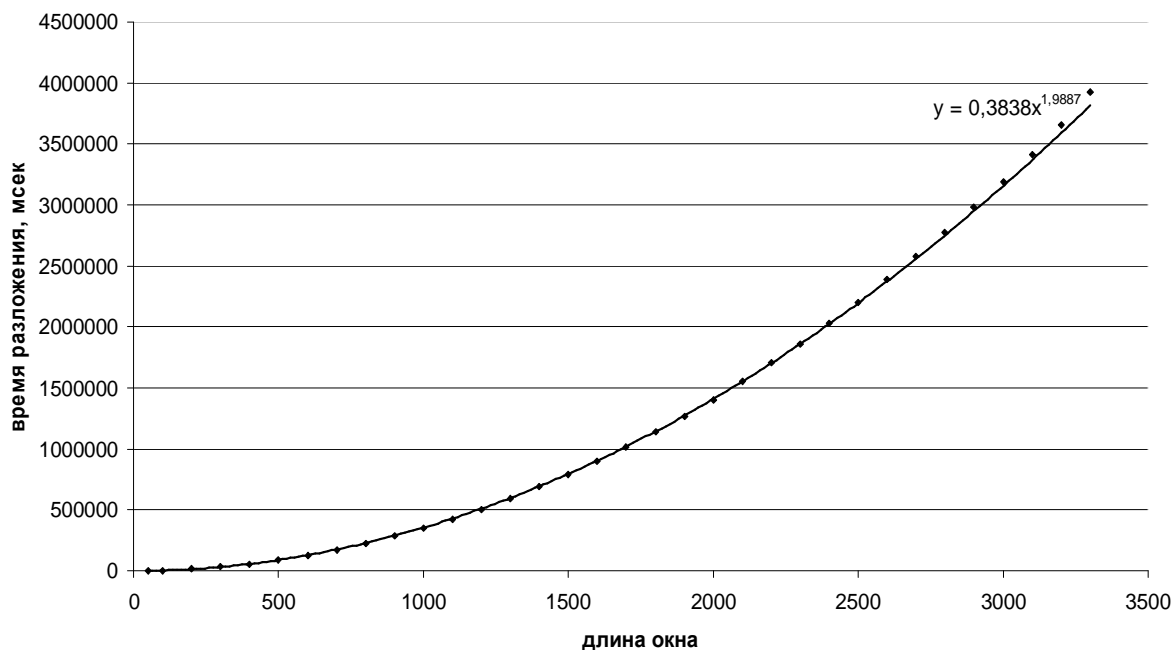


Рис. 3.14. Аппроксимация зависимости между длиной окна и временем разложения ряда на компоненты степенной функцией

Таблица 3.5

Зависимость времени разложения временного ряда от степени прореживания

Длина ряда	Время разложения, мсек
73629	31859
36565	15860
18133	8031
8917	4031
4309	2094
2005	1157
853	672

Зависимость линейная:

$$T = 257,27 + 0,4287N,$$

где  $N$  – длина ряда,  $T$  – время разложения в миллисекундах.

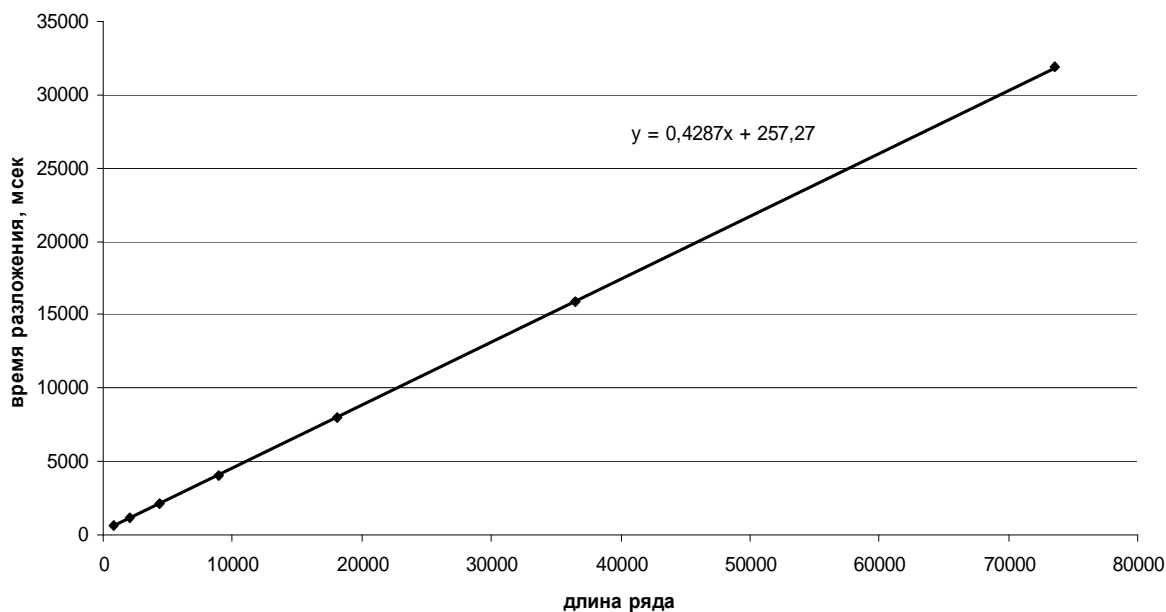


Рис. 3.15. Аппроксимация зависимости времени разложения временного ряда от степени прореживания линейной функцией

Анализируя вычислительные особенности метода, а также его программной реализации можно сделать следующие выводы:

1. Применение вычислительных процедур метода «Гусеница»-SSA к сверхдлинным рядам напрямую невозможно, а следовательно, необходима методология анализа таких рядов с применением имеющихся программных средств.

2. Средства метода «Гусеница»-SSA позволяют генерировать более разностороннюю информацию об исследуемом процессе по сравнению с классическими подходами (например, разложением в ряд Фурье).

3. Интерактивность метода «Гусеница»-SSA становится определяющей при принятии решений относительно пути анализа динамики сложных систем в силу возможности исключения методологических искажений, полученных полностью автоматическими процедурами.

### 3.6. Синтез интервальной линейной рекуррентной модели сверхдлинного временного ряда

В ряде практических задач возникает необходимость анализа сверхдлинных временных рядов, характеризующих динамические процессы разной природы. Под сверхдлинным будем понимать временной ряд, содержащий более  $10^5$  значений. Предполагается, что ряд характеризуется различного рода зашумленностью.

Анализ таких временных рядов является сложной задачей в силу нескольких причин: во-первых, классические подходы практически неприемлемы в виду большой длины ряда и разного уровня зашумленности; во-вторых, не существует универсальных методов декомпозиции ряда на фрагменты, к которым могут быть применены проверенные методы анализа.

Тем не менее, многие инженерные проблемы требуют от исследователя разработки обоснованных методик анализа сверхдлинных рядов с целью выявления внутренних закономерностей процессов, выделения полезных составляющих и шума, а также синтеза аналитических моделей, необходимых для прогнозирования.

В связи с этим рассмотрим возможности применения подхода «Гусеница»-SSA, который представляет собой интерактивный метод разделения рядов на составляющие, что позволяет синтезировать линейную рекуррентную формулу, управляющую временным рядом.

Учитывая тот факт, что ряд в целом, а, следовательно, и его фрагменты, искажены различного рода шумами, одним из ключевых моментов в интерактивном методе «Гусеница»-SSA является разделение корней характеристического полинома на главные (полезные составляющие) и побочные (шумы). Отметим, что раз-

деление корней на группы является во многом субъективным процессом, а потому неоднозначным. Его результат зависит от исследуемого процесса, объема и характера априорной информации, а также конкретной задачи исследования.

*Постановка задачи.* Необходимо синтезировать интервальную модель сверхдлинного временного ряда  $F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$  с  $N > 10^5$ , учитывающую неопределенность, связанную с различным уровнем зашумленности фрагментов ряда.



Рис. 3.16. Процедура синтеза интервальной модели сверхдлинного временного ряда

Предлагаемая процедура синтеза состоит из нескольких этапов, представленных на рис.3.16. Рассмотрим эти этапы подробнее.

*Этап 1. Анализ априорной информации.*

При моделировании многих процессов априорная информация может быть доступна исследователю и представлять собой гипотезы и предположения об истинном характере процесса (например, характеристики периодических составляющих или тренда). Очевидно, что наличие такого рода информации может облегчить процесс моделирования, в ходе которого существующие гипотезы о характере процесса либо найдут подтверждение, либо будут опровергнуты. Естественным желанием исследователя является стремление к наращиванию объема и качества подобной информации. Однако, в случае обработки и анализа сверхдлинных временных рядов, действительные закономерности наблюдаемого процесса могут оказаться намного сложнее предположений исследователя.

Число «полезных» гармонических составляющих может оказаться больше предполагаемого, их характеристики, как и характеристики тренда, могут отличаться от предполагаемых [14]. Даже при полном отсутствии априорной информации процесс моделирования может быть осуществлен, хотя при этом большее внимание должно быть уделено достоверности модели.

Отдельным вопросом является предполагаемый уровень зашумленности или искажения исходных данных. Лишь в редких случаях исследователю может быть известен заранее характер и уровень зашумленности. Ситуацию усложняет тот факт, что учитывая длину ряда, уровень зашумленности его фрагментов может оказаться различным.

В любом случае, интерактивность, заложенная в методе «Гусеница»-SSA, делает процесс моделирования итерационным,

что позволяет различным образом использовать априорную информацию.

### *Этап 2. Декомпозиция ряда.*

Исследование предлагается начинать с изучения периодограммы ряда. По ней можно сделать предварительный вывод о том, сколько периодических составляющих (гармоник) отнести к полезным, т.е. предварительно оценить размерность ЛРФ. Предполагаемое число полезных гармоник позволит обоснованно выбрать длину окна  $L$ . Несмотря на то, что процедура декомпозиции исходного ряда субъективна и многовариантна, можно сформулировать некоторые рекомендации по ее реализации:

- длина фрагмента должна превышать удвоенную длину окна  $2L$ , что обеспечит достаточную степень делимости ряда;
- фрагменты могут быть разной длины, при этом длина окна  $L$  при анализе всех фрагментов должна быть одинаковой;
- фрагменты могут пересекаться, т.е. иметь общие участки, при таком же условии, как и в предыдущем пункте;
- если априорная информация содержит предположения о различном уровне зашумленности, то декомпозиция должна соответствовать этим предположениям.

### *Этап 3. Анализ фрагментов.*

Анализ каждого фрагмента исходного ряда осуществляется методом «Гусеница»-SSA, в ходе которого выявляются главные компоненты по корням характеристического полинома. Длина окна  $L$  при этом должна как минимум вдвое превышать число предполагаемых основных гармоник (т.к. гармонике соответствует пара комплексно-сопряженных корней). К главным корням, как правило, следуют относить те, что расположены максимально близко к единичной окружности (пары корней, соответствующие незатухающим гармоникам) и к вещественной оси комплексной плоскости (корни, соответствующие тренду).

*Этап 4. Проверка совпадения корневых портретов фрагментов.*

Корневым портретом фрагмента ряда будем называть положение главных корней на комплексной плоскости. Таким образом, на предыдущем этапе получены  $M$  в общем случае различных корневых портретов, которые и подлежат сравнению. Полное совпадение корневых портретов фрагментов означает, что все фрагменты ряда полностью отражают общие тенденции процесса. Модель ряда может быть представлена в виде ЛРФ с детерминированными коэффициентами и нет необходимости в интервальном представлении. В обратном случае – переход к следующему этапу.

*Этап 5. Интервальная аппроксимация расположения главных корней.*

Учитывая, что большинство процессов можно физически представить в виде суммы гармонических составляющих и тренда, общую картину расположения корней можно рассматривать как наложение корневых портретов выделяемых составляющих (т.е. гармоник и тренда). При этом каждой гармонической составляющей согласно табл. 3.2 будет соответствовать пара комплексно-сопряженных корней в области единичной окружности, а составляющим, характеризующим тренд – вещественные или близкие к ним корни в области точки комплексной плоскости с координатами  $(Re, Im) = (1, 0)$ .

Учитывая тот факт, что выделение тренда приводит к необходимости анализа гармонической составляющей ряда, для определенности будем вести речь о ряде с уже выделенным трендом. Следовательно, предлагаемая процедура интервальной аппроксимации применима только для комплексных корней.

На этапе 3 было получено  $M$  наборов из  $\frac{d}{2}$  пар комплекс-

но-сопряженных корней, найденных путем разложения фрагментов исходного ряда на составляющие методом «Гусеница»-SSA, и характеризующих  $\frac{d}{2}$  простейших осцилляторов (гармонических составляющих процесса, описываемого измеряемой величиной). Рассмотрим положение одной пары комплексно-сопряженных корней для каждого из фрагментов:

$$\lambda_{1,2}^{(i)} = a^{(i)} \pm jb^{(i)}, \quad j^2 = -1, \quad (3.38)$$

где  $i = \overline{1, M}$  – порядковый номер фрагмента.

Аппроксимируем набор комплексно-сопряженных корней (3.38) двумя симметричными относительно вещественной оси прямоугольниками, как показано на рис. 3.17.

$$\lambda_{1,2} = [a] \pm j[b], \quad (3.39)$$

где  $[a] = [a_{min}, a_{max}]$ ,  $[b] = [b_{min}, b_{max}]$  – интервалы, причем

$$a_{min} = \min_{i=1}^M a_i, \quad a_{max} = \max_{i=1}^M a_i, \quad b_{min} = \min_{i=1}^M b_i, \quad b_{max} = \max_{i=1}^M b_i.$$

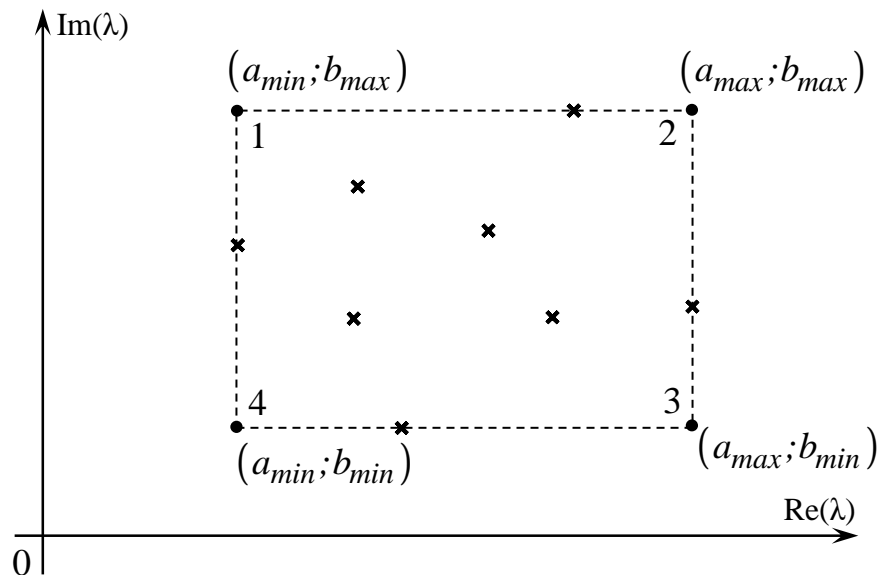


Рис. 3.17. Интервальная аппроксимация набора комплексно-сопряженных корней

*Этап 6. Синтез интервальных ЛРФ.*

Покажем, как неопределенность в положении пары главных комплексно-сопряженных корней может быть выражена в виде интервальной формы представления коэффициентов ЛРФ.

Восстановим по корням (3.39) соответствующий характеристический полином с интервальными коэффициентами, используя интервальную арифметику [15] и метод интервального дискриминанта [16].

Отыщем интервальные коэффициенты полинома

$$P(\lambda) = \lambda^2 + [c_1]\lambda + [c_2], \quad (3.40)$$

корни которого удовлетворяют (3.39). Здесь  $[c_1] = [(c_1)_{min}, (c_1)_{max}]$  и  $[c_2] = [(c_2)_{min}, (c_2)_{max}]$  – интервальные коэффициенты полинома.

Согласно [15], если полином вида (3.40) имеет только комплексные интервальные корни, то они могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}[c_1] \pm \frac{j}{2}\sqrt{-[D]} = & \left[ \frac{-(c_1)_{max}}{2}, \frac{-(c_1)_{min}}{2} \right] \pm \\ & \pm j \left[ \frac{\sqrt{-D_{max}}}{2}, \frac{\sqrt{-D_{min}}}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

где  $[D] = [D_{min}, D_{max}] = [c_1]^2 - 4[c_2]$  – интервальный дискриминант, в рассматриваемом случае строго отрицательный.

Приравнивая правые части (3.39) и (3.41), получим

$$[a] \pm j[b] = -\frac{1}{2}[c_1] \pm \frac{j}{2}\sqrt{-[D]},$$

откуда

$$[c_1] = [(c_1)_{min}, (c_1)_{max}] = -2[a] = [-2a_{max}, -2a_{min}], \quad (3.42)$$

$$[D] = -(2[b])^2. \quad (3.43)$$

Подставляя в (3.43) выражение для интервального дискри-

минанта, получим

$$[D] = [D_{min}, D_{max}] = [c_1]^2 - 4[c_2] = -(2[b])^2, \quad (3.44)$$

или с учетом (3.42)

$$4[a]^2 - 4[c_2] = -(2[b])^2. \quad (3.45)$$

Перепишем (3.45) для границ интервалов

$$[a_{min}, a_{max}]^2 - [(c_2)_{min}, (c_2)_{max}] = -[b_{min}, b_{max}]^2,$$

откуда

$$(a^2)_{min} - (c_2)_{max} = -(b^2)_{max},$$

$$(a^2)_{max} - (c_2)_{min} = -(b^2)_{min}.$$

Окончательно границы интервального коэффициента  $[c_2]$ :

$$\begin{aligned} [c_2] &= [(c_2)_{min}, (c_2)_{max}] = \\ &= \left[ (a^2)_{max} + (b^2)_{min}, (a^2)_{min} + (b^2)_{max} \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Таким образом, полином (3.40) с интервальными корнями (3.39) примет вид

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + [c_1]\lambda + [c_2] = \lambda^2 + \\ &+ \left[ -\frac{a_{max}}{2}, -\frac{a_{min}}{2} \right] \lambda + \left[ (a^2)_{max} + (b^2)_{min}, (a^2)_{min} + (b^2)_{max} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Отметим некоторые особенности полученного интервального полинома. Во-первых, особенности операций над символьными числами не позволяют получить его, используя теорему Виета, т.е.

$$P(\lambda) \neq (\lambda - [\lambda_1])(\lambda - [\lambda_2]),$$

так как при умножении  $[\lambda_1]$  на  $[\lambda_2]$  происходит расширение интервального коэффициента  $[c_2]$

$$[c_2^*] = [(c_2^*)_{min}, (c_2^*)_{max}] = \left[ (a^2)_{min} + (b^2)_{min}, (a^2)_{max} + (b^2)_{max} \right] \neq [c_2].$$

Тот же неприятный эффект появляется, если  $[c_2]$  попытаться

ся выразить из (3.45).

Еще одна особенность интервальных вычислений в данном случае проявляется в том, что при некоторых сочетаниях  $[a]$  и  $[b]$  в выражении (3.46) может оказаться, что  $(c_2)_{min} > (c_2)_{max}$ . Рассмотрим условие существования интервального коэффициента  $[c_2]$ :

$$(a^2)_{max} + (b^2)_{min} \leq (a^2)_{min} + (b^2)_{max}. \quad (3.48)$$

Рассмотрим ситуацию, когда  $[a] > 0$ , то есть вещественная часть пары корней положительна. Тогда прямоугольник, изображенный на рис. 3.17, целиком расположен в первом квадранте комплексной плоскости и выполняются равенства

$$\begin{aligned} (a^2)_{min} &= (a_{min})^2, & (a^2)_{max} &= (a_{max})^2, \\ (b^2)_{min} &= (b_{min})^2, & (b^2)_{max} &= (b_{max})^2. \end{aligned}$$

Тогда условие (3.48) примет вид

$$(a_{max})^2 + (b_{min})^2 \leq (a_{min})^2 + (b_{max})^2, \quad (3.49)$$

то есть расстояние от начала координат комплексной плоскости до точки 3 (рис. 3.17) должно быть не больше, чем до точки 1. В обратном случае корректное восстановление полинома с интервальными коэффициентами (3.40) по интервальным корням (3.39) не представляется возможным.

Условие (3.49) можно выразить через характеристики интервалов  $[a]$  и  $[b]$ :

$$\begin{aligned} (a_{max})^2 - (a_{min})^2 &\leq (b_{max})^2 - (b_{min})^2, \\ (a_{max} - a_{min})(a_{max} + a_{min}) &\leq (b_{max} - b_{min})(b_{max} + b_{min}), \\ mid[a] \cdot wid[a] &\leq mid[b] \cdot wid[b], \end{aligned} \quad (3.50)$$

где  $mid[a]$ ,  $mid[b]$  – середины интервалов  $[a]$  и  $[b]$ , а  $wid[a]$ ,  $wid[b]$  – ширина соответствующих интервалов.

В случае невыполнения условия (3.49) можно предложить аппроксимацию набора корней избыточной областью, как показано на рис. 3.18.

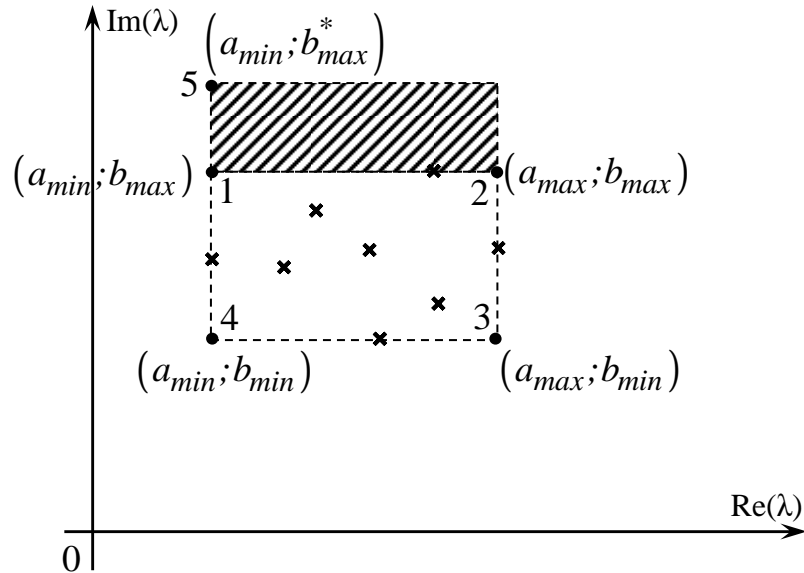


Рис. 3.18. Избыточная интервальная аппроксимация набора комплексно-сопряженных корней

Для прямоугольника с вершинами 1, 2, 3 и 4 на рис. 3.18 не выполняется условие (3.49). Дополним его заштрихованным прямоугольником так, чтобы расстояние от центра координат до точки 3 равнялось расстоянию до точки 5, то есть

$$(a_{max})^2 + (b_{min})^2 = (a_{min})^2 + (b_{max}^*)^2.$$

Отсюда

$$b_{max}^* = \sqrt{(a_{max})^2 + (b_{min})^2 - (a_{min})^2}.$$

В этом случае интервальная аппроксимация группы комплексно-сопряженных корней примет вид

$$\lambda_{1,2} = [a_{min}; a_{max}] \pm j[b_{min}; b_{max}^*], \quad (3.51)$$

что по сравнению с (3.39) отличается избыточностью (заштрихованная область на рис. 3.18), однако позволяет корректно восстановить полином (3.40). При этом интервальный коэффициент  $[c_2]$

имеет нулевую ширину, то есть детерминирован

$$\begin{aligned}
 [c_2] &= [(c_2)_{min}, (c_2)_{max}] = \\
 &= \left[ (a^2)_{max} + (b^2)_{min}, (a^2)_{min} + (b^2)_{max} \right] = \\
 &= \left[ (a_{max})^2 + (b_{min})^2, (a_{min})^2 + (b_{max}^*)^2 \right] = \\
 &= (a_{max})^2 + (b_{min})^2 = c_2.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Степень избыточности интервальной аппроксимации  $\Delta$  можно оценивать отношением высоты добавленной заштрихованной области (рис. 3.18) к общей высоте аппроксимирующего прямоугольника:

$$\Delta = \frac{b_{max}^* - b_{max}}{b_{max}^* - b_{min}} = \frac{\sqrt{(a_{max})^2 + (b_{min})^2} - (a_{min})^2 - b_{max}}{\sqrt{(a_{max})^2 + (b_{min})^2} - (a_{min})^2 - b_{min}}. \tag{3.53}$$

Таким образом, для каждой гармонической составляющей исходного ряда может быть получен характеристический полином с интервальными коэффициентами вида

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \sum_{k=1}^2 [a_k] \lambda^{2-k} = \lambda^2 + [c_1] \lambda + [c_2],$$

а, следовательно, и ЛРФ с интервальными коэффициентами

$$f_{i+2} = \sum_{k=1}^2 [a_k] f_{i+2-k},$$

причем  $[a_1] = -[c_1]$ ,  $[a_2] = -[c_2]$ .

*Этап 7. Синтез интервальной модели восстановленного ряда.*

Получив на предыдущем этапе для каждой гармонической составляющей исходного ряда ЛРФ с интервальными коэффициентами, можем записать общую модель ряда с интервальными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
f_{i+2}^{(1)} &= \sum_{k=1}^2 [a_k^{(1)}] f_{i+2-k}^{(1)}, \\
f_{i+2}^{(2)} &= \sum_{k=1}^2 [a_k^{(2)}] f_{i+2-k}^{(2)}, \\
&\dots \\
f_{i+2}^{(d/2)} &= \sum_{k=1}^2 [a_k^{(d/2)}] f_{i+2-k}^{(d/2)},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

где  $d$  – количество главных комплексно-сопряженных корней в процессе разложения ряда методом «Гусеница»-SSA.

Каждая строка модели (3.54)

$$f_{i+2}^{(j)} = \sum_{k=1}^2 [a_k^{(j)}] f_{i+2-k}^{(j)}$$

позволяет получать рекуррентное продолжение  $j$ -ой гармонической составляющей, а их сумма

$$\sum_{j=1}^{d/2} f_{i+2}^{(j)} = \sum_{j=1}^{d/2} \sum_{k=1}^2 [a_k^{(j)}] f_{i+2-k}^{(j)}$$

представляет собой не что иное, как прогноз значений восстановленного ряда.

**Пример.** Исследуем вибросигнал, снятый с двухвального двигателя Д-136 с частотой 11025 Гц. Временной ряд, соответствующий сигналу, имеет 73728 равноотстоящих моментов измерения и является гармоническим (фрагмент ряда представлен на рис. 3.19).

Разбив ряд на 10 фрагментов одинаковой длины, получены 10 корневых портретов с помощью метода «Гусеница»-SSA. Разложение осуществлено с помощью программы CaterpillarSSA 3.40 Standard F Edition [17].

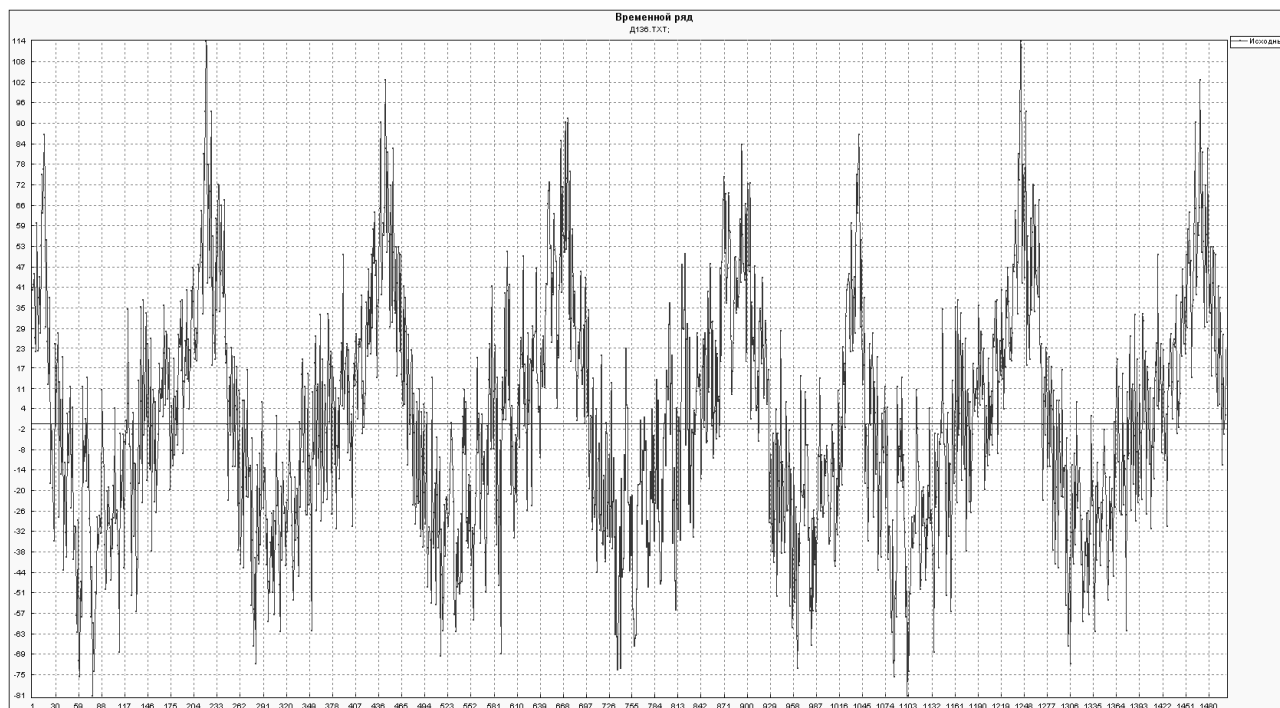


Рис. 3.19. Фрагмент исходного ряда

Верхняя часть одного из корневых портретов характеристического полинома ЛРФ фрагмента представлена на рис. 3.20 (выбрана длина окна  $L = 40$ ). Крестиками отмечены главные корни, окружностями – побочные корни характеристического полинома.

Главные корни характеристических полиномов ЛРФ фрагментов представлены в таблице 3.6, результаты их интервальной аппроксимации – в таблице 3.7. Полученная интервальная модель представлена ниже:

$$\begin{aligned}
 f_{i+2}^{(1)} &= [1,995315762; 1,995769248] f_{i+1}^{(1)} - 0,997171406 f_i^{(1)}, \\
 f_{i+2}^{(2)} &= [1,936595706; 1,937031942] f_{i+1}^{(2)} + \\
 &\quad + [-0,987242163; -0,987230559] f_i^{(2)}, \\
 f_{i+2}^{(3)} &= [1,874217232; 1,874828956] f_{i+1}^{(3)} - 0,995071887 f_i^{(3)}, \\
 f_{i+2}^{(4)} &= [1,413418702; 1,413753596] f_{i+1}^{(4)} + \\
 &\quad + [-0,998802764; -0,998719635] f_i^{(4)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{i+2}^{(5)} &= [-0,718990358; -0,718530964] f_{i+1}^{(5)} + \\
&\quad + [-0,994315138; -0,994053618] f_i^{(5)}, \\
f_{i+2}^{(6)} &= [-0,884374578; -0,883460122] f_{i+1}^{(6)} + \\
&\quad + [-0,982250373; -0,981680125] f_i^{(6)}, \\
f_{i+2}^{(7)} &= [-1,996702568; -1,996636046] f_{i+1}^{(7)} - 1,002997063 f_i^{(7)}.
\end{aligned}$$

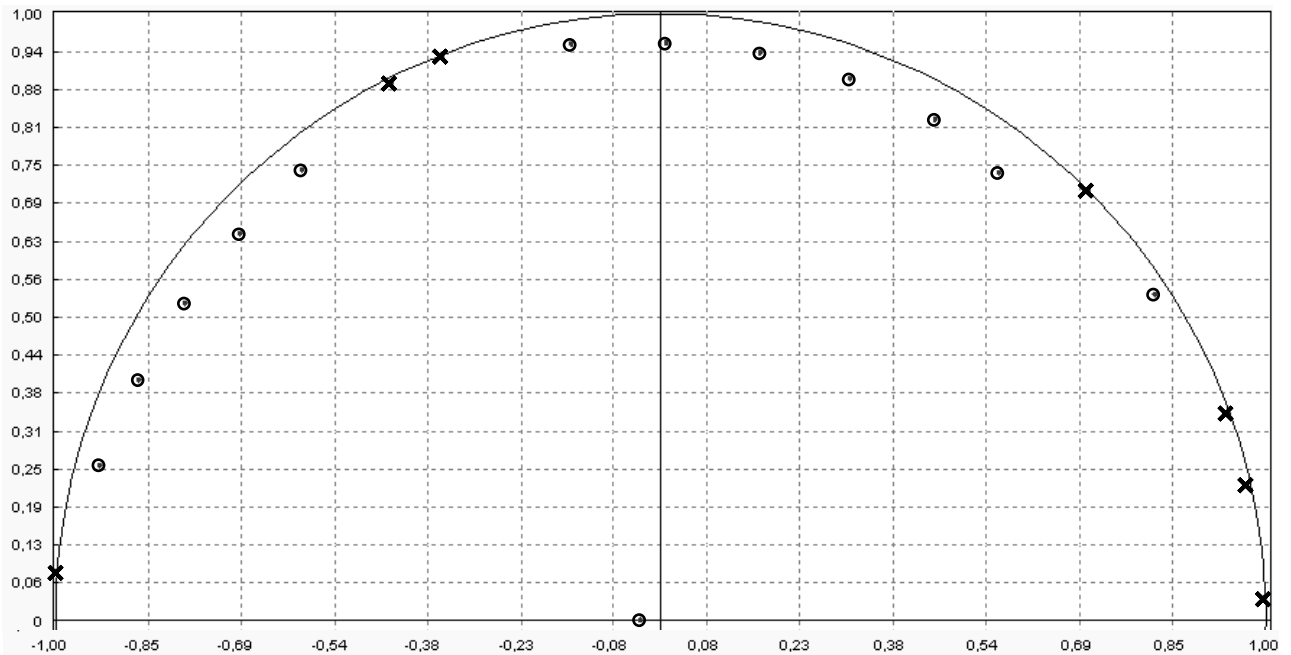


Рис. 3.20. Верхняя часть корневого портрета характеристического полинома ЛРФ фрагмента исходного ряда

Модель, полученная путем разложения исходного ряда без интервальной аппроксимации:

$$\begin{aligned}
f_{i+2}^{(1)} &= 1,995595825 f_{i+1}^{(1)} - 0,997005632 f_i^{(1)}, \\
f_{i+2}^{(2)} &= 1,936948576 f_{i+1}^{(2)} - 0,987278936 f_i^{(2)}, \\
f_{i+2}^{(3)} &= 1,874404567 f_{i+1}^{(3)} - 0,994752515 f_i^{(3)}, \\
f_{i+2}^{(4)} &= 1,413659678 f_{i+1}^{(4)} - 0,998816617 f_i^{(4)}, \\
f_{i+2}^{(5)} &= -0,718716374 f_{i+1}^{(5)} - 0,994228323 f_i^{(5)}, \\
f_{i+2}^{(6)} &= -0,884051213 f_{i+1}^{(6)} - 0,982076357 f_i^{(6)},
\end{aligned}$$

$$f_{i+2}^{(7)} = -1,99666769 f_{i+1}^{(7)} - 1,002964712 f_i^{(7)}.$$

Таблица 3.6

Главные корни характеристических полиномов ЛРФ фрагментов

		Пары комплексно-сопряженных корней					
		1-я		2-я		3-я	
		$a^{(1)}$	$b^{(1)}$	$a^{(2)}$	$b^{(2)}$	$a^{(3)}$	$b^{(3)}$
номер фрагмента	1	0,997657898	0,037385597	0,968480114	0,222560166	0,937117363	0,341165018
	2	0,997671622	0,037516603	0,968427883	0,222012148	0,937183757	0,341316231
	3	0,997678578	0,037574597	0,968463789	0,22184048	0,937414478	0,341274732
	4	0,997795219	0,037474485	0,968429608	0,222457637	0,93729921	0,341107135
	5	0,997884624	0,037445883	0,968515971	0,22274367	0,937138817	0,341181157
	6	0,997704689	0,037451295	0,968297853	0,222428283	0,937127651	0,341206159
	7	0,997657881	0,037583855	0,968351462	0,221904053	0,937192304	0,341329416
	8	0,9976806	0,037570134	0,968499266	0,221827349	0,937390992	0,341253886
	9	0,997808696	0,037460131	0,968478587	0,222397178	0,937313454	0,341065952
	10	0,997855244	0,037421524	0,96839772	0,22280357	0,937108616	0,341190144
		Пары комплексно-сопряженных корней					
		4-я		5-я		6-я	
		$a^{(4)}$	$b^{(4)}$	$a^{(5)}$	$b^{(5)}$	$a^{(6)}$	$b^{(6)}$
номер фрагмента	1	0,706851482	0,706463261	-0,359307431	0,929996572	-0,442061131	0,886963018
	2	0,706770395	0,70648261	-0,359466786	0,930086325	-0,442142152	0,886695487
	3	0,706737105	0,706437493	-0,359384684	0,930181455	-0,442142383	0,886849451
	4	0,70678704	0,706562301	-0,359349837	0,930180773	-0,441730061	0,887200612
	5	0,70683099	0,706657383	-0,359265482	0,929983779	-0,441981319	0,886951338
	6	0,706876798	0,706431049	-0,359345115	0,930010653	-0,442114949	0,886954605
	7	0,706784413	0,706432208	-0,359495179	0,930165545	-0,442187289	0,886651299
	8	0,706709351	0,706488773	-0,359389599	0,930182634	-0,442045376	0,886984456
	9	0,706804762	0,706582244	-0,35932271	0,930184633	-0,441767688	0,887134038
	10	0,706777141	0,706628594	-0,359292002	0,929955286	-0,441988738	0,886906906
		Пары комплексно-сопряженных корней					
		7-я					
		$a^{(7)}$	$b^{(7)}$				
номер фрагмента	1	-0,99833897	0,079332919				
	2	-0,99833079	0,079362526				
	3	-0,998330117	0,079330029				
	4	-0,998318023	0,079325186				
	5	-0,998336187	0,079340957				
	6	-0,998351284	0,079322637				
	7	-0,998331523	0,079320719				
	8	-0,998326117	0,079336292				
	9	-0,998332572	0,079338116				
	10	-0,998324944	0,079325735				

Таблица 3.7

Результаты интервальной аппроксимации корней  
характеристических полиномов

Пары корней	$a_{min}$	$a_{max}$	$b_{min}$	$b_{max}$
1-я	0,997657881	0,997884624	0,037385597	0,037583855
2-я	0,968297853	0,968515971	0,221827349	0,22280357
3-я	0,937108616	0,937414478	0,341065952	0,341329416
4-я	0,706709351	0,706876798	0,706431049	0,706657383
5-я	-0,359495179	-0,359265482	0,929955286	0,930184633
6-я	-0,442187289	-0,441730061	0,886651299	0,887200612
7-я	-0,998351284	-0,998318023	0,079320719	0,079362526
Пары корней	$b_{max}^*$	$\Delta$		
1-я	0,043013465	0,964772094		
2-я	–	–		
3-я	0,341905439	0,686160594		
4-я	–	–		
5-я	–	–		
6-я	–	–		
7-я	0,079738245	0,899869656		

### Выводы

Предложена процедура, позволяющая синтезировать рекуррентную модель сверхдлинного временного ряда.

### 3.7. Основные характеристики программы Caterpillar

#### *Программа Caterpillar 1.00*

##### *Наполнение*

- 1) Разложение исходного ряда на главные компоненты.
- 2) Графическое представление информации, полученной при разложении, удобное для интерпретации главных компонент (тренд, периодика, шум).
- 3) Восстановление исходного ряда по выбранным главным

компонентам.

### *Сервис*

- 1) 16-разрядное приложение (Windows 3.1 и выше).
- 2) Входные данные - текстовые файлы в одной из двух кодировок (Windows или DOS).
- 3) Возможность хранения нескольких рядов одинаковой длины в одном файле.
- 4) Возможность хранения текстовой информации вместе с данными.
- 5) Печать графиков с предварительным просмотром.
- 6) Сохранение результатов в текстовых файлах.
- 7) Сохранение графиков в файл и буфер обмена в форматах Bitmap и Metafile.
- 8) Возможность линейного преобразования и прореживания исходного ряда.
- 9) Протокол работы программы.
- 10) Два языка (русский и английский) – изменения через ini-файл.
- 11) Help на двух языках.

### ***Программа Caterpillar 2.00***

#### *Наполнение*

- 1) Разложение исходного ряда на главные компоненты.
- 2) Графическое представление информации, полученной при разложении, удобное для интерпретации главных компонент (тренд, периодика, шум).
- 3) Удобный выбор главных компонент на фоне графической информации.
- 4) Восстановление исходного ряда по выбранным главным компонентам.
- 5) Анализ корней характеристического полинома, описывающих аппроксимацию ряда.

- 6) Анализ остатков на нормальность и независимость.
- 7) Анализ ряда с точки зрения его аппроксимации рядами конечного ранга.
- 8) Прогноз двумя методами.
- 9) Возможность редактирования корней характеристического полинома, служащего основой для аналитического метода аппроксимации и прогноза.
- 10) Построение доверительных интервалов.
- 11) Анализ соответствия остатков модели белого шума, на основе которой строятся доверительные интервалы.

### *Сервис*

- 1) Входные данные – текстовые файлы в одной из двух кодировок (Windows или DOS) + EXCEL.
- 2) Возможность хранения нескольких рядов не обязательно одинаковой длины в одном файле.
- 3) Возможность хранения текстовой информации вместе с данными.
- 4) Наличие двух внутренних (текстовых) форматов для хранения данных, убаыстряющих их загрузку в программу.
- 5) Возможность задания меток (например, дат).
- 6) Печать графиков с предварительным просмотром.
- 7) Сохранение результатов в текстовые файлы и в EXCEL.
- 8) Сохранение графиков в файл и буфер обмена в форматах Bitmap, Metafile и Enhanced MetaFile.
- 9) Расширенные возможности графики (метки, добавление рядов, редактирование данных, вырезание части графика с помощью мыши, расширенные опции и др.).
- 10) Возможность линейного преобразования и прореживания исходного ряда.
- 11) Протокол работы программы.

### ***Программа CaterpillarSSA 3.30***

Программа CaterpillarSSA 3.30 имеет несколько режимов работы, в зависимости от включенных модулей (табл. 3.8).

Таблица 3.8

#### **Наполнение модулей CaterpillarSSA 3.30**

<b>Режим работы</b>	<b>Модули</b>
Standard Edition (Анализ одномерных временных рядов)	1
Standard F Edition (Анализ и прогноз одномерных временных рядов)	1,2
Standard M Edition (Анализ одномерных и многомерных временных рядов)	1,4
Standard MF Edition (Анализ и прогноз одномерных и многомерных временных рядов)	1,2,4
Professional Edition (Standard F Edition + Обнаружение разладки)	1,2,3
Professional M Edition (Standard MF Edition + Обнаружение разладки)	1,2,3,4

### ***Наполнение модулей CaterpillarSSA 3.40***

*Модуль 1. Анализ одномерных временных рядов (release).*

1) Разложение одномерного временного ряда на собственные тройки, состоящие из собственных чисел, собственных векторов и главных компонент.

2) Удобное графическое представление для интерактивной идентификация собственных троек, соответствующих тренду, периодическим (циклическим) компонентам и шуму.

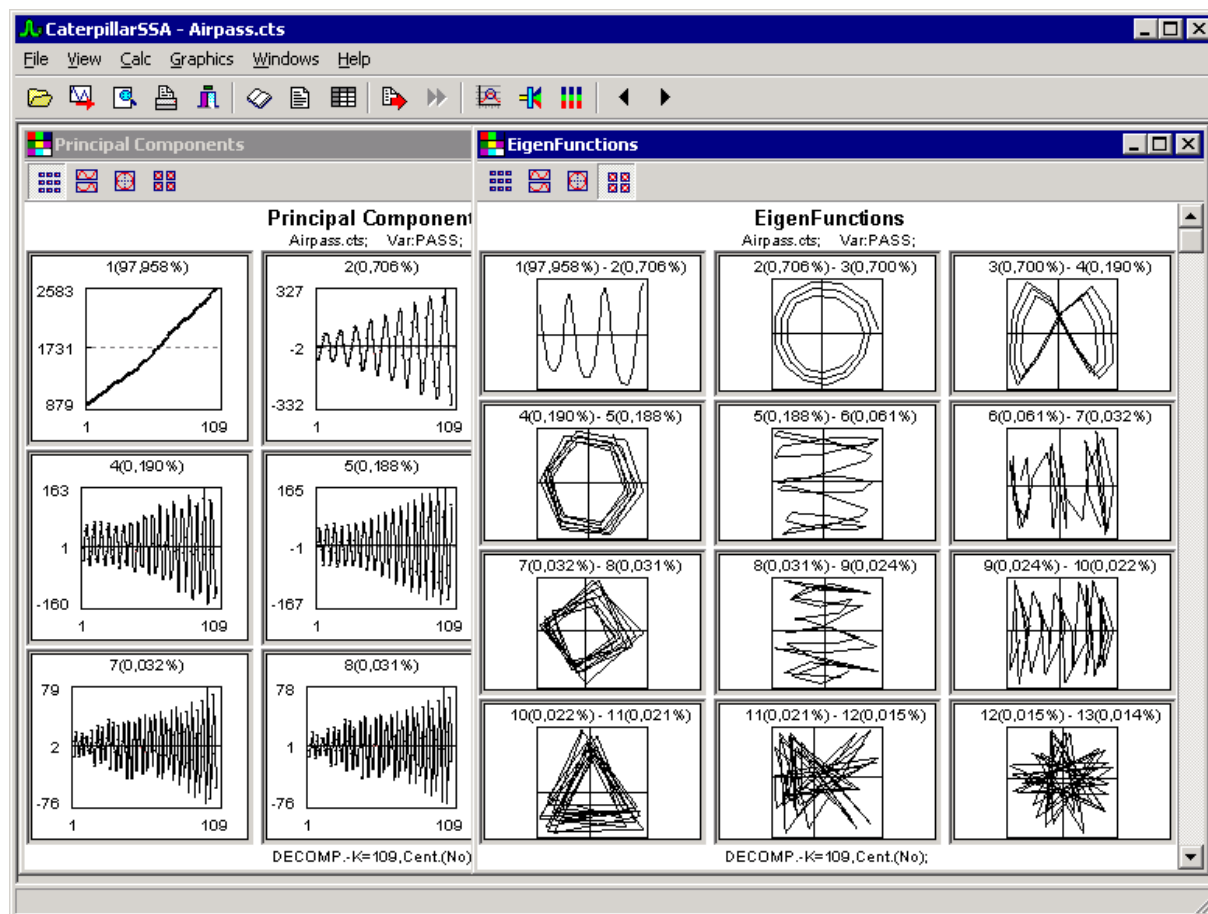
3) Группировка собственных троек, приводящая к полному разложению временного ряда на аддитивные компоненты.

4) Восстановление (извлечение) компонент временного ряда (тренда, колебательных и периодических компонент) выбором собственных троек.

5) Анализ остатков.

6) Возможность периодограммного анализа временных рядов.

7) Оценивание периода компонент на основе двумерных графиков собственных векторов или главных компонент.



*Модуль 2. Прогнозирование одномерных временных рядов (release).*

1) Аппроксимация (локальная и глобальная) временного ряда рядом, управляемым ЛРФ (линейной рекуррентной формулой).

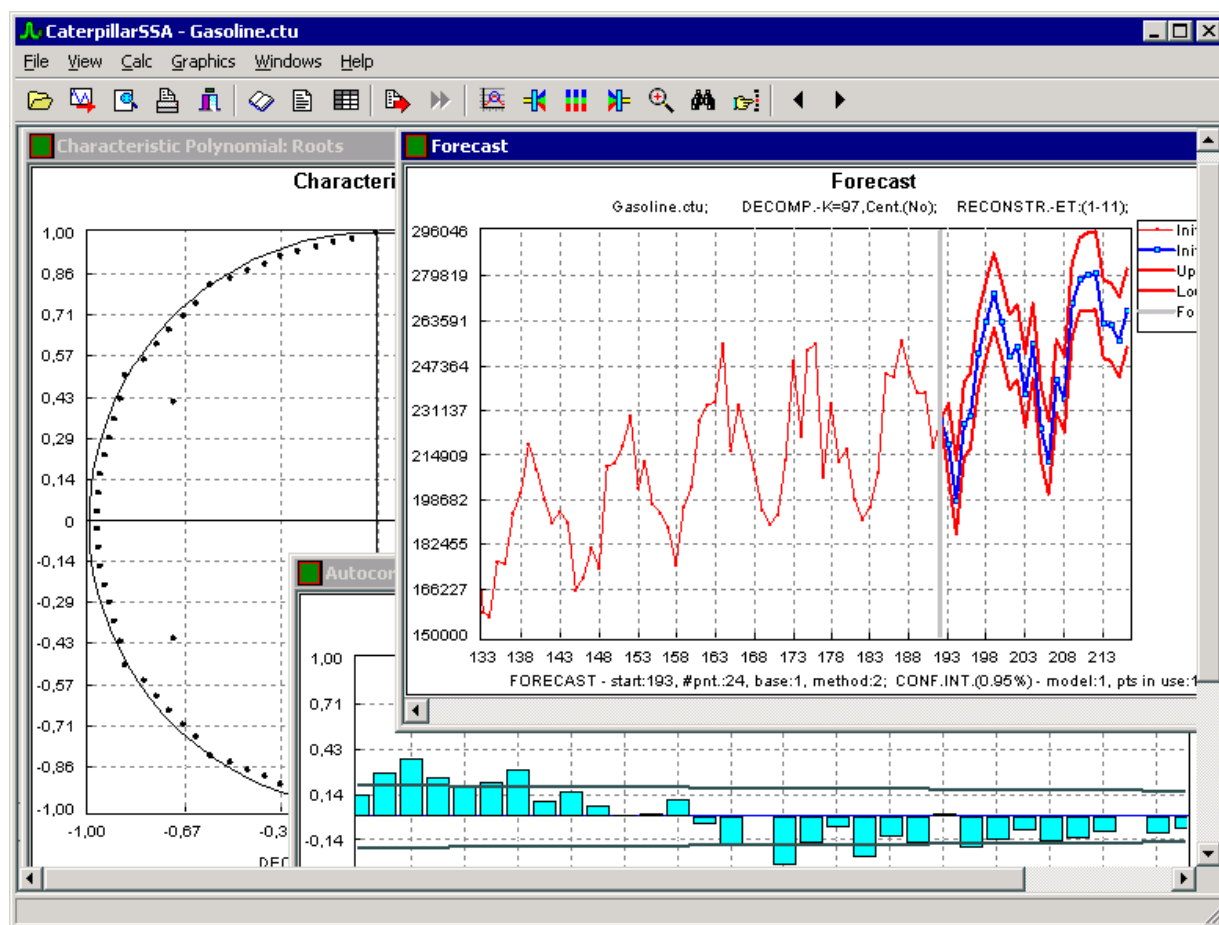
2) Прогнозирование ряда с помощью векторного и рекуррентного вариантов прогноза.

3) Возможность анализа рекуррентной формулы, используемой для рекуррентного прогноза.

4) Построение доверительных интервалов двумя методами – эмпирическим и бутстреп-методом.

5) Построение огибающих (каналов).

б) Проверка корректности прогноза на тестовом периоде с сохранением точности прогноза в файле протокола.

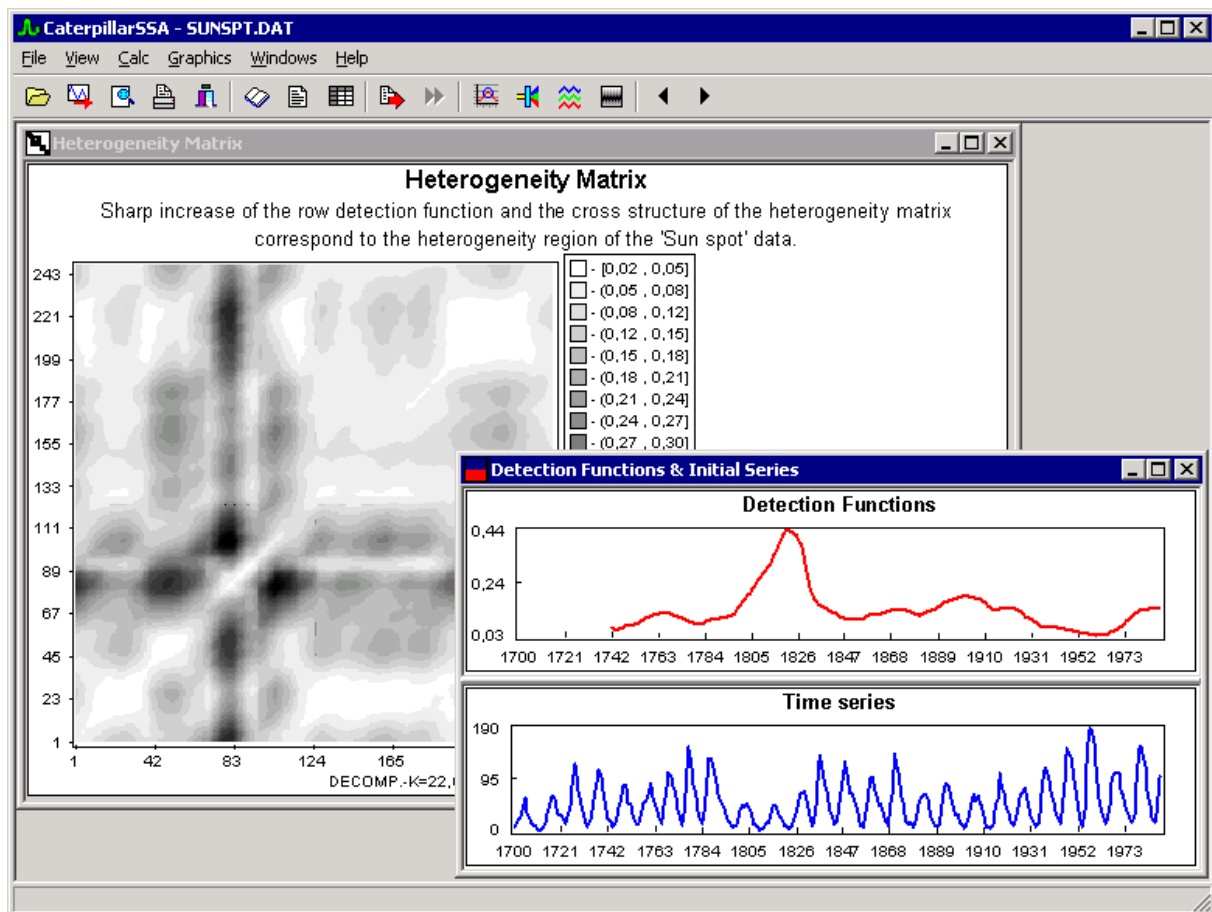


*Модуль 3. Обнаружение разладки в структуре одномерных временных рядов (beta).*

1) Обнаружение разладки путем сравнения структуры, обнаруженной методом «Гусеница»-SSA на базовом и тестовом участках.

2) Построение матрицы неоднородности и функций разладки.

3) Анализирование найденных структурных изменений с помощью дополнительной информации.



#### Модуль 4. Обработка многомерных временных рядов (release)

1) Одновременное разложение нескольких временных рядов на общие собственные тройки (собственные числа, собственные вектора и главные компоненты).

2) Удобное графическое представление для идентификация собственных троек, соответствующих общим для всех рядов трендовым, периодическим и шумовым компонентам.

3) Группировка собственных троек, приводящая к одновременному разложению всех анализируемых рядов на общие аддитивные компоненты.

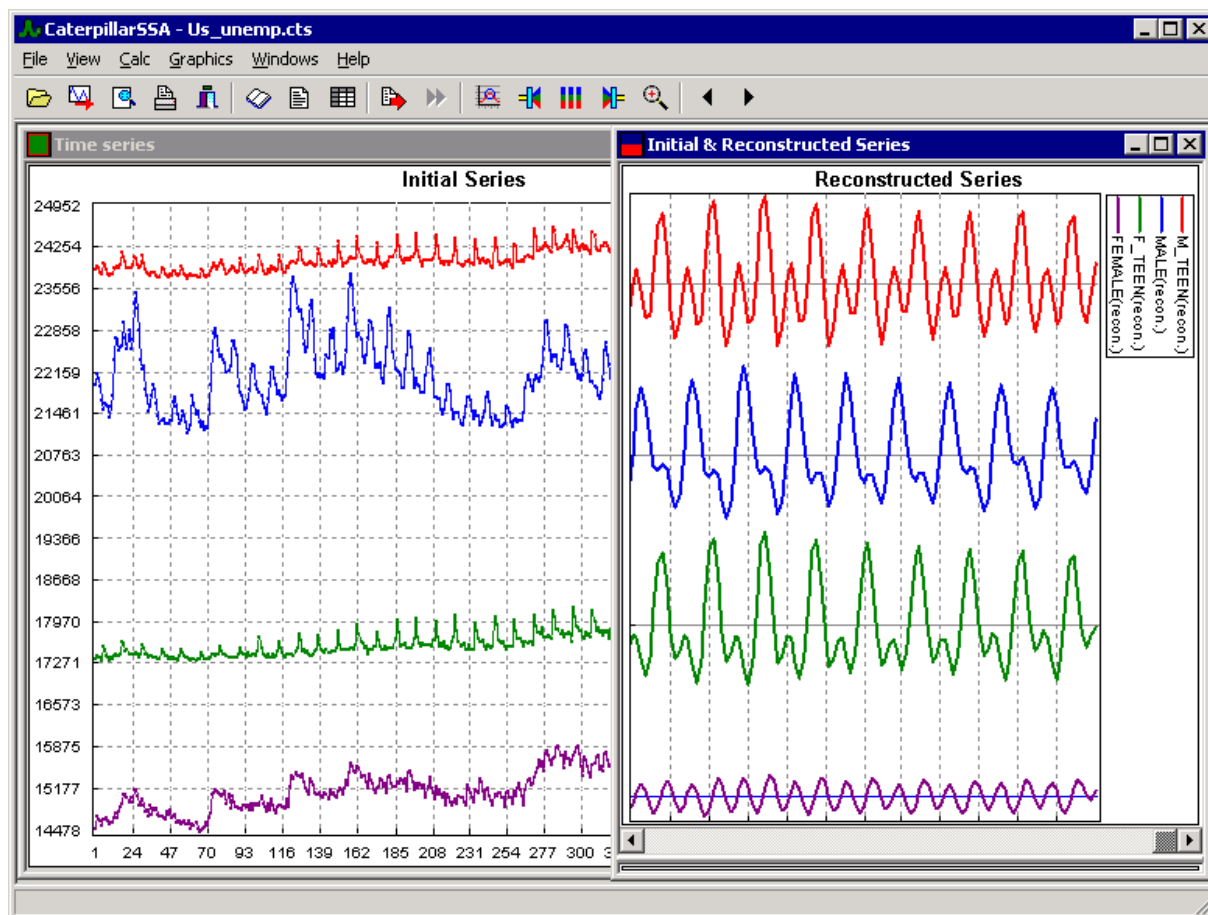
5) Восстановление (извлечение) общих временных компонент (тренд, колебания, периодики) с помощью выбора собственных троек.

б) Построение многомерного прогноза ряда с помощью век-

торного и рекуррентного вариантов прогноза.

7) Построение доверительных интервалов двумя методами – эмпирическим и бутстреп-методом.

8) Построение огибающих (каналов).



### *Сервис*

- 1) Двухязычный (английский и русский) интерфейс.
- 2) Англоязычная контекстная справочная система для модулей анализа и прогноза одномерных временных рядов.
- 3) Входные данные - текстовые файлы в одной из двух кодировок (Windows или DOS) + Excel.
- 4) Импорт данных в формате программы Метасток.
- 5) Возможность хранения нескольких рядов не обязательно одинаковой длины в одном файле.
- 6) Возможность хранения текстовой информации вместе с данными.

- 7) Наличие двух внутренних (текстовых) форматов для хранения данных, убыстряющих их загрузку в программу.
- 8) Возможность задания меток (например, дат).
- 9) Печать графиков с предварительным просмотром.
- 10) Сохранение результатов в текстовые файлы и в EXCEL.
- 11) Возможность копирования ячеек таблиц с результатами.
- 12) Сохранение графиков в файл и буфер обмена в форматах Bitmap, Metafile и Enhanced MetaFile.
- 13) Сохранение графиков в формате eps (PostScript).
- 14) Сохранение графиков во внутреннем формате с последующей возможностью загрузки графика и его редактирования.
- 15) Расширенные возможности графики (метки, добавление рядов, редактирование данных, вырезание части графика с помощью мыши, расширенные опции и др.).
- 16) Возможность линейного преобразования и прореживания исходного ряда.
- 17) Протокол работы программы.
- 18) Макросы, автоматизирующие выполнение последовательности действий программы.

### ***Характеристики CatMV 1.0***

#### *Основные возможности*

- 1) Разложение временных рядов, которые могут содержать пропущенные значения.
- 2) Выделение тренда и периодических компонент.
- 3) Аппроксимация выделенной компоненты рядом конечно-го ранга с помощью итераций Cadzow.
- 4) Заполнение пропущенных значений в выделенной компоненте ряда.
- 5) Прогноз выделенной компоненты ряда с помощью заполнения искусственно поставленных в конце ряда пропусков.

#### *Дополнительные возможности*

1) Последовательная навигация по этапам/результатам программы.

2) Загрузка данных из текстового файла.

3) Возможность моделирования исходного ряда.

4) Редактирование загруженных данных.

5) Сохранение результатов в текстовый файл (только для зарегистрированных пользователей).

6) Сравнение выделенного ряда с заданным, что позволяет тестировать программу на качество восстановления/прогноза на искусственно добавленных в ряд пропусках.

### *Характеристики CatSSA 1.0 (DLL)*

1) Разложение одномерного временного ряда на собственные тройки, состоящие из собственных чисел, собственных векторов и главных компонент.

2) Восстановление (извлечение) компонент временного ряда (тренда, колебательных и периодических компонент) выбором собственных троек.

3) Прогнозирование ряда с помощью рекуррентного метода прогноза.

### **Литература к разделу 3**

1. Stepanov, D. V. SSA-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series [Text] / D. V. Stepanov, N. E. Golyandina // Proc. of the 5th St.Petersburg Workshop on Simulation, St.-Petersburg, June 2005 – SPb.: VVM com. Ltd., 2005. – P. 293–298.

2. Данилов, Д. Л. Главные компоненты временных рядов: метод “Гусеница” [Текст] / Д. Л. Данилов, А. А.Жиглявский (ред.). — СПбГУ: Пресском, 1997. – 308 с.

3. Stewart, G. On the early history of the singular value decom-

position [Электронный ресурс] / G. Stewart, Technical Report TR-92-31, University of Maryland, Institute for Advanced Computer Studies. – 1992. – Режим доступа: <http://citeseer.ist.psu.edu/stewart92early.html>.

4. Golyandina, N.E. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques [Text] / N. E. Golyandina, V. V. Nekrutkin, A. A. Zhigljavsky. – Chapman&Hall, 2001. – 305 p.

5. Голяндина, Н. Э. Метод “Гусеница”-SSA для анализа временных рядов с пропусками [Текст] / Н. Э. Голяндина, Е. В. Осипов // Мат. модели. Теория и приложения. – 2005. – Вып. 6. – С. 50–61.

6. Broomhead, D. S. Extracting qualitative dynamics from experimental data [Text] / D. S. Broomhead, G. P. King // Physica D. – 1986. – Vol. 20. – P. 217–236.

7. Vautard, R. Singular-Spectrum Analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signals [Text] / R. Vautard, P. Yiou, M. Ghil // Physica D. – 1992. – Vol. 58. – P. 95–126.

8. Некруткин, В. В. Разложения временных рядов [Текст] / В. В. Некруткин // Главные компоненты временных рядов: метод “Гусеница”: сб. науч. тр. / ред. Д. Л. Данилов, А. А. Жиглявский. — СПбГУ, 1997. — С. 194–227.

9. Голяндина, Н.Э. Метод «Гусеница» - SSA: анализ временных рядов [Текст] / Н.Э. Голяндина. – СПб.: С.-Петербургс. гос. ун-т, 2004. – 78 с.

10. Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов [Текст]: учеб. пособие / Ю.П. Лукашин, - М.: Финансы и статистика, 2003. - 416 с.

11. Ханк, Д.Э. Бизнес-прогнозирование [Текст]: пер. с англ./ Д.Э. Ханк, Д.У. Уичерн, А.Дж. Райтс. - 7-е изд. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2003. – 656 с.

12. Кошечкин, С.А. Алгоритм прогнозирования объёма про-

даж в MS Excel – [http://www.cfin.ru/finanalysis/sales\\_forecast.shtml](http://www.cfin.ru/finanalysis/sales_forecast.shtml).

13. Варталян, В.М. Обзор методов прогнозирования показателей бизнес-процессов по временным рядам [Текст] / В.М. Варталян, В.Ю. Кащеева // Економіка та управління підприємствами машинобудівної галузі: проблеми теорії та практики. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т ім. Н.Е. Жуковського «ХАИ». – 2010. Додаток. Тези доповідей VIII Міжнар. наук.-практ. конф. „Сучасні інформаційні технології в економіці та управлінні підприємствами, програмами та проектами». - С. 189-191.

14. Варталян, В.М. Оценка частотных параметров модели Тейла-Вейджа в задачах краткосрочного прогнозирования [Текст] / В.М. Варталян, Ю.А. Романенков, Д.С. Ревенко, В.Ю. Кащеева. // Східно-Європейський журнал передових технологій. – Х., 2011. – Вип. 1/5(49). - С. 49-54.

15. Шокин, Ю.И. Интервальный анализ [Текст] / Ю.И. Шокин. - Новосибирск: Наука, 1981. – 111 с.

16. Петрикевич, Я.И. Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным: дис. ... канд. техн. наук. – Кемерово: КемГУ, 2006. – 225 с.

17. Программный продукт «CaterpillarSSA», <http://www.gistatgroup.com>

18. Варталян, В.М. Синтез интервальной рекуррентной формулы сверхдлинного временного ряда [Текст] / В.М. Варталян, Ю.А. Романенков, В.Ю. Кащеева. // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т "ХАИ", 2011. – Вып. 52. – С. 56-68.

19. Голяндина, Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: прогноз временных рядов [Текст]: учеб. пособие / Н. Э. Голяндина. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. – 52 с.

Вартамян В.М.  
Романенков Ю.А.  
Ревенко Д.С.  
Кащеева В.Ю.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

Ответственный за выпуск Романенков Ю.А.

Св. план, 2012

Подписано в печать 04.04.2012

Формат 60×84 1/16. Бум. офс. № 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 30,93 Уч.-изд. л.31,68 Т. 300 экз. Заказ 29.

Цена свободная

---

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

«Харьковский авиационный институт»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр «ХАИ»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)