

И.С. РАДКЕВИЧ

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ПОДПРОСТРАНСТВ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ НАПРАВЛЕНИЯ ПРИХОДА ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ

Анализу эффективности алгоритмов подпространств в задаче оценки направления прихода сигналов (НПС) посвящен ряд работ [1—3]. Попытки распространить результаты анализа на случай малых возмущений в параметрах модели сигналов предприняты в работе [4]. Однако представленные в них исследования основаны на простых моделях, описывающих каналы регулярной структуры и не учитывающих их реальные статистические характеристики. Так, наличие многолучевости и пространственно-временной неоднородности, подвижность источников и приемников радиосигналов, нестационарность шумового фона приводят к нарушению степени когерентности поля вдоль апертуры антенны, что ухудшает разрешающую способность алгоритмов.

Данные исследования посвящены анализу разрешающей способности алгоритмов подпространств в условиях воздействия частично когерентных сигналов.

Обзор алгоритмов

Рассмотрим L -элементную линейную эквидистантную антенную решетку однородных изотропных антенных элементов, принимающую P узкополосных сигналов. НПС различны, и $P < L$. Суммарный сигнал на выходе i -го антенного элемента в момент времени t может быть представлен выражением

$$\dot{y}_{im} = \sum_{k=1}^P \dot{S}_{ikm} \exp(j\Psi_{im}(g_k)) + \dot{n}_{im}. \quad (1)$$

Здесь \dot{S}_{ikm} , $j\Psi_{im}$, \dot{n}_{im} — комплексные: огибающая, фаза k -го сигнала и шум наблюдения. Шум наблюдения является белым гауссовским случайным процессом с нулевым средним и дисперсией σ_n^2 , некоррелирован с сигналами, а также в соседних антенных элементах.

На практике оценка НПС алгоритмами подпространств предполагает представление выборочной по M отсчетам оценки ковариационной матрицы в ортонормированном базисе собственных векторов:

$$\hat{R} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \dot{Y}_m \dot{Y}_m^H = \hat{U}_s \hat{\Lambda}_s \hat{U}_s^H + \hat{U}_n \hat{\Lambda}_n \hat{U}_n^H, \quad (2)$$

где $\dot{Y}_m^T = [\dot{y}_{1m} \quad \dot{y}_{2m} \quad \dots \quad \dot{y}_{Lm}]$ — вектор сигналов и шума на выходах антенных элементов, \hat{U}_s, \hat{U}_n — матрицы размера $L \times \hat{P}$ и $L \times (L - \hat{P})$, содержащие оценки собственных векторов сигнального и шумового подпространств, $\hat{\Lambda}_s, \hat{\Lambda}_n$ — диагональные матрицы оценок собственных значений этих ортогональных подпространств размера $\hat{P} \times \hat{P}$ и $(L - \hat{P}) \times (L - \hat{P})$; $(\cdot)^H$ — операция комплексно-сопряженного транспонирования; $(\cdot)^T$ — операция транспонирования.

Оценка НПС $\hat{\Theta}_s = \{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p\}$ в алгоритмах MUSIC и MIN-NORM находится в результате одномерного поиска аргументов \hat{P} максимумов функции пространственного спектра $f(\vartheta, \hat{U}_n)$:

$$\hat{\Theta}_s = \arg \max_{\vartheta} \left\{ f(\vartheta, \hat{U}_n) \right\}, \vartheta \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (3)$$

Здесь $f(\vartheta, \hat{U}_n)$ определяется выражением

$$f(\vartheta, \hat{U}_n) = \begin{cases} \left| \hat{U}_n^H \dot{a}(\vartheta) \right|^{-2} & \text{по алгоритму MUSIC;} \\ \left| e^T \hat{U}_n \hat{U}_n^H \dot{a}(\vartheta) \right|^{-2} & \text{по алгоритму MIN-NORM,} \end{cases} \quad (4)$$

где $\dot{a}(\vartheta)^T = [1 \quad \exp(j\Psi(\vartheta)) \quad \dots \quad \exp(j(L-1)\Psi(\vartheta))]$ — вектор сканирования.

Полиномиальные варианты этих алгоритмов предполагают нахождение корней полинома $g(z, \hat{U}_n)$, лежащих вблизи единичной окружности

$$g(z, \hat{U}_n) = \begin{cases} \dot{a}(z^{-1})^T \hat{U}_n \hat{U}_n^H \dot{a}(z) & \text{по алгоритму root-MUSIC;} \\ e^T \hat{U}_n \hat{U}_n^H \dot{a}(z) & \text{по алгоритму root-MIN-NORM,} \end{cases} \quad (5)$$

где корни полинома z — функции НПС $z = \exp(j\Psi(\vartheta))$.

Определение НПС с использованием векторов сигнального подпространства реализовано в алгоритме ESPRIT.

Алгоритм LS-ESPRIT предполагает решение оптимизационной задачи методом наименьших квадратов. Следует найти

$$\min \left\| \hat{\Phi}_1 \hat{F}_{LS} - \hat{\Phi}_2 \right\|, \quad (6)$$

где \hat{F}_{LS} — матрица, собственные значения которой определяют фазовый сдвиг $\exp(j\Psi(\vartheta_i))$, $i = \overline{1, \hat{P}}$ сигналов в подрешетках при их перекрытии в $L-1$ антенный элемент, матрицы $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$ — матрицы содержащие $L-1$ первых и последних строк матрицы \hat{U}_s .

Оценка матрицы \hat{F}_{TLS} методом общих наименьших квадратов в алгоритме TLS-ESPRIT ищется в результате решения следующей задачи оптимизации: необходимо определить

$$\min \left\| \Delta \hat{\Phi}_1, \Delta \hat{\Phi}_2 \right\|_F^2 \text{ при условии } \left(\hat{\Phi}_1 - \Delta \hat{\Phi}_1 \right) \hat{F}_{TLS} = \hat{\Phi}_2 - \Delta \hat{\Phi}_2, \quad (7)$$

Здесь $\| \cdot \|_F$ — норма Фробениуса, откуда $\hat{F}_{TLS} = -\hat{W}_{12} \hat{W}_{22}^{-1}$. Блоки $\hat{W}_{12}, \hat{W}_{22}$ размера $\hat{P} \times \hat{P}$ — определяются в результате разложения

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 \\ \hat{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \hat{Q} \hat{\Sigma} \hat{W}^H; \quad \hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} \end{bmatrix}.$$

Оценка количества принимаемых сигналов \hat{P} в алгоритмах может быть найдена на основе анализа спектра матрицы \hat{R} с привлечением критериев MDL, AIC либо других статистических критериев.

Анализ эффективности

В качестве антенны использована пятиэлементная эквидистантная антенная решетка с $d = \lambda_c/2$. Рассмотрен случай оценки НПС для двух частично когерентных сигналов. В качестве модели распределения огибающей k -го сигнала \hat{S}_k принята марковская модель частично когерентных сигналов

$$d\bar{X}(t)/dt = F\bar{X}(t) + B\bar{\xi}(t) \quad (8)$$

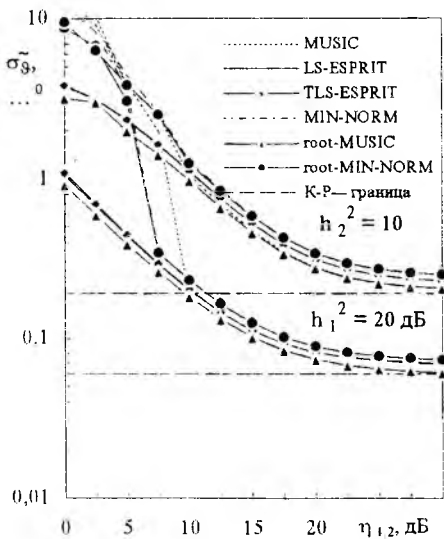
Здесь $\bar{X}(t)$ — вектор амплитуд сигналов в квадратурных каналах, F — матрица временных связей размера $2L \times 2L$, B — матрица амплитуд размера $2L \times 2L$, G — $2L \times 2L$ - матрица пространственных связей; $\bar{\xi}(t)$ — $2L$ -мерный белый гауссовский шум с матрицей ковариации $\langle \bar{\xi}(t)\bar{\xi}^T(\tau) \rangle = I\delta(t-\tau)$, где I — единичная матрица. Матрицы F, B, G , входящие в уравнение (8), имеют следующие элементы:

$$F_{ii} = 1/\tau; F_{iv} = 0, i \neq v; B_{ii} = \sigma \sqrt{\left(2F_{ii} / \sum_{v=1}^{2L} G_{iv} \right)};$$

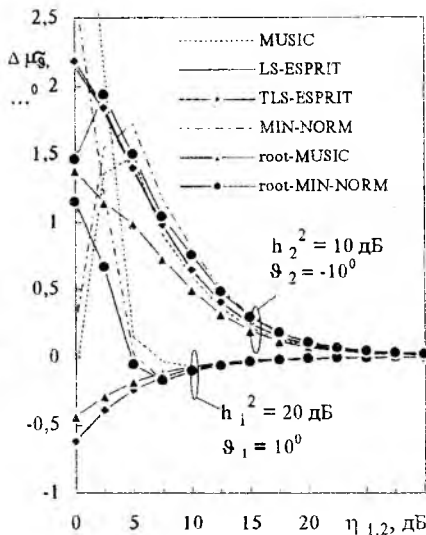
$$B_{iv} = 0, i \neq v; G_{iv} = \exp(-d_{iv}/r). \quad (9)$$

Здесь τ, r, σ — интервал когерентности i -й компоненты процесса $\bar{X}(t)$ во времени, в пространстве и его стандартное отклонение; d_{iv} — расстояние между i -м и v -м элементами антенной решетки. Различие в степени когерентности принимаемых сигналов учитывается путем изменения уровней регулярной и флуктуационной компонент на выходах антенных элементов, исходя из статистических характеристик, структуры и особенностей радиоканала. Так, каналы с ярко выраженной регулярной структурой могут быть аппроксимированы законами Райса, обобщенными законами ρ -вектора, Хойта. Каналы связи с подвижными объектами часто аппроксимируют релейским законом распределения вероятностей, без регулярной составляющей.

Отношение сигнал-шум на выходах антенных элементов определялось как $h_k^2 = 10 \lg(S_k^2/\sigma_n^2)$. Параметры сигналов в экспериментах: $\Delta t/\tau_k = 0,1$, где Δt — интервал дискретизации во времени; $d/r_k = 0,5$, $k = \overline{1,2}$; $h_1^2 = 20$ дБ, $h_2^2 = 10$ дБ. Результаты исследования эффективности алгоритмов представлены среднеквадратическим отклонением ошибки оценок $\sigma_{\hat{\alpha}}$ и смещением оценок направления прихода $\Delta \mu_{\hat{\alpha}}$. Исследования проводились по оценкам выборочной ковариационной матрицы без привлечения процедур сглаживания. В экспериментах объем выборки M составил 100 отсчетов данных. Количество сигналов $\hat{P} = 2$ предполагалось известным. Для каждой полученной точки было выполнено 500



а



б

Рис. 1

статистически независимых испытаний.

В первом эксперименте исследовано влияние отношения мощности регулярной к мощности флуктуационной компоненты сигналов η на точность оценок направления прихода σ_{ϑ} (рис. 1, а) и $\Delta \mu_{\vartheta}$ (рис. 1, б) при различных отношениях сигнал-шум h^2 . Направления прихода сигналов: $\vartheta_1 = 10^0$, $\vartheta_2 = -10^0$.

Снижение степени когерентности сигналов сопровождается потерей эффективности в оценках НПС для всех рассматриваемых алгоритмов.

При $\eta \gg 0$ дБ среднеквадратическое отклонение ошибки оценки НПС качественно отражает теоретические результаты полученные в работах [2; 3] для модели сигналов, описывающей каналы регулярной структуры. Так, с увеличением η среднеквадратическая ошибка оценки стремится к границе Крамера — Рао [3]. В рассмотренном диапазоне отношений сигнал-шум h^2 выполняется неравенство

$$\sigma_{\vartheta}^{\text{root-MUSIC}} < \sigma_{\vartheta}^{\text{MUSIC}} < \sigma_{\vartheta}^{\text{LS-ESPRIT}} < \sigma_{\vartheta}^{\text{TLS-ESPRIT}} < \sigma_{\vartheta}^{\text{root-MIN-NORM}} < \sigma_{\vartheta}^{\text{MIN-NORM}} \quad (10)$$

Неравенство (10) по параметру $\Delta\mu_{\vartheta}$ выполняется для всех алгоритмов при $\eta_{1,2} = 10 \dots 30$ дБ.

При $\eta_{1,2} < 10$ дБ наиболее чувствительными к изменению $\eta_{1,2}$ оказываются алгоритмы MUSIC и MIN-NORM. Пороговая область, при достижении которой возникает резкий рост σ_{ϑ} и взаимное сближение сигнальных максимумов в пространственном спектре для алгоритмов MUSIC и MIN-NORM, составляет $\eta_{1,2} = 10$ дБ, $\eta_{1,2} = 7,5$ дБ соответственно при $h_1^2 = 20$ дБ и $\eta_{1,2} = 10$ дБ при $h_2^2 = 10$ дБ.

Во втором эксперименте исследована точность оценок НПС в зависимости от углового разноса $\Delta\vartheta$ при $\eta_{1,2} = 20$ дБ (рис. 2, а) и $\eta_{1,2} = 15$ дБ (рис. 2, б) и различных h^2 . Здесь $\vartheta_1 = \Delta\vartheta/2$ и $\vartheta_2 = -\Delta\vartheta/2$.

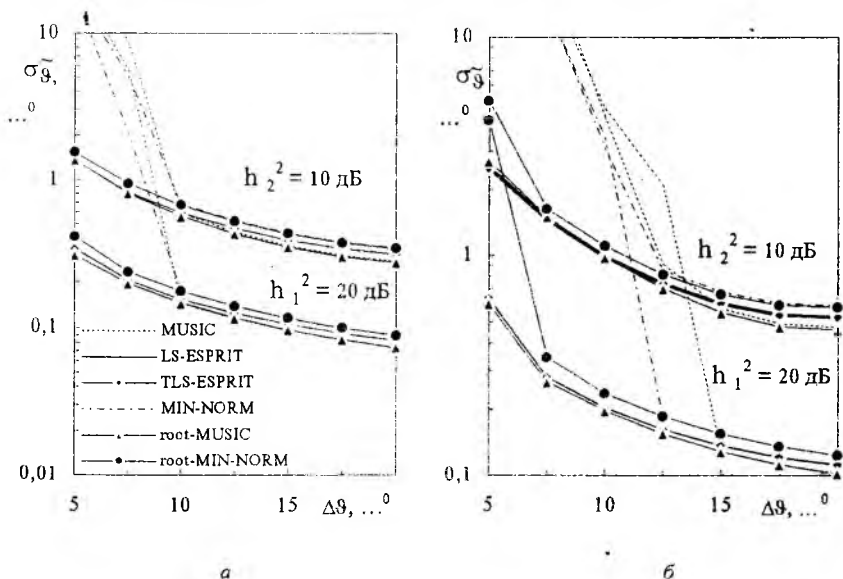


Рис. 2

С уменьшением углового разнosa в направлениях прихода сигналов $\Delta\vartheta$ среднеквадратическая ошибка оценки $\sigma_{\tilde{\vartheta}}$ возрастает нелинейно, причем одинаковый уровень флуктуаций в направлениях прихода при малом угловом разнose между источниками сигналов приводит к более значительным изменениям $\sigma_{\tilde{\vartheta}}$, чем когда $\Delta\vartheta \gg 1^\circ$. Для алгоритмов MUSIC и MIN-NORM при $h^2 = 10 \dots 20$ дБ и $\eta_{1,2} = 20$ дБ границы резкого роста $\sigma_{\tilde{\vartheta}}$ совпадают и составляют $\Delta\vartheta = 10^\circ$, а в случае, когда η уменьшается на 5 дБ, их значения возрастают на 5° и $2,5^\circ$ соответственно. Следовательно, при малом угловом разнose НПС и малом уровне регулярной компоненты каждого сигнала алгоритм MIN-NORM позволяет получить более точные оценки, чем алгоритм MUSIC.

При малом $\Delta\vartheta$ и большом отношении h^2 среднеквадратическая ошибка оценки и смещение минимальны для алгоритма root-MUSIC.

С уменьшением h^2 (при $h^2 = 10$ дБ) $\sigma_{\tilde{\vartheta}}^{LS(TLS)-ESPRIT}$ и $\Delta\mu_{\tilde{\vartheta}}^{\sim LS(TLS)-ESPRIT}$ сопоставимы по соответствующим параметрам с алгоритмом root-MUSIC для значений $\eta = 20$ дБ и 15 дБ при $\Delta\vartheta = 6^\circ$ и $\Delta\vartheta = 9^\circ$ соответственно. При меньших величинах $\Delta\vartheta$ разрешающая способность двух вариантов алгоритма ESPRIT оказывается выше, чем у алгоритма root-MUSIC.

Заключение

Результаты исследования эффективности алгоритмов позволяют сделать следующие выводы:

1. Эффективность алгоритмов зависит от степени когерентности принимаемых сигналов. Так, если уровень регулярной компоненты каждого сигнала уменьшится на 30 дБ, то рост среднеквадратической ошибки оценки направления прихода составит 10 ... 12 дБ для алгоритмов root-MUSIC, root-MIN-NORM, LS (TLS)-ESPRIT и 15 ... 20 дБ для алгоритмов MUSIC и MIN-NORM.

2. Полиномиальные алгоритмы root-MUSIC и root-MIN-NORM позволяют получить более точные оценки по сравнению с MUSIC и MIN-NORM, при этом выигрыш в точности растет с уменьшением степени когерентности сигналов.

3. Среди рассмотренных алгоритмов LS (TLS)-ESPRIT наиболее робастен к динамике изменения дестабилизирующих факторов. При малом угловом

разносе и невысокой степени когерентности сигналов алгоритм LS (TLS)-ESPRIT обладает меньшими значениями смещенности и среднеквадратической ошибкой оценки по сравнению с другими рассмотренными алгоритмами, причем выигрыш тем больше, чем меньше отношение сигнал-шум, уровень регулярной компоненты каждого сигнала и угловой разнос между ними.

4. В условиях малого пространственно-временного ресурса подвижных радиосредств, для радиоканалов которых характерен малый уровень регулярной компоненты сигналов, следует рекомендовать алгоритм LS-ESPRIT, а в радиоканалах, где уровень регулярной компоненты сигналов высок, $\eta \gg 1$, эффективен алгоритм root-MUSIC.

Список литературы: 1. Rao B.D., Hari K.V.S. Performance analysis of ESPRIT, minimum-norm method, and TAM in determining the direction of arrival of plane waves in noise // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1989. Vol. 37, N 12, P.1990 — 1995. 2. Ottersten B., Viberg M., Kailath T. Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. Vol. 39, N 5. P.1122 — 1134. 3. Stoica P., Nehorai A. Performance comparison of subspace rotation and MUSIC methods for direction estimation // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. Vol. 39, N 2. P. 446 — 453. 4. Swindlehurst A.L., Kailath T., A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model errors — Part 1. MUSIC algorithm // IEEE Trans. Signal Processing. 1992. Vol. 40, N 7. P. 1758 — 1774.

Харьковский государственный технический
университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 04.11.98