

В. В. ДОЛЖИКОВ, канд. физ.-мат. наук

СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АПЕРТУРНЫХ АНТЕНН ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛЯ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

В зоне Френеля вид угловой зависимости поля различен для разных расстояний от излучающей системы (ИС), поэтому задачи синтеза её по заданным требованиям к тем или иным характеристикам поля в зоне Френеля оказываются более сложными как по формулировке, так и по решению, чем подобные задачи для дальней зоны. В силу разнообразных причин в излучающей системе всегда имеют место флуктуации амплитудно-фазового распределения (АФР), которые могут привести к заметным искажениям распределения поля при реализации оптимального АФР, найденного без учета их наличия и вследствие этого вид реально получаемого распределения поля может значительно отличаться от ожидаемого. Следовательно, для полного учета факторов, влияющих на направленные свойства ИС, наиболее предпочтительной является статистическая постановка соответствующих задач синтеза, при которой принимаются во внимание характерные особенности зависимости поля от координат в зоне Френеля. При этом с практической точки зрения в результате решения задачи статистического синтеза желательно определять не только оптимальное среднее (или номинальное) АФР, но и предельно допустимую величину статистических параметров флуктуаций, информация о которых необходима для формулировки обоснованных требований к допускам и стабильности параметров ИС.

Исходные соотношения

Напряженность электрического поля в зоне Френеля круглой сфокусированной апертуры с радиусом a может быть записана следующим образом [1]:

$$\mathbf{E}(\zeta, \psi) = \mathbf{e}_E E_0(0) \frac{i\pi^2}{8\chi_0} e^{-ik\chi_0 r_\phi} f(\zeta, \psi), \quad (1)$$

где функция

$$f(\zeta, \psi) = \left(1 - \frac{\zeta}{b}\right) \frac{2}{\pi_0} \int A(u) e^{i2u^2\zeta} J_0(u\psi) u du \quad (2)$$

с точностью до фазового множителя $\exp(ik\chi_0 r_\phi)$ описывает пространственное распределение комплексной амплитуды напряженности электрического поля в френелевской и дальней зонах сфокусированной круглой апертуры при линейно поляризованном и аксиально симметричном возбуждении её. В (1) и (2) $\mathbf{e}_E = \mathbf{E}^0 / |\mathbf{E}^0|$ – единичный вектор; $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число в воздухе; $A(u) = E_0(u) / E_0(0)$ – функция, описывающая амплитудно-фазовое распределение поля возбуждения без учета фокусирующего фазового множителя; $E_0(u)$ – напряженность электрического поля на апертуре; $u = \rho_1 / a$ – безразмерная радиальная координата на апертуре; $\psi = ka \sin \theta$ – обобщенный угол; θ – угол между направлением в точку наблюдения и нормалью к плоскости апертуры; $\zeta = b(1 - \chi_0 / \chi)$ – обобщенная радиальная координата вдоль фокальной оси, определяющая расстояние от фокуса до точки наблюдения; $\chi = r / r_\phi$; $\chi_0 = r_f / r_\phi$; r , r_f и $r_\phi = 8a^2 / \lambda$ – расстояния от апертуры до точки наблюдения, фокуса и дальней границы зоны Френеля соответственно; $b = \pi / 16\chi_0$; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода.

В общем случае пространственное распределение поля не является разделяющимся, так как $f(\zeta, \psi)$ нельзя представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от углов, а вторая – только от расстояния до антенны. Поэтому для описания поля в зоне Френеля удобно ввести характеристики двух типов. Характеристики одного типа определяют угловые зависимости поля на сферах различных радиусов, а второго – радиальные зависимости (зависимости значения поля от расстояния до антенны) вдоль различных направлений. Определив совокупность характеристик того или иного типа, можно получить достаточно полное представление о пространственном распределении поля. При этом выбор типа характеристик в определенной степени произволен и зависит от практических потребностей.

Угловое распределение поля на сфере с радиусом χ_n , определяемым величиной $\zeta = \zeta_n$, будем характеризовать угловой диаграммой направленности (УДН) на n -й сфере, которая описывается функцией

$$F_n(\psi) = \frac{f(\zeta_n, \psi)}{(1 - \zeta_n/b)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 A(u) e^{i2u^2 \zeta_n} J_0(u\psi) u du = T_F A, \quad (3)$$

где n – номер сферы.

Будем считать, что для фокальной сферы $n = 0$ ($\zeta_0 = 0$), $n > 0$ соответствуют $\zeta_n > \zeta_0$, а $n < 0$ – значениям $\zeta_n < \zeta_0$.

Функцию

$$R_n(\zeta) = \frac{f(\zeta, \psi_n)}{(1 - \zeta/b)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 A(u) e^{i\zeta 2u^2} J_0(u\psi_n) u du = T_R A \quad (4)$$

назовем радиальной диаграммой (РД) антенны вдоль n -го направления, определяемого углом $\psi = \psi_n$. Согласно (2) $R_n(\zeta)$ есть та часть выражения, описывающего радиальное распределение поля в направлении, заданном углом ψ_n , которая зависит только от вида АФР поля возбуждения. Будем полагать, что $n = 0$ ($\psi_0 = 0$) соответствует направлению вдоль фокальной оси. В дальнейшем индексы у функций, определяющих УДН и РД на фокальной сфере и вдоль фокальной оси, будем опускать. В (3) и (4) T_F и T_R – линейные интегральные операторы, а величины ζ_n и ψ_n являются параметрами.

Отметим некоторые свойства введенных функций $R_n(\zeta)$ и $F_n(\psi)$ – РД и УДН. Согласно (3) $F_n(\psi)$ и $A(u) e^{i2\zeta u^2}$ связаны преобразованием Ганкеля. Вследствие этого $F_n(\psi)$ определена на интервале $(0, \infty)$. Поскольку эта функция описывает реальную УДН только на интервале $[0, ka]$, то область видимости для УДН есть $[0, ka]$.

Величина $R_n(\zeta)$ при любых заданных $A(u)$ и ψ_n , в соответствии с (4), определена на всей вещественной оси ζ , Переднему полупространству соответствуют значения $\zeta \in (-\infty, b)$ и область видимости РД есть $(-\infty, b)$. При этом следует учесть, что так как (1) и, следовательно, (4), достаточно точно определяют поле, начиная с ближней границы зоны Френеля – ζ_1 ($|\zeta_1| < \infty$), то $R_n(\zeta)$ будет описывать реальное радиальное распределение только в части области видимости – в интервале $[\zeta_1, b]$.

Постановка и общее решение задачи

При синтезе антенны по заданной пространственной зависимости поля в зоне Френеля, в соответствии с упомянутыми выше его особенностями, вместо трехмерного распределения достаточно задать либо совокупность УДН на множестве сфер, либо совокупность РД вдоль

множества направлений, лежащих в пределах контролируемого объёма. Однако в тех случаях, когда необходимо создать поле с требуемой зависимостью от координат в сравнительно небольшой области пространства, можно потребовать одновременно близости в какой-либо метрике заданных угловой зависимости поля на поверхности сферы определённого радиуса и радиальной зависимости вдоль выбранного направления, то есть близости двух сечений пространственного распределения в ортогональных координатных поверхностях. При этом можно ожидать, что будут близкими и пространственные распределения в рассматриваемом объёме. Так, например, когда необходимо получить нужную зависимость поля от координат в прифокальной области, достаточно ограничиться одной сферой – фокальной и в качестве направления, вдоль которого задается радиальное распределение, выбрать направление вдоль фокальной оси. Такой подход значительно упрощает задачу без существенных потерь информации о характере поля в представляющей интерес области пространства. При синтезе по заданным характеристикам поля в зоне Френеля также нужно иметь в виду, что УДН и РД должны быть «согласованы», то есть каждой УДН должна соответствовать вполне определенная РД, так как они создаются одним и тем же АФР. Поскольку при постановке задачи этот факт трудно, если вообще возможно, учесть, то улучшение близости к одной диаграмме, например УДН, неизбежно приведёт к ухудшению близости ко второй (РД), и наоборот. В связи с этим, при формулировке задачи синтеза следует предусмотреть возможность раздельного регулирования степени близости к заданным угловым и радиальным диаграммам в зависимости от предъявляемых требований к точности воспроизведения тех или иных характеристик поля.

Будем рассматривать УДН и РД по полю в зоне Френеля как элементы гильбертовых пространств L_F^2 и L_R^2 со скалярными произведениями

$$(F_1(\psi), F_2(\psi))_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{ka} F_1(\psi) F_2^*(\psi) p(\psi) d\psi,$$

$$(R_1(\zeta), R_2(\zeta))_g = \frac{1}{(b-\zeta_1)} \int_{\zeta_1}^b R_1(\zeta) R_2^*(\zeta) g(\zeta) d\zeta,$$

где знак * означает комплексное сопряжение, $p(\psi)$ и $g(\zeta)$ – весовые функции.

Предположим, что функция $A(u)$, описывающая АФР поля на апертуре, принадлежит полному нормированному пространству $L_i^2[0,1]$ – пространству интегрируемых в квадрате с весом u на интервале $[0,1]$ функций. При наличии флуктуаций поля возбуждения УДН и РД антенны являются случайными функциями. Поэтому наиболее естественной является формулировка задачи синтеза с привлечением понятий теории вероятностей и случайных процессов. Пусть заданы комплексные угловая и радиальная диаграммы $F^{(0)}(\psi)$ и $R^{(0)}(\zeta)$ на фокальной сфере и вдоль фокальной оси соответственно. Они могут не принадлежать области значений операторов T_F и T_R , то есть в общем случае $F^{(0)}(\psi)$ и $R^{(0)}(\zeta)$ – нереализуемые диаграммы. Различие двух случайных диаграмм можно оценить математическими ожиданиями квадрата нормы в пространстве L_F^2, L_R^2 разности диаграмм соответственно:

$$\varepsilon_F = \left\{ \left\| F^{(0)}(\vec{u}) - F(\vec{u}) \right\|_p^2 \right\},$$

$$\varepsilon_R = \left\{ \overline{\|R^{(0)}(\zeta) - F(\zeta)\|_g^2} \right\},$$

которые, с учетом того, что $F^{(0)}(u)$ и $R^{(0)}(\zeta)$ – детерминированные функции, можно преобразовать к следующему виду:

$$\varepsilon_F = \|F^{(0)}(u) - \overline{F(u)}\|_p^2 + \|\sigma_F\|_p^2, \quad (5)$$

$$\varepsilon_R = \|R^{(0)}(\zeta) - \overline{R(\zeta)}\|_g^2 + \|\sigma_R\|_g^2, \quad (6)$$

где черта – знак математического ожидания. В (5) и (6) первые слагаемые – квадраты невязок средних ДН, а вторые – значения дисперсий УДН и РД, усредненные по всем направлениям пространства и по интервалу определения вдоль фокальной оси соответственно.

Предположим, что необходимо создать либо поле с заданным трехмерным распределением в сравнительно небольшой области пространства, либо поле в зоне Френеля с требуемой зависимостью только одного типа – угловой или радиальной. Тогда для оценки различия пространственных распределений можно использовать функционал

$$\varepsilon = \varepsilon_F + \mu \varepsilon_R, \quad (7)$$

где μ – неотрицательный вещественный весовой множитель, регулирующий степень приоритета требований по той или иной диаграмме.

Пусть антенна возбуждается полем с флуктуациями амплитуды и фазы

$$A(u) = A_0(u) e^{B(u) + i\Phi(u)},$$

где $A_0(u)$ – амплитудно-фазовое распределение в отсутствие флуктуаций, $B(u)$ и $\Phi(u)$ – случайные функции, описывающие флуктуации уровня амплитуды и фазы соответственно.

Примем следующую статистику флуктуаций. Случайные функции $B(u)$ и $\Phi(u)$ – однородные, с нулевым средним и подчиняются нормальному закону распределения. Флуктуации амплитуды и фазы взаимно независимы, коэффициенты корреляции имеют гауссов вид:

$$r_B(u, u') = r_\Phi(u, u') = \exp\left\{ -\frac{u^2 - u'^2}{c^2} \right\},$$

где c – радиус корреляции в относительных единицах, связанный с радиусом корреляции в абсолютных единицах ρ соотношением $c = 2\rho/\lambda$.

В часто встречающемся на практике случае малых флуктуаций дисперсии УДН и РД с точностью до первых степеней дисперсии флуктуаций АФР могут быть представлены в виде:

$$\|\sigma_F\|^2 = \alpha (S_F \overline{A}, \overline{A})_{L_1^2}, \quad (8)$$

$$\|\sigma_R\|^2 = \alpha (S_R \overline{A}, \overline{A})_{L_1^2}. \quad (9)$$

Здесь $\alpha = \sigma_B^2 + \sigma_\Phi^2$ – суммарная дисперсия, \overline{A} – среднее АФР, S_F и S_R – линейные интегральные операторы

$$S_F A = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{21} \int_0^1 K_F(u, u') A(u') u' du',$$

$$S_R A = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{21} \int_0^1 K_R(u, u') A(u') u' du',$$

где

$$K_F(u, u') = \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) I_k \left(2 \frac{uu'}{c^2} \right) e^{i2\zeta_0(u^2 - u'^2) - \frac{u^2 - u'^2}{c^2} ka} \int_0^a J_k(\psi u) J_k(\psi u') p(\psi) \psi d\psi,$$

$$K_R(u, u') = \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) I_k \left(2 \frac{uu'}{c^2} \right) e^{-\frac{u^2 - u'^2}{c^2}} J_k(\psi_0 u) J_k(\psi_0 u') \int_{\zeta_1}^b e^{i2\xi(u^2 - u'^2)} g(\xi) d\xi.$$

При заданных весовых функциях $p(\psi)$ и $g(\xi)$ вычисление интегралов в $K_F(u, u')$ и $K_R(u, u')$ не приводит к каким-либо затруднениям.

С учетом (8) и (9) функционал (7) можно привести к виду:

$$\varepsilon = \left\{ \left[\|F_0\|_{L_F^2}^2 + \mu \|R_0\|_{L_R^2}^2 \right] + \left[(T_F^* T_F \bar{A}, \bar{A})_{L_i^2} + \mu (T_R^* T_R \bar{A}, \bar{A})_{L_i^2} \right] - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} \left[(T_F^* F_0, \bar{A})_{L_i^2} + \mu (T_R^* R_0, \bar{A})_{L_i^2} \right] + \alpha \left[(S_F \bar{A}, \bar{A})_{L_i^2} + \mu (S_R \bar{A}, \bar{A})_{L_i^2} \right] \right\}, \quad (10)$$

где T_F^* и T_R^* - операторы, сопряженные с операторами T_F и T_R соответственно.

Функционал (10) позволяет сформулировать следующую задачу синтеза по критерию близости в метрике L^2 угловых и радиальных диаграмм в зоне Френеля. Определить среднее амплитудно-фазовое распределение \bar{A} и значение дисперсии флуктуаций АФР α , обеспечивающие минимум взвешенной суммы средних квадратов невязок реализаций УДН и РД при условии, что взвешенная суммарная дисперсия УДН и РД не превышает заданного уровня δ :

$$\left[(S_F \bar{A}, \bar{A})_{L_i^2} + \mu (S_R \bar{A}, \bar{A})_{L_i^2} \right] \leq \delta. \quad (11)$$

Эта задача равносильна следующей задаче на условный экстремум: найти среднее АФР $\bar{A}(u)$, минимизирующее взвешенную сумму квадратов невязок средних УДН и РД при условии, что суммарная дисперсия УДН и РД не превышает заданного уровня. Решение её вариационным методом с помощью множителя Лагранжа и приводит к минимизации функционала (10), где α играет роль указанного множителя. При этом множитель Лагранжа может быть найден из условия (11), взятого со знаком равенства.

Оптимальное среднее \bar{A}_α определяется из условия равенства нулю первой вариации ε , приводящего к следующему уравнению:

$$W \bar{A}_\alpha = C,$$

где

$$W = \left[(T_F^* T_F + \mu T_R^* T_R) + \alpha (S_F + \mu S_R) \right]; \\ C = T_F^* F_0 + \mu T_R^* R_0,$$

откуда оптимальный вектор

$$\bar{A}_\alpha = W^{-1} C, \quad (12)$$

а величина α определяется из (11).

Численные результаты

Рассмотрим в качестве примера синтез круглой сфокусированной апертуры, создающей на сфере радиуса $\chi_0 = 0,375$ УДН, описываемую функцией

$$F^{(0)}(\psi) = 2 \frac{J_1(\psi)}{\psi}, \quad (13)$$

и имеющей РД вида:

$$R^{(0)}(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\zeta/b}, & \chi \in [0.3, 0.5], \\ 0, & \chi \notin [0.3, 0.5]. \end{cases} \quad (14)$$

Выбор $R^{(0)}(\zeta)$ в виде (14) обусловлен двумя обстоятельствами. Во-первых, в этом случае радиальная зависимость поля имеет очень простой вид. Во-вторых, известно, что координата главного максимума χ_{\max} радиального распределения поля круглой апертуры с равномерным амплитудным распределением не может превышать значения 0,125. Поэтому представляет интерес оценить возможность создания повышенной интенсивности поля в пределах ограниченной области зоны Френеля на достаточно больших (больше, чем 0,125 расстояния до границы дальней зоны) расстояниях от антенны. Решение будем искать в классе функций, обращающихся в нуль на краю апертуры. В этом случае удобно искомое среднее АФР представить в виде разложения по полной системе функций $\{J_0(\beta_n u)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\bar{A}(u) = \sum_{n=1}^N a_n J_0(\beta_n u),$$

где $\beta_n, n = \overline{1, \infty}$ – корни функции Бесселя $J_0(x)$.

На рис. 1-3 приведены нормированные угловые и радиальные распределения (сплошные кривые) средней интенсивности поля $|\overline{f(\chi, \chi_0)}|^2 / |\overline{f}|^2_{\max}$ и $|\overline{F(0, \psi)}|^2 / |\overline{F}|^2_{\max}$, соответствующие результатам синтеза для трех значений параметра μ , отражающих различные требования к характеру пространственного распределения поля в зоне Френеля. Штрихпунктирными кривыми на рис.(1а – 3а) показаны радиальные зависимости интенсивности поля $|f_1(\chi, \chi_0)|^2 / |f_1|^2_{\max}$, сфокусированной на бесконечность равномерно возбужденной апертуры в отсутствие флуктуаций. Штриховые кривые $|f_0(\chi, \chi_0)|^2$ на этих рисунках соответствуют заданному радиальному распределению поля в зоне Френеля.

На рис. 1б-3б показаны нормированные средние УДН по мощности $|\overline{F_1(\psi)}|^2 / |\overline{F_1}|^2_{\max}$ на передней $\chi = 0,3$ границе контролируемой области пространства (пунктирные кривые) и

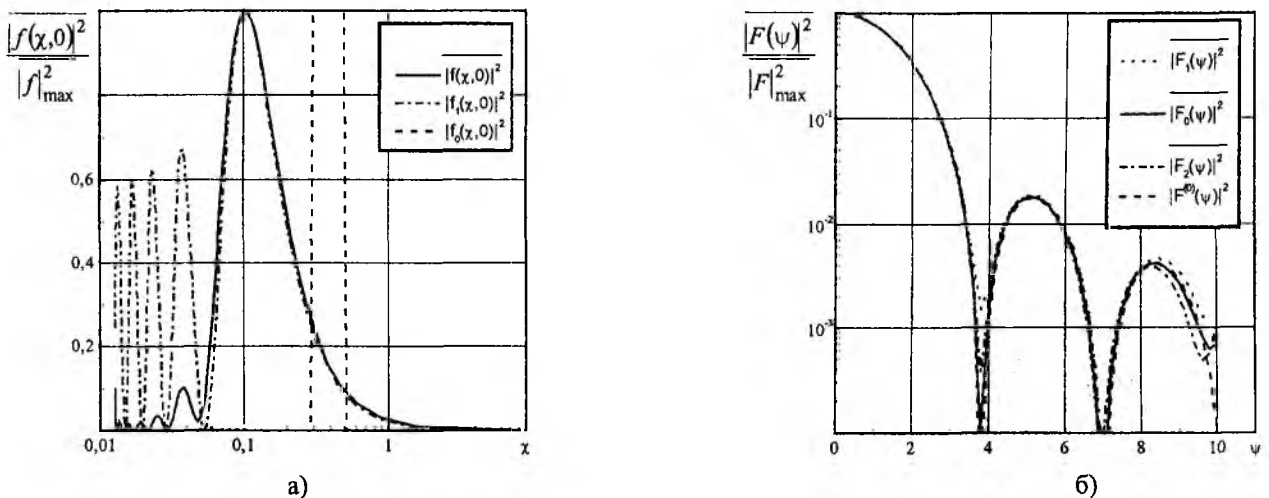


Рис. 1

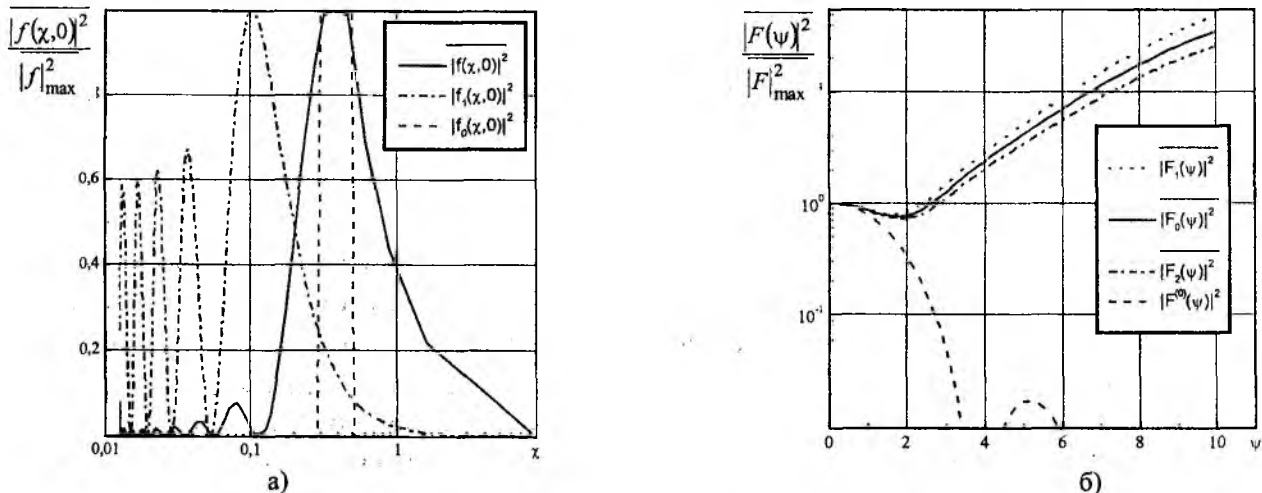


Рис. 2

$|F_2(\psi)|^2 / |F_2|_{\max}^2$ на задней $\chi = 0.5$ границе – штрих-пунктирные кривые. Штриховые кривые на этих рисунках соответствуют заданной УДН $F_0(\psi)$.

В первом случае (рис. 1) преобладающим было требование к точности воспроизведения заданного углового распределения – УДН в фокальной сфере. Оптимальное значение $\alpha_{opt} = 0,26$. На рис. 1б видно очень хорошее воспроизведение требуемой УДН, но, как следует из рис. 1а, продольное распределение значительно отличается от требуемого. Хотя форма продольного распределения вполне удовлетворительна (главный максимум существенно подчеркнут по сравнению, например, со случаем равномерного АФР), но координаты экстремумов, в том числе и главного, такие же, как и в случае равномерного АФР, и в результате наблюдается существенное уменьшение интенсивности поля на фокальной сфере, примерно в 6,5 раз по сравнению с максимально возможным.

Угловые и радиальные зависимости средней интенсивности для случая, когда главным было требование к точности синтеза заданного продольного распределения, показаны на рис. 2 ($\alpha_{opt} = 0,2$). Синтезированное продольное распределение достаточно близко к заданному. Однако полученная при этом УДН практически неприемлема (рис. 2б), так как в направлении нормали к апертуре имеет место провал в угловой диаграмме направленности. На рис.3 показаны синтезированные УДН и РД для случая, когда приемлемыми являются обе диаграммы. При этом $\alpha_{opt} = 0,2$.

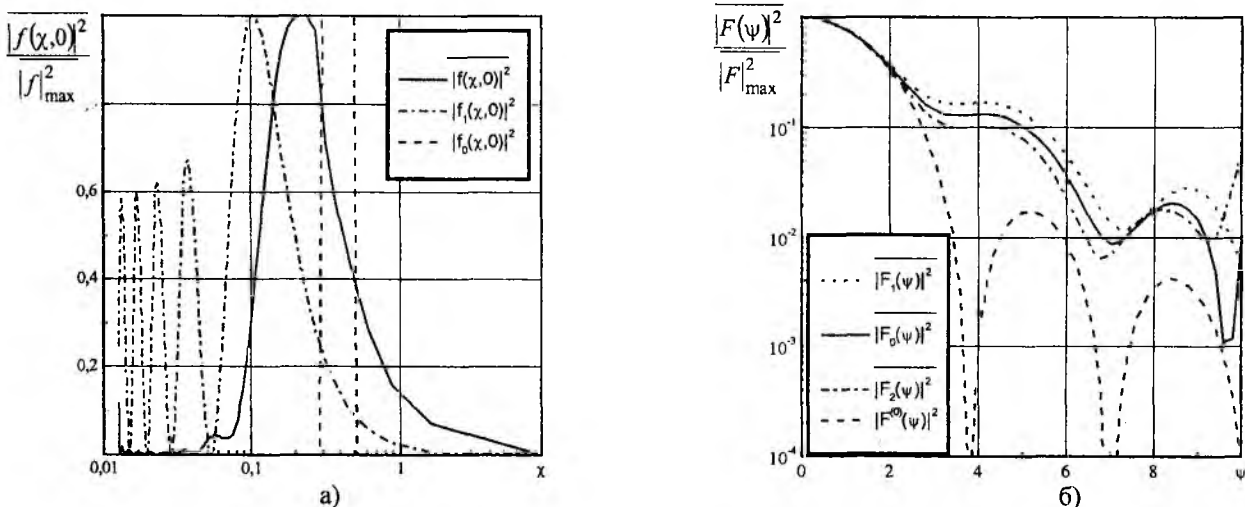


Рис. 3

Рассмотренный пример подтверждает эффективность предложенного метода статистического синтеза апертурных антенн по заданному пространственному распределению поля в зоне Френеля при наличии флуктуаций амплитуды и фазы поля возбуждения, позволяющего определить как среднее амплитудно-фазовое распределение возбуждающего поля, так и допустимую величину дисперсии его флуктуаций.

Список литературы: 1. *Silver S. Microwave Antenna Theory and Design. New York.: McGraw-Hill, 1949. 312 p.*

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 22.11.2002