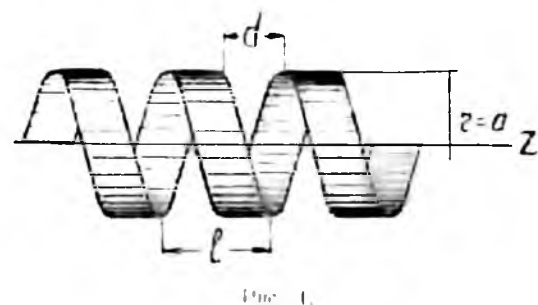


ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ СПИРАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

З. С. Агранович, В. П. Шестопалов

1. Рассмотрим спиральный волновод, образованный металлической спиральной лентой с шириной зазора, равной d , периодом (шагом) l . Радиус волновода $r = a$; θ — угол намотки (рис. 1). Лента металла спирали предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей.

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , приняв ось волновода за ось Oz , и будем искать электромагнитные волны, которые могут распространяться в такой системе в направлении оси z без затухания и с затуханием.



В обоих случаях задача сводится к отысканию решений однородных уравнений Максвелла, которые внутри спирального волновода описывают бегущие волны (возможно, затухающие), а вне волновода — либо затухающие, либо расходящиеся волны.

Пусть $E(r, \varphi, z)$, $H(r, \varphi, z)$ — такое решение (временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен). При замене в этом решении z на $z + l$ мы, очевидно, снова получим решение, удовлетворяющее тем же граничным условиям, так как при смещении на период l вдоль оси волновода система переходит сама в себя. Естественным поэтому считать, что при такой замене искомое решение приобретает только числовой множитель, который мы запишем в виде $e^{ih_0 l}$, и что

$$E(r, \varphi, z) = e^{ih_0 z} E(r, \varphi, z); H(r, \varphi, z) = e^{ih_0 z} H(r, \varphi, z),$$

где $\tilde{E}(r, \varphi, z)$, $\tilde{H}(r, \varphi, z)$ периодичны относительно z с периодом l . Очевидно также, что эти вектор-функции периодичны относительно φ с периодом 2π , так как они однозначны, а координаты (r, φ, z) и $(r, \varphi + 2\pi, z)$ определяют одну и ту же точку в пространстве. Заметим, наконец, что спираль переходит сама в себя, если ее одновременно сместить по оси z на величину Δz и повернуть вокруг оси z на угол $\Delta\varphi$ так, чтобы $\Delta\varphi + \frac{2\pi\Delta z}{l} = 0$. Отсюда вытекает, что $E(r, \varphi, z)$, $H(r, \varphi, z)$ зависят не отдельно от φ и z , а от их комбинации

$$\zeta = \varphi + \frac{2\pi z}{l}, \quad (1)$$

причем из указанной выше периодичности этих вектор-функций относительно φ и z следует, очевидно, их периодичность относительно ζ с пе-

риодом 2π . Поэтому их можно разложить в ряд Фурье, в результате чего получим

$$\begin{aligned}\bar{E}(r, \varphi, z) &= e^{ih_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{E}_n(r) e^{in\left(\varphi + \frac{2\pi z}{l}\right)}, \\ \bar{H}(r, \varphi, z) &= e^{ih_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_n(r) e^{in\left(\varphi + \frac{2\pi z}{l}\right)}.\end{aligned}\quad (2)$$

Составляющие $\bar{E}_n(r)$ и $\bar{H}_n(r)$ внутри волновода ($r < a$) запишутся в виде

$$\begin{aligned}E_{nz} &= \alpha_n p_n^2 J_n(p_n r), \\ E_{nr} &= \alpha_n i h_n p_n J'_n(p_n r) + \beta_n \frac{h_n}{r} J_n(p_n r), \\ E_{n\varphi} &= -\alpha_n \frac{n}{r} h_n J_n(p_n r) + \beta_n i k p_n J'_n(p_n r), \\ H_{nz} &= \beta_n p_n^2 J_n(p_n r), \\ H_{nr} &= -\alpha_n \frac{k n}{r} J_n(p_n r) + \beta_n i h_n p_n J'_n(p_n r), \\ H_{n\varphi} &= -\alpha_n i k p_n J'_n(p_n r) - \beta_n \frac{n}{r} h_n J_n(p_n r),\end{aligned}\quad (3)$$

где α_n, β_n — числовые коэффициенты,

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{l}; \quad p_n = i \sqrt{h_n^2 - k^2}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4)$$

Здесь и дальше под $\sqrt{A}$ понимаем то значение квадратного корня, которое имеет положительную вещественную часть ($\text{Re} \sqrt{A} > 0$), а если $\text{Re} \sqrt{A} = 0$, — то отрицательную мнимую часть ($\text{Im} \sqrt{A} < 0$).

Чтобы удовлетворить уравнениям Максвелла вне волновода ($r > a$) и получить при этом только расходящиеся или затухающие волны, нужно взять составляющие вектор-функций $\bar{E}_n(r)$, $\bar{H}_n(r)$ равными выражениям, которые получаются из правых частей формул (3) при замене коэффициентов α_n, β_n на $\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n$ и функций $J_n(p_n r)$, $J'_n(p_n r)$ — соответственно на $H_n^{(1)}(p_n r)$, $H_n^{(1)'}(p_n r)$.

Распорядившись неопределенными коэффициентами $\alpha_n, \beta_n, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n$, мы должны удовлетворить граничным условиям при $r = a$, т. е. обеспечить равенство нулю тангенциальных составляющих вектора $E(r, \varphi, z)$ и непрерывность r -составляющей вектора $H(r, \varphi, z)$ на металлической ленте, а также непрерывность всего поля на щели между витками ленты.

Из условий для E_z и E_φ следует, что

$$\bar{\alpha}_n = \frac{J_n(p_n a)}{H_n^{(1)}(p_n a)} \alpha_n, \quad \bar{\beta}_n = \frac{J'_n(p_n a)}{H_n^{(1)'}(p_n a)} \beta_n \quad (5)$$

II

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n p_n^2 J_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n n h_n J_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} + i k a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n p_n J'_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} &= 0 \\ (\text{на металле}).\end{aligned}\quad (7)$$

Граничное условие для H , выполняется автоматически в силу (5). Используя (5), а также известное равенство

$$J'_n(x) H_n^{(1)}(x) - J_n(x) H_n^{(1)'}(x) = \frac{\text{const}}{x},$$

из условий для H_z , H_φ и E_r находим, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\rho_n}{H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (8)$$

$$ika \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{H_n^{(1)}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{nh_n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (9)$$

$$ia \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{h_n}{H_n^{(1)}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad (\text{на щели}). \quad (10)$$

Покажем, что уравнение (10) является следствием уравнений (8) и (9). В силу (4)

$$nh_n = \frac{l}{2\pi} (h_n - h_0) h_n = \frac{l}{2\pi} (k^2 - \rho_n^2) - \frac{l}{2\pi} h_0 h_n, \quad (11)$$

и потому, используя (8), имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{nh_n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = \frac{l}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{k^2 - h_0 h_n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z}.$$

Следовательно, уравнение (9) можно записать в виде

$$ika \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{H_n^{(1)}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - \frac{l}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{k^2 - h_0 h_n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad (\text{на щели}). \quad (9')$$

Дифференцируя это равенство по z (что, как легко видеть, законно) и учитывая, что согласно (4)

$$\frac{l}{2\pi} (k^2 - h_0 h_n) h_n = \frac{l}{2\pi} (k^2 h_n - h_0 k^2 + h_0 \rho_n^2) = k^2 n + \frac{lh_0}{2\pi} \rho_n^2,$$

получим

$$\begin{aligned} & -ka \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{h_n}{H_n^{(1)}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - ik^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{n}{\rho_n H_n^{(1)'}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - \\ & - \frac{ilh_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\rho_n}{H_n^{(1)}(\rho_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad (\text{на щели}), \end{aligned}$$

а это уравнение в силу (8) отличается от уравнения (10) лишь множителем ik .

Заметим еще, что в силу (11) и (6) уравнение (7) можно записать в виде

$$-\frac{l}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (k^2 - h_0^2) J_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} + \\ + ika \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n p_n J'_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad (\text{на металле}). \quad (7')$$

Таким образом, для определения коэффициентов a_n и β_n имеем систему четырех однородных уравнений (6), (7'), (8) и (9'). Параметр h_n (волновое число) находится из условия существования у этой системы ненулевого решения.

2. Для дальнейшего исследования этой системы целесообразно ввести безразмерные параметры

$$\nu = \frac{h_0 l}{2\pi}, \quad x = \frac{kl}{2\pi}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{l}{2\pi a} \quad (12)$$

(здесь θ — угол намотки), так что

$$h_n = \frac{2\pi}{l} (n + \nu), \quad p_n a = i \operatorname{ctg} \theta \sqrt{(n + \nu)^2 - x^2}. \quad (13)$$

Положим еще

$$a_n = a x_n p_n^2 J_n(p_n a), \quad b_n = \frac{\beta_n p_n}{\pi H_n^{(1)'}(p_n a)}$$

и введем «спиральную координату» по формуле (1).

Тогда уравнения (6), (7'), (8) и (9') после умножения каждого из них на $e^{i\nu\varphi}$ запишутся в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n+\nu)\zeta} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (14)$$

$$-\operatorname{tg} \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{x^2 - \nu(n + \nu)}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} + ika\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J'_n(p_n a) H_n^{(1)'}(p_n a) e^{i(n+\nu)\zeta} = 0 \\ (\text{на металле}), \quad (14a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(n+\nu)\zeta} = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (14б)$$

$$\frac{ika}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{p_n^2 a^2 J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a)} e^{i(n+\nu)\zeta} - \operatorname{tg} \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{x^2 - \nu(n + \nu)}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} = 0. \\ (\text{на щели}). \quad (14в)$$

Обозначим

$$x(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta}; \quad y(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{x^2 - (n + \nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta}.$$

Согласно уравнениям (14) и (146) имеем

$$x^2 x(\zeta) + x''(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n+\nu)\zeta} = 0 \quad (\text{на металле}),$$

$$x^2 y(\zeta) + y''(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(n+\nu)\zeta} = 0 \quad (\text{на щели}),$$

и поэтому

$$x(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{x^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} = M_1 e^{ix\zeta} + M_2 e^{-ix\zeta} \quad (\text{на металле}), \quad (15)$$

$$y(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{x^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} = N_1 e^{ix\zeta} + N_2 e^{-ix\zeta} \quad (\text{на щели}), \quad (15a)$$

где M_1, M_2, N_1, N_2 — некоторые константы.

Используя равенства (15, 15a), находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{x^2 - \nu(n+\nu)}{x^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} &= x^2 x(\zeta) + i\nu x'(\zeta) = (x^2 - \nu x) M_1 e^{ix\zeta} + \\ &+ (x^2 + \nu x) M_2 e^{-ix\zeta} \quad (\text{на металле}), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{x^2 - \nu(n+\nu)}{x^2 - (n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} &= x^2 y(\zeta) + i\nu y'(\zeta) = (x^2 - \nu x) N_1 e^{ix\zeta} + \\ &+ (x^2 + \nu x) N_2 e^{-ix\zeta} \quad (\text{на щели}) \end{aligned}$$

и, следовательно, интересующая нас система уравнений (14—14в) распадается на следующие две системы (делим все уравнения на $e^{i\nu\zeta}$):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{ika}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{p_n a^2 J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a)} e^{in\zeta} - x \operatorname{tg} \theta [(x - \nu) N_1 e^{i(x-\nu)\zeta} + \\ + (x + \nu) N_2 e^{-i(x+\nu)\zeta}] = 0 \quad (\text{на щели}), \end{aligned} \quad (16'a)$$

и

$$\begin{aligned} ika\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J'_n(p_n a) H_n^{(1)'}(p_n a) e^{in\zeta} - x \operatorname{tg} \theta [(x - \nu) M_1 e^{i(x-\nu)\zeta} + \\ + (x + \nu) M_2 e^{-i(x+\nu)\zeta}] = 0 \quad (\text{на металле}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\zeta} = 0 \quad (\text{на щели}). \quad (17a)$$

Эти системы мы преобразуем далее, используя асимптотику функций Бесселя и известные связи между ними [1].

Согласно (13), $\lim_{|n| \rightarrow \infty} p_n a = \infty$, причем $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \arg p_n a = \frac{\pi}{2}$ (то есть при больших $|n|$ число $p_n a$ является «почти» чисто мнимым). Обозначая $p_n = i q_n$, будем иметь

$$J_n(p_n a) = e^{\frac{n\pi}{2}} I_n(q_n a), \quad H_n^{(1)}(p_n a) = -\frac{2i}{\pi} e^{-\frac{n\pi}{2}} K_n(q_n a),$$

где $q_n a$ «почти» положительно при больших $|n|$, т. е. $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \arg q_n a = 0$.

Воспользовавшись асимптотическими формулами для I_n и K_n при больших n , $x > 0$, получаем при $|n| \rightarrow \infty$

$$J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a) = \frac{-i}{\pi \sqrt{n^2 - p_n^2 a^2}} [1 + O(|n|^{-2})].$$

Но

$$n^2 - p_n^2 a^2 = n^2 + \operatorname{ctg}^2 \theta [(n + \nu)^2 - x^2] = n^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) + 2\nu n \operatorname{ctg}^2 \theta + (\nu^2 - x^2) \operatorname{ctg}^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} [(n + \nu \cos^2 \theta)^2 + (\nu^2 - x^2) \cos^2 \theta - \nu^2 \cos^4 \theta],$$

так что при больших $|n|$

$$\sqrt{n^2 - p_n^2 a^2} = \frac{n + \nu \cos^2 \theta}{\sin \theta} \frac{|n|}{n} [1 + O(|n|^{-2})]$$

и, значит, при $|n| \rightarrow \infty$

$$J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a) = -\frac{i \sin \theta}{\pi (n + \nu \cos^2 \theta)} \frac{|n|}{n} [1 + O(|n|^{-2})], \quad (18)$$

$$\frac{1}{p_n^2 a^2 J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a)} = \frac{i \pi (n + \nu \cos^2 \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta [x^2 - (n + \nu)^2]} \frac{|n|}{n} [1 + O(|n|^{-2})] \quad (19)$$

(см. (13)).

С помощью известных равенств для бесселевых функций, а также имея в виду, что

$$\frac{1}{n - 1 + \nu \cos^2 \theta} + \frac{1}{n + 1 + \nu \cos^2 \theta} = \frac{2(n + \nu \cos^2 \theta)}{(n + \nu \cos^2 \theta)^2 - 1} = \frac{2}{n + \nu \cos^2 \theta} + \frac{2}{[(n + \nu \cos^2 \theta)^2 - 1](n + \nu \cos^2 \theta)} = \frac{2}{n + \nu \cos^2 \theta} + O(|n|^{-3}),$$

находим, что при $|n| \rightarrow \infty$

$$J_n^*(p_n a) H_n^{(1)*}(p_n a) = \frac{-i \sin \theta}{\pi (n + \nu \cos^2 \theta)} \left[1 + \frac{n^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{(n + \nu)^2 - x^2} \right] \frac{|n|}{n} [1 + O(|n|^{-2})]. \quad (20)$$

Умножим теперь уравнение (16а) на $e^{i\alpha\zeta}$, уравнение (17) — на $e^{i\beta\zeta}$, где α и β — пока неопределенные константы, и продифференцируем эти уравнения по ζ . Имея в виду асимптотические формулы (19) и (20), заметим, что

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\pi (n + \nu \cos^2 \theta) (n + \alpha) \sin \theta}{\cos^2 \theta [(n + \nu)^2 - x^2]} = \frac{\pi \sin \theta}{\cos^2 \theta},$$

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{(n + \beta) \sin \theta}{\pi (n + \nu \cos^2 \theta)} \left[1 + \frac{n^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{(n + \nu)^2 - x^2} \right] = \frac{\sin \theta}{\pi \cos^2 \theta}.$$

и выберем константы α, β так, чтобы величины

$$\begin{aligned} \frac{\pi(n + \nu \cos^2 \theta)(n + \alpha) \sin \theta}{\cos^2 \theta [(n + \nu)^2 - \alpha^2]} - \frac{\pi \sin \theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{\pi \sin \theta [(\alpha + \nu \cos^2 \theta - 2\nu)n + \alpha \nu \cos^2 \theta + \alpha^2 - \nu^2]}{\cos^2 \theta [(n + \nu)^2 - \alpha^2]}, \\ \frac{(n + \beta) \sin \theta}{\pi(n + \nu \cos^2 \theta)} \left[1 + \frac{n^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{(n + \nu)^2 - \alpha^2} \right] - \frac{\sin \theta}{\pi \cos^2 \theta} &= \\ = \frac{\sin \theta [(\beta + 2\nu \cos^2 \theta - \nu \cos^2 \theta - 2\nu)n^2 + 0(n + \nu)]}{\pi(n + \nu \cos^2 \theta) [(n + \nu)^2 - \alpha^2] \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

были $O(|n|^{-2})$ при $|n| \rightarrow \infty$, т. е. возьмем

$$\alpha = \beta = \nu(2 - \cos^2 \theta) = \nu(1 + \sin^2 \theta). \quad (21)$$

Тогда, полагая *

$$\frac{i(n + \alpha)}{p_n^2 a^2 J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a)} = \frac{\pi \sin \theta |n|}{\cos^2 \theta n} (1 - \varepsilon_n), \quad (22)$$

$$i(n + \beta) J_n(p_n a) H_n^{(1)'}(p_n a) = \frac{\sin \theta}{\pi \cos^2 \theta} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_n),$$

где

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{i \cos^2 \theta [n + \nu(1 + \sin^2 \theta)]}{\pi \sin \theta p_n^2 a^2 J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a)} \frac{|n|}{n}, \quad (23)$$

$$\delta_n = 1 - \frac{i \pi \cos^2 \theta}{\sin \theta} [n + \nu(1 + \sin^2 \theta)] J_n(p_n a) H_n^{(1)'}(p_n a) \frac{|n|}{n},$$

будем иметь при $|n| \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_n = O(|n|^{-2}), \quad \delta_n = O(|n|^{-2}). \quad (24)$$

Таким образом, из уравнений (16а) и (17) после умножения на $e^{i\nu(1+\sin^2\theta)\zeta}$, дифференцирования по ζ и сокращения на $e^{i\nu(1+\sin^2\theta)\zeta}$ получаем

$$\left(\frac{ka \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\alpha}{\cos \theta} \right):$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) e^{in\zeta} - \sin \theta [(\alpha - \nu)(\alpha + \nu \sin^2 \theta) N_1 e^{i(\alpha - \nu)\zeta} - \\ - (\alpha + \nu)(\alpha - \nu \sin^2 \theta) N_2 e^{-i(\alpha + \nu)\zeta}] = 0 \quad (\text{на щели}); \end{aligned} \quad (16'a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{|n|}{n} (1 - \delta_n) e^{in\zeta} - \sin \theta [(\alpha - \nu)(\alpha + \nu \sin^2 \theta) M_1 e^{i(\alpha - \nu)\zeta} - \\ - (\alpha + \nu)(\alpha - \nu \sin^2 \theta) M_2 e^{-i(\alpha + \nu)\zeta}] = 0 \quad (\text{на металле}). \end{aligned} \quad (17')$$

Система равенств (16) и (16'a) (соответственно (17') и (17a)) не полностью эквивалентна равенствам (16) и (16a) (соответственно (17) и (17a)), так как из нее следует только, что производная от левой части (16a) (соответственно (17)) равна нулю, а сама эта левая часть постоянна. Чтобы удовлетворить уравнению (16a) (соответственно (17)), мы должны обратить в нуль его левую часть хотя бы в одной точке на щели (соответственно на металле). Пусть начало отсчета спиральной координаты ζ помещено в середине одной из щелей. Тогда точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \pi$ лежат соответственно в середине щели и в середине металлической ленты,

* Считаем $\frac{|0|}{0} = 1$.

и дополнительными уравнениями будут следующие (используем еще равенства (22) и (21)):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n + \nu (1 + \sin^2 \theta)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) - \sin \theta [(x - \nu) N_1 + (x + \nu) N_2] = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n + \nu (1 + \sin^2 \theta)} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_n) - \sin \theta [(x - \nu) e^{i(x-\nu)\pi} M_1 + (x + \nu) e^{-i(x+\nu)\pi} M_2] = 0. \quad (26)$$

Для определения констант M_1 , M_2 , N_1 и N_2 имеем равенства (15), а также равенства, получающиеся из (15) дифференцированием по ζ , причем те из них, которые относятся к щели, очевидно, достаточно удовлетворить в одной точке $\zeta = 0$, а те, которые относятся к металлу, — в одной точке $\zeta = \pi$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{x^2 - (n + \nu)^2} &= M_1 e^{i(x-\nu)\pi} + M_2 e^{-i(x+\nu)\pi}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n (n + \nu)}{x^2 - (n + \nu)^2} &= x [M_2 e^{-i(x+\nu)\pi} - M_1 e^{i(x-\nu)\pi}], \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{x^2 - (n + \nu)^2} &= N_1 + N_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n (n + \nu)}{x^2 - (n + \nu)^2} &= x (N_1 - N_2), \end{aligned} \quad (27)$$

а так как

$$\frac{n + \nu}{x^2 - (n + \nu)^2} = \frac{x^2}{[x^2 - (n + \nu)^2] (n + \nu)} - \frac{1}{n + \nu},$$

то, обозначая

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{x^2 - (n + \nu)^2}, \quad (28)$$

можем эти равенства записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n = M_1 e^{i(x-\nu)\pi} + M_2 e^{-i(x+\nu)\pi}; \quad (29)$$

$$x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n a_n}{n + \nu} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n + \nu} = x [M_2 e^{-i(x+\nu)\pi} - M_1 e^{i(x-\nu)\pi}]; \quad (30)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \gamma_n b_n = N_1 + N_2; \quad (31)$$

$$x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n b_n}{n + \nu} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n + \nu} = x (N_1 - N_2). \quad (32)$$

Система уравнений (16), (16'a), (17'), (17a), (25), (26), (29), (30), (31) и (32) полностью эквивалентна исходной системе (14—14в). При сделан-

ном нами выборе начала отсчета «спиральной координаты» ζ шель лежит в области, где $|\zeta| < \frac{\pi d}{l}$, металл — где $\frac{\pi d}{l} < |\zeta| < \pi$ и далее с периодом 2π (рис. 1). Заметим, что содержащиеся в равенствах (15) константы M_1 и M_2 (N_1 и N_2) могут иметь различные значения на непересекающихся промежутках ζ , занятых металлической лентой (щелью). Так как при выводе равенств (25), (26) и (29—32) мы брали на щели точку $\zeta = 0$, а на металле точку $\zeta = \pi$, то входящие в эти равенства константы M_1 и M_2 (N_1 и N_2) относятся к промежутку $|\zeta - \pi| < \frac{\pi(l-d)}{l}$ (соответственно $|\zeta| < \frac{\pi d}{l}$).

В соответствии с этим мы запишем системы (16) — (16'a) и (17') — (17a) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta} &= 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\zeta| < \pi, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) e^{in\zeta} - \sin \theta [(x - v)(x + v \sin^2 \theta) N_1 e^{i(x-v)\zeta} - \\ &- (x + v)(x - v \sin^2 \theta) N_2 e^{-i(x+v)\zeta}] = 0, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} (1 - \delta_n) e^{in\xi} - \sin \theta [(x - v)(x + v \sin^2 \theta) M_1 e^{i(x-v)(\pi+\xi)} - \\ &- (x + v)(x - v \sin^2 \theta) M_2 e^{-i(x+v)(\pi+\xi)}] = 0, \quad |\xi| < \frac{\pi(l-d)}{l}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n e^{in\xi} &= 0, \quad \frac{\pi(l-d)}{l} < |\xi| < \pi, \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

сделав в последних двух уравнениях замену

$$\zeta - \pi = \xi.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$e^{-isx} = \frac{\sin s\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+s} e^{inx}, \quad |x| < \pi,$$

которое проверяется непосредственным вычислением коэффициентов Фурье, и введем еще обозначения

$$\frac{1}{\pi} \sin \theta \cdot (x - v)(x + v \sin^2 \theta) \cdot \sin (v - x)\pi = \alpha(x; v; \theta), \quad (33)$$

$$M_1 e^{i(x-v)\pi} = \bar{M}_1, \quad M_2 e^{-i(x+v)\pi} = \bar{M}_2. \quad (34)$$

Тогда системы (A) и (B) перепишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta} &= 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\zeta| < \pi, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} e^{in\zeta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n + N_1 \alpha(x; v; \theta) \frac{(-1)^n}{n + (v - x)} - \right. \\ &\left. - N_2 \alpha(-x; v; \theta) \frac{(-1)^n}{n + (v + x)} \right] e^{in\zeta}, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{l}; \end{aligned} \right\} \quad (A')$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n e^{in\xi} &= 0, \quad \frac{\pi(l-d)}{l} < |\xi| < \pi; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} e^{in\xi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(-1)^n b_n \frac{|n|}{n} \delta_n + \tilde{M}_1 \alpha(x; \nu; \theta) \frac{(-1)^n}{n + (\nu - x)} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{M}_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \frac{(-1)^n}{n + (\nu + x)} \right] e^{in\xi}, \quad |\xi| < \frac{\pi(l-d)}{l}. \end{aligned} \right\} (B')$$

Подобные системы уравнений рассмотрены в работе [2]. Используя полученные там результаты, можем заменить системы (A') и (B') эквивалентными им равенствами

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_m^n \left(\frac{\pi d}{l} \right) + N_1 \cdot \alpha(x; \nu; \theta) V_m^{[s]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu - x \right) - \\ &\quad - N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) V_m^{[s]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu + x \right) + 2c_1 R_m \left(\frac{\pi d}{l} \right); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (-1)^m b_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} \delta_n V_m^n \left(\frac{\pi(l-d)}{l} \right) + \tilde{M}_1 \alpha(x; \nu; \theta) V_m^{[s]} \left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - x \right) - \\ &\quad - \tilde{M}_2 \alpha(-x; \nu; \theta) V_m^{[s]} \left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + x \right) + 2c_2 R_m \left(\frac{\pi(l-d)}{l} \right) \quad (36) \\ &\quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы*), величины $R_m(\delta)$, $V_m^n(\delta)$ выражаются через полиномы Лежандра [2], а

$$\begin{aligned} V_m^{[s]}(\delta; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n V_m^n(\delta)}{n+s} = \frac{(m+1)\pi}{2(m+s)\sin\pi s} [P_m(u) P_{s-2}(u) - \\ &\quad - P_{m+1}(u) P_{s-1}(u)] \quad (u = \cos\delta). \end{aligned} \quad (37)$$

С помощью (35) и (36) мы теперь преобразуем уравнения (25), (26), (30) и (32).

В силу (35)

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_m \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2\theta)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n \left(\frac{\pi d}{l} \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2\theta)} + \\ &\quad + N_1 \alpha(x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^{[s]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu - x \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2\theta)} - \\ &\quad - N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^{[s]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu + x \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2\theta)} + 2c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_m \left(\frac{\pi d}{l} \right) \frac{|m|}{m}}{m + \nu(1 + \sin^2\theta)} = \end{aligned}$$

* Можно показать, что $c_1 = a_{-1}$, $c_2 = -b_{-1}$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{[\sigma]}^n \left(\frac{\pi d}{l}; \nu (1 + \sin^2 \theta) \right) + \\
&+ N_1 \alpha(x; \nu; \theta) \tilde{V}_{[\sigma]}^{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu - x; \nu (1 + \sin^2 \theta) \right) - \\
&- N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \tilde{V}_{[\sigma]}^{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu + x; \nu (1 + \sin^2 \theta) \right) + 2c_1 R_{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu (1 + \sin^2 \theta) \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{[\sigma]}(\delta; s) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_m(\delta) \frac{|m|}{m}}{m+s} = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} P_{s-1}(u); \\
V_{[\sigma]}^n(\delta; s) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n(\delta) \frac{|m|}{m}}{m+s} = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} \frac{s-1}{n+s} [P_{s-1}(-u) P_{n+1}(u) + \\
&+ P_{(s-2)}(-u) P_n(u)] + \frac{1}{n+s};
\end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{[\sigma]}^{[\sigma]}(\delta; s_1, s_2) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^{[\sigma]}(\delta; s_1) \frac{|m|}{m}}{m+s_1} = \frac{\pi^2}{2(s_1-s_2) \sin \pi s_1} \left\{ \frac{s_1-1}{\sin \pi s_1} [P_{s_1-1}(-u) P_{s_1-2}(u) + \right. \\
&+ P_{s_1-2}(-u) P_{s_1-1}(u) - \frac{s_2-1}{\sin \pi s_2} [P_{s_2-1}(-u) P_{s_1-2}(u) + P_{s_2-2}(-u) P_{s_1-1}(u)] \Big\},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m a_m}{m+\nu} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^n \left(\frac{\pi d}{l} \right)}{m+\nu} + \\
&+ N_1 \alpha(x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu - x \right)}{m+\nu} - \\
&- N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu + x \right)}{m+\nu} + \\
&+ 2c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m R_m \left(\frac{\pi d}{l} \right)}{m+\nu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{[\sigma]}^n \left(\frac{\pi d}{l}; \nu \right) + \\
&+ N_1 \alpha(x; \nu; \theta) V_{[\sigma]}^{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu - x; \nu \right) - N_2 \alpha(-x; \nu; \theta) \times \\
&\times V_{[\sigma]}^{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu + x; \nu \right) + 2c_1 R_{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu \right),
\end{aligned}$$

где

$$R_{[\sigma]}(\delta; s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m R_m(\delta)}{m+s} = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} P_{s-1}(u);$$

$$V_{[\sigma]}^n(\delta; s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^n(\delta)}{m+s} =$$

$$= \frac{s-1}{2(n+s)} \frac{\pi}{\sin \pi s} [P_{s-1}(u) P_{n+1}(u) - P_{s-2}(u) P_n(u)] \quad (39)$$

$$V_{[\sigma]}^{[\sigma]}(\delta; s_1, s_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V_m^{[\sigma]}(\delta; s_1)}{m+s_2} = \frac{\pi^2 (s_2-1)}{2(s_2-s_1) \sin \pi s_1 \sin \pi s_2} \times$$

$$\times [P_{s_1-2}(u) P_{s_2-1}(u) - P_{s_1-2}(u) P_{s_1-1}(u)].$$

Обозначая

$$W_{[\sigma]}^n(\delta; s) = V_{[\sigma]}^n(\delta; s) - \frac{1}{n+s}, \quad (40)$$

можем равенства (25) и (30) записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_{[\sigma]}^n\left(\frac{\pi d}{l}; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) +$$

$$+ N_1 \left[\alpha(x; \nu; \theta) \tilde{V}_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l}; \nu-x; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) - (x-\nu) \sin \theta \right] -$$

$$- N_2 \left[\alpha(-x; \nu; \theta) \tilde{V}_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l}; \nu+x; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) + (x+\nu) \sin \theta \right] -$$

$$+ 2c_1 R_{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) = 0; \quad (41)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left[\frac{x^2 \eta_n}{n+\nu} - \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{[\sigma]}^n\left(\frac{\pi d}{l}; \nu\right) \right] - N_1 \alpha(x; \nu; \theta) V_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l}; \nu-x; \nu\right) +$$

$$+ N_2 \cdot \alpha(-x; \nu; \theta) V_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l}; \nu+x; \nu\right) - 2c_1 R_{[\sigma]} \left(\frac{\pi d}{l}; \nu\right) -$$

$$- x \tilde{M}_1 + x \tilde{M}_2 = 0. \quad (42)$$

Используя аналогичным образом (36), из равенств (26) и (32) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} \delta_n W_{[\sigma]}^n\left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) +$$

$$+ \tilde{M}_1 \left[\alpha(x; \nu; \theta) \tilde{V}_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu-x; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) - (x-\nu) \sin \theta \right] -$$

$$- \tilde{M}_2 \left[\alpha(-x; \nu; \theta) \tilde{V}_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu+x; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) + (x+\nu) \sin \theta \right] +$$

$$+ 2c_2 R_{[\sigma]} \left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu(1+\sin^2 \theta)\right) = 0; \quad (43)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \left[\frac{x^2 \eta_n}{n+\nu} - \frac{|n|}{n} \delta_n V_{[\sigma]}^n\left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu\right) \right] -$$

$$- \tilde{M}_1 \cdot \alpha(x; \nu; \theta) V_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu-x; \nu\right) +$$

$$+ \tilde{M}_2 \cdot \alpha(-x; \nu; \theta) V_{[\sigma]}^{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu+x; \nu\right) -$$

$$- 2c_2 R_{[\sigma]} \left(\frac{\pi(l-d)}{l}; \nu\right) - x N_1 + x N_2 = 0. \quad (44)$$

Таким образом, окончательно имеем бесконечную систему линейных однородных уравнений (29), (31), (35), (36), (41), (42), (43) и (44) с неизвестными a_n , $(-1)^n b_n$, c_1 , c_2 , $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, N_1 и N_2 . Приравнявая нулю определитель этой системы, получаем дисперсионное уравнение.

Сходимость этого определителя обеспечивается тем, что входящие в него параметры ϵ_n , δ_n и η_n равны 0 ($|n|^{-2}$) при $|n| \rightarrow \infty$ (см. (24) и (28)).

Этим обстоятельством можно воспользоваться и для численных расчетов, сохраняя в дисперсионном уравнении только конечное число параметров ϵ_n , δ_n , η_n , имеющих наибольшие значения, и полагая остальные равными нулю.

3. Укажем еще одну форму для дисперсионного уравнения, которая может оказаться предпочтительнее при численных расчетах (в частности, если все ϵ_n и δ_n при $n \neq m$ считать равными нулю, что соответствует $(-m)$ -му пространственному резонансу). Для этого используем равенства (27). Умножив первое (третье) из них на x , добавим к нему и вычтем из него второе (соответственно четвертое). В результате этого вместо (27) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n + (v - x)} &= -2x \bar{M}_1, & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n + (v + x)} &= 2x \bar{M}_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n + (v - x)} &= -2x N_1, & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n + (v + x)} &= 2x N_2 \end{aligned} \quad (27')$$

(мы использовали обозначения (34)).

Рассмотрим теперь системы уравнений (35), (41) и (36), (43), считая в них неизвестными a_n и c_1 , соответственно $(-1)^n b_n$ и c_2 . Из этих систем, как легко видеть, будем иметь

$$a_n = \beta_n^{(1)} \left(\epsilon_0, \epsilon_{\pm 1}, \dots, \frac{\pi d}{l} \right) N_1 + \beta_n^{(2)} \left(\epsilon_0, \epsilon_{\pm 1}, \dots, \frac{\pi d}{l} \right) N_2, \quad (45)$$

$$(-1)^n b_n = \beta_n^{(1)} \left(\delta_0, \delta_{\pm 1}, \dots, \frac{\pi(l-d)}{l} \right) \bar{M}_1 + \beta_n^{(2)} \left(\delta_0, \delta_{\pm 1}, \dots, \frac{\pi(l-d)}{l} \right) \bar{M}_2,$$

где $\beta_n^{(1)}(\dots)$ и $\beta_n^{(2)}(\dots)$ — коэффициенты, зависящие от указанных в скобках аргументов.

Подставив (45) в (27'), получаем следующую систему четырех линейных однородных уравнений с неизвестными $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, N_1 и N_2 :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)} \left(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l} \right)}{n + (v - x)} N_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)} \left(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l} \right)}{n + (v - x)} N_2 &= -2x \bar{M}_1; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)} \left(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l} \right)}{n + (v + x)} N_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)} \left(\epsilon_0, \dots, \frac{\pi d}{l} \right)}{n + (v + x)} N_2 &= 2x \bar{M}_2; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)} \left(\delta_0, \dots, \frac{\pi(l-d)}{l} \right)}{n + (v - x)} \bar{M}_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)} \left(\delta_0, \dots, \frac{\pi(l-d)}{l} \right)}{n + (v - x)} \bar{M}_2 &= \\ &= -2x N_1; \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}\right)}{n + (\nu + \kappa)} \tilde{M}_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}\right)}{n + (\nu + \kappa)} \tilde{M}_2 = 2\kappa N_2.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}(\varepsilon_0, \dots; \Delta)}{n + s} &= S_1(\varepsilon_0, \dots; \Delta; s); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}(\varepsilon_0, \dots; \Delta)}{n + s} &= S_2(\varepsilon_0, \dots; \Delta; s); \end{aligned} \quad (46)$$

тогда эту систему можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} S_1\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa\right) & S_2\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa\right) \\ S_1\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa\right) & S_2\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = 2\kappa \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S_1\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa\right) & S_2\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa\right) \\ S_1\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa\right) & S_2\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix} = 2\kappa \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

Исключая из этих равенств $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$, приходим к системе линейных однородных уравнений с неизвестными N_1 и N_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\kappa^2} & \begin{pmatrix} -S_1\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa\right) & -S_2\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa\right) \\ S_1\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa\right) & S_2\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa\right) \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} -S_1\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa\right) & -S_2(\dots) \\ S_1\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa\right) & S_2(\dots) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получаем дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \det & \left[\frac{1}{4\kappa^2} \begin{pmatrix} -S_1\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa\right) & -S_2(\dots) \\ S_1\left(\delta_0, \dots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa\right) & S_2(\dots) \end{pmatrix} \times \right. \\ & \times \left. \begin{pmatrix} -S_1\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa\right) & -S_2(\dots) \\ S_1\left(\varepsilon_0, \dots; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa\right) & S_2(\dots) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

4. Дисперсионное уравнение спирального волновода (47) можно значительно упростить, если предположить ν и κ настолько малыми, что при $s = \nu_1, \nu_2, \nu_3 \dots$, где $\nu_1 = \nu - \kappa$, $\nu_2 = \nu + \kappa$, $\nu_3 = \nu(1 + \sin^2 \theta)$, допустимы приближенные равенства:

$$\sin \pi s \approx \pi s; \quad P_s(u) \approx P_0(u) + s \frac{\partial P_s(u)}{\partial s} \Big|_{s=0} = 1 + s \ln \frac{1+u}{2};$$

$$P_{s-1}(u) \approx P_{-1}(u) + s \frac{\partial P_{s-1}(u)}{\partial s} \Big|_{s=0} = 1 - s \ln \frac{1+u}{2}.$$

В этом случае имеем, в частности, для нулевого пространственного резонанса

$$\beta_0^{(1)}\left(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}\right) \approx \frac{\nu_1 \nu_3 \sin \theta}{\epsilon_0 - 1 + \nu_3 \ln \frac{1+u}{2}},$$

а так как (см. (23)) $\epsilon_0 - 1 = -\frac{\nu_2 \sin \theta}{2\nu_1 \nu_2 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a)}$, ($p_0 = l q_0$), то

$$\beta_0^{(1)}\left(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}\right) \approx -2\nu_1^2 \nu_2 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a).$$

Далее находим

$$S_1\left(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa\right) = -2\nu_1 \left[\nu_2 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \nu_1 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right];$$

$$S_1\left(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa\right) = -2\nu_1^2 \left[I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right].$$

Меняя в этих выражениях местами величины ν_1 и ν_2 , получаем

$$S_2\left(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu - \kappa\right) \approx 2\nu_2^2 \left[I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right];$$

$$S_2\left(\epsilon_0; \frac{\pi d}{l}; \nu + \kappa\right) \approx 2\nu_2 \left[\nu_1 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \nu_2 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right].$$

Используя затем равенство (см. (23))

$$\delta_0 - 1 = \frac{-i\pi \cos^2 \theta \cdot \nu_2}{\sin \theta} J_0^*(p_0 a) H_0^{(1)*}(p_0 a) = \frac{-2 \cos^2 \theta}{\sin \theta} \nu_3 I_1(q_0 a) K_1(q_0 a),$$

аналогичным образом находим

$$\beta_u^{(1)}\left(\delta_0; \frac{\pi(l-d)}{l}\right) \approx -\frac{\nu_1 \sin \theta}{2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_1\left(\delta_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa\right) \approx -\frac{\sin \theta}{2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_1\left(\delta_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa\right) \approx -\frac{\frac{\nu_2}{\nu_1} \sin \theta}{2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_2\left(\delta_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu - \kappa\right) \approx \frac{\frac{\nu_2}{\nu_1} \sin \theta}{2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]};$$

$$S_2\left(\delta_0; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu + \kappa\right) \approx \frac{\sin \theta}{2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]}.$$

Обозначая элементы определителя в левой части равенства (47) через A_{ik} ($i, k = 1, 2$), получим для них следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &\approx \frac{2v_1 \sin \theta \left| v_2 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - v_1 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right| + 2v_1 v_2 \sin \theta \left| I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|}{8x^2 \left| \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|} - 1; \\
 A_{12} &\approx - \frac{2v_2^2 \sin \theta \left| I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right| + \frac{2v_2^2}{v_1} \sin \theta \left| v_1 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - v_2 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|}{8x^2 \left| \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|}; \\
 A_{21} &\approx - \frac{2 \frac{v_1^2}{v_2} \sin \theta \left| v_2 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - v_1 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right| + 2v_1^2 \sin \theta \left| I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|}{8x^2 \left| \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|}; \\
 A_{22} &\approx \frac{2v_1 v_2 \sin \theta \left| I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right| + 2v_2 \sin \theta \left| v_1 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - v_2 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|}{8x^2 \left| \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|} - 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае дисперсионное уравнение (47), т. е. уравнение

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0,$$

можно приближенно записать в виде

$$1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{4x^2} \frac{4v_1 v_2 I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - (v_1 + v_2)^2 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l}}{I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \ln \cos \frac{\pi d}{2l}} = 0,$$

или

$$1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta \left| (v^2 - x^2) I_0(q_0 a) K_0(q_0 a) - v^2 \sin \theta \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|}{x^2 \left| I_1(q_0 a) K_1(q_0 a) - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right|} = 0;$$

при θ малом это уравнение совпадает с уравнением, полученным в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Erdelyi. Higher transcendental functions. II. New-York—Toronto—London, 122, 1953.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 381, 1962.
3. Н. Н. Смирнов. Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями. ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1494, 1958.