ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Г. Евдокимов, Б. Г. Шеховцов
Харьков

Рассмотрим следующую задачу математического программирования: найти вектор $\bar{x}$, минимизирующий функцию цели

$$y(\bar{x}) \tag{1}$$

и удовлетворяющий системе ограничений

$$f_i(\bar{x}) = 0 \ (i = 1, \ldots, M); \tag{2}$$

$$\bar{x}_{\min} \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_{\max}. \tag{3}$$

Здесь $M < N$, где N — размерность вектора $\bar{x}$, а функции $y(\bar{x})$, $f_i(\bar{x})$ $(i = 1, \ldots, M)$ непрерывны и имеют первые и вторые производные.

Получим необходимые и достаточные условия для точки минимума сформулированной задачи, основываясь на ряде понятий, введенных Уайлдом [1].

ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И РЕШЕНИЯ

Разобьем вектор $\bar{x}$ на два составляющих вектора

$$\bar{x} = (\bar{s}, \bar{d}), \tag{4}$$

где $\bar{s}$ — M-мерный, $\bar{d}$ — P $(P = N - M)$-мерный векторы. Назовем составляющие вектора $\bar{s}$ переменными состояния (state variables), а составляющие вектора $\bar{d}$ — переменными решения (decision variables). Предположим, что в качестве переменных состояния взяты первые M составляющих вектора $\bar{x}$. Тогда

$$s_m = x_n \ (m, \ n = 1, \ldots, M); \tag{5}$$

$$d_p = x_p \ (p = n - M; \ n = M + 1, \ldots, N). \tag{6}$$

Разложим функцию $y(\bar{s}, \bar{d})$ и ограничения $f_i(\bar{s}, \bar{d})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{x}^0 \in \Omega$ (Ω — область допустимых решений, определяемая ограничениями (2)—(3)), ограничиваясь линейными членами

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^0 \partial \bar{s} + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{d}}\right)^0 \partial \bar{d}; \tag{7}$$

$$W^0 \partial \bar{s} + C^0 \partial \bar{d} = \partial \bar{f} = 0. \tag{8}$$

Здесь $W = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{s}}$ — матрица Якоби размерности M^2, а $C = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}$ — матрица управления (control matrix) размерности $M \times P$;

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_M} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial s_M} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial d_P} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial d_P} \end{bmatrix}.$$

В общем случае разбиение на переменные состояния и решения производится произвольно. Единственное условие, которое при этом необходимо соблюдать, — неособенность матрицы Якоби

$$|W| \neq 0. \tag{9}$$

Кроме того, желательно, чтобы переменные состояния были отличны от своих граничных значений. В этом случае сколь угодно малые приращения вектора $\bar{d}$ не приведут к выходу переменных состояния из области допустимых решений Ω.

УСЛОВНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ РЕШЕНИЯ

Будем предполагать, что выбранные нами переменные состояния удовлетворяют перечисленным выше требованиям. Тогда из (7) и (8) следует

$$\partial \bar{s} = \frac{\delta \bar{s}}{\delta \bar{d}} \partial \bar{d}, \tag{10}$$

$$\partial y = \frac{\delta y}{\delta \bar{d}} \partial \bar{d}, \tag{11}$$

где

$$\frac{\delta \bar{s}}{\delta \bar{d}} = -W^{-1}C, \tag{12}$$

а

$$\frac{\delta y}{\delta \bar{d}} = \frac{\partial y}{\partial \bar{d}} - \frac{\partial y}{\partial \bar{s}} W^{-1}C. \tag{13}$$

Здесь элемент $\frac{\delta s_m}{\delta d_p}$, находящийся на пересечении m-й строки и p-го столбца матрицы $\frac{\delta \bar{s}}{\delta \bar{d}}$ размерности $M \times P$, называется условной частной производной (constrained derivative) m-й переменной состояния по p-й переменной решения и характеризует величину изменения (при линейной аппроксимации) состояния s_m при изменении только одной переменной решения d_p, а составляющая $\frac{\delta y}{\delta d_p}$ P-мерного вектора $\frac{\delta y}{\delta \bar{d}}$ называется условной частной производной функции цели y по p-й переменной решения и позволяет определить величину приращения ∂y в зависимости от ∂d_p при условии, что все остальные переменные решения постоянны, а состояния меняются в соответствии с уравнением (10).

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧКИ МИНИМУМА

После введения понятия переменной решения и состояния, а также условной производной решения нетрудно получить условия, которые должны иметь место в локальном минимуме $\bar{x}^*$. В такой точке любые малые изменения решений не должны привести к уменьшению y^*, т. е. из (11) следует

$$\partial y = \sum_{p=1}^{P} \left(\frac{\delta y}{\delta d_p}\right)^* \partial d_p \geqslant 0. \tag{14}$$

Поскольку предполагалось, что $\bar{x}^*$ — невырожденная точка, т. е. такая точка, которая позволяет осуществить разбиение на переменные состояния и решения таким образом, чтобы ни одно из состояний не принимало граничного значения, то малые изменения решений не приведут к выходу из области Ω какой-либо переменной состояния.

Переменную решения d_p, равную $d_{p\min}$ в точке $\bar{x}^*$, обозначим d_p^+:

$$d_p^+ = d_{p\min}. \tag{15}$$

Для этой переменной возможны только неотрицательные приращения, т. е.

$$\partial d_p^+ \geqslant 0, \tag{16}$$

а соответствующая ей условная производная решения в точке $\bar{x}^*$ должна быть неотрицательна, так как в противном случае произведение $\left(\frac{\delta y}{\delta d_{p^*}^+}\right)^* \partial d_p^+$ будет отрицательным и приведет к уменьшению y^*, т. е. войдет в противоречие с гипотезой, что $\bar{x}^*$ — локальный минимум.

Следовательно,

$$\left(\frac{\delta y}{\delta d_p^+}\right)^* \geqslant 0. \tag{17}$$

Переменную решения d_p, равную $d_{p\max}$ в точке $\bar{x}^*$, обозначим d_p^-:

$$d_p^- = d_{p\max}. \tag{18}$$

для этой переменной возможны только неположительные приращения, т. е.

$$\partial d_p^- \leqslant 0, \tag{19}$$

а соответствующая ей условная производная решения должна быть неположительной

$$\left(\frac{\delta y}{\delta d_p^-}\right)^* \leqslant 0. \tag{20}$$

Переменную решения d_p, которая в $\bar{x}^*$ находится внутри интервала $[d_{p\min}, d_{p\max}]$, обозначим d_p^0, т. е.

$$d_{p\min} < d_p^0 < d_{p\max}. \tag{21}$$

Для этой переменной малые приращения ∂d_p^0 могут быть как положительны, так и отрицательны:

$$\partial d_p^0 \gtrless 0, \tag{22}$$

а соответствующая ей производная $\left(\frac{\delta y}{\delta d_p^0}\right)^*$ должна равняться нулю, ибо в противном случае присвоение ∂d_p^0 знака, противоположного знаку производной решения, приведет к дальнейшему уменьшению y^*,

$$\left(\frac{\delta y}{\delta d_p^0}\right)^* = 0. \tag{23}$$

Итак, необходимые условия для точки минимума задачи математического программирования при ограничениях в виде равенств и двустороннем ограничении переменных заключаются в неотрицательности составляющих вектора $\frac{\delta y}{\delta \bar{d}}$, соответствующие переменные решения которых $d_p = d_{p\min}$ (15), (17), неположительности составляющих $\frac{\delta y}{\delta \bar{d}}$, соответствующие переменные решения которых $d_p = d_{p\max}$ (18), (20) и равенстве нулю тех компонент $\frac{\delta y}{\delta \bar{d}}$, соответствующие переменные решения d_p которых находятся внутри интервала $[d_{p\min}, d_{p\max}]$ (21), (23).

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Условия (15), (17), (18), (20), (21) и (23) можно легко проверить в любой неособенной и невырожденной точке. Эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными для точки минимума $\bar{x}^*$ (при-

том глобального), если функция (1) и область допустимых решений Ω (2), (3) выпуклы. В противном случае с целью доказательства достаточных условий для точки минимума (причем только локального) необходимо исследование производных более высокой степени. Исключение составляет случай, когда все производные решения отличны от нуля

$$\left(\frac{\delta y}{\delta d_p}\right)^* \neq 0 \quad (p = 1, \ldots, P), \tag{24}$$

т. е. ни одна из переменных решения d_p в точке минимума не лежит внутри интервала $[d_{p\,\min}, d_{p\,\max}]$.

Итак, если необходимые условия для точки минимума можно представить в виде

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\delta y}{\delta \bar{d}_1^+}\right)^* > 0, \\ (\bar{d}_1^+)^* = \bar{d}_{1\min}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\delta y}{\delta \bar{d}_2^-}\right)^* < 0, \\ (\bar{d}_2^-)^* = \bar{d}_{2\max}, \end{cases} \tag{26}$$

где $\bar{d}_1 \cup \bar{d}_2 = \bar{d}$; $\bar{d}_1 \cap \bar{d}_2 = \varnothing$, то эти условия одновременно являются и достаточными. Докажем это.

Включим в первоначальное разложение в ряд Тейлора (7), (8) члены более высокого порядка

$$\partial y = \frac{\delta y}{\delta \bar{d}} \partial \bar{d} + R_2, \tag{27}$$

где R_2 — нелинейный остаток, состоящий из суммы произведений ∂d_p, ∂d_r, ∂d_p^2 и т. д.

Предположим, что ∂d_p^+ — приращение решения d_p^+ при условии неизменяемости остальных решений. При этом остаток зависит только от ∂d_p^+:

$$R_2 = R_2\left[(\partial d_p^+)^2\right]. \tag{28}$$

Предел отношения этого остатка к величине $\left(\dfrac{\delta y}{\delta d_p^+}\right)^* \partial d_p$ при $\partial d_p \to 0$ равен нулю, т. е.

$$\lim_{\partial d_p \to 0} \frac{R_2\left[(\partial d_p^+)^2\right]}{\left(\dfrac{\delta y}{\delta d_p^+}\right)^* \partial d_p} = 0. \tag{29}$$

Проводя аналогичные рассуждения для каждой переменной решения d_p^+ и d_p^-, видим, что линейные члены преобладают над остатком R_2 и им можно пренебречь, а из условий (25), (16) и (26), (19) непосредственно вытекает, что в любой малой допустимой окрестности $\bar{x}^*$ $\partial y > 0$. Следовательно, условия (24)—(26) являются как необходимыми, так и достаточными для локального минимума в неособенной и невырожденной точке.

Если какая-либо производная решения $\left(\dfrac{\delta y}{\delta d_p}\right)^* = 0$, то выражение

(29) недействительно и членами более высокого порядка пренебрегать нельзя. Получим полное разложение функции y в ряд Тейлора с квадратичными членами, записанными через матрицу H частных производных второго порядка, и остатком R_3, представляющим собой члены разложения третьего и более высокого порядков

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \partial \bar{x} + \frac{1}{2} \partial \bar{x}' H \partial \bar{x} + R_3, \tag{30}$$

где

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_N \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

Аналогичное разложение для ограничений дает

$$\partial f_m = \frac{\partial f_m}{\partial \bar{x}} \partial \bar{x} + \frac{1}{2} \partial \bar{x}' H_m \partial \bar{x} + R_3 = 0 \quad (m = 1, \ldots, M). \tag{31}$$

Умножив приращение каждого m-го ограничения на m-й множитель Лагранжа λ_m и вычтя из (30), получим

$$\partial y = \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \partial \bar{x} + \frac{1}{2} \partial \bar{x}' P \partial \bar{x} + R_3, \tag{32}$$

где $L = y - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m f_m$ — функция Лагранжа,

а

$$P = H - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m H_m; \tag{33}$$

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \right)^* W^{-1}, \text{ см. [1].} \tag{34}$$

Если разложение (32) взято в допустимой окрестности стационарной точки $\bar{x}^*$, то линейные члены разложения должны равняться нулю, поскольку это частные производные функции Лагранжа, т. е.

$$(\partial y)^* = \frac{1}{2} \partial \bar{x}' P^* \partial \bar{x} + R_3, \tag{35}$$

где подразумевается, что $\partial \bar{x}$ удовлетворяет уравнению (8).

Разбивая вектор $\bar{x}$ на два составляющих вектора $\bar{d}$ и $\bar{s}$ и соответственно — матрицу P на четыре подматрицы, выражение (35) можно представить в виде

$$(\partial y)^* = \frac{1}{2} [\partial \bar{d}', \partial \bar{s}'] \begin{bmatrix} P_{dd}^* P_{ds}^* \\ P_{ds}^{*\prime} P_{ss}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \bar{d} \\ \partial \bar{s} \end{bmatrix} + R_3. \tag{36}$$

Подставляя значение $\partial \bar{s}$ из (8) в (36), получим

$$(\partial y)^* = \frac{1}{2} \partial \bar{d}' S^* \partial \bar{d} + R_3, \tag{37}$$

где

$$S = P_{dd} - P_{ds} W^{-1} C - (P_{ds} W^{-1} C)' + (W^{-1} C)' P_{ss} W^{-1} C, \tag{38}$$

а элементы матрицы S — вторые условные частные производные функции цели y по переменным решения $\bar{d}$.

Из выражения (37) следует, что достаточным условием для точки минимума $\bar{x}^*$ является положительная определенность в этой точке матрицы S, так как в этом случае можно пренебречь остатком R_3 и любые изменения вектора $\bar{x}$ в допустимой окрестности этой точки не приведут к уменьшению y^*. Если S неопределена или отрицательно определена, то эта точка не будет локальным минимумом, ибо, выбирая $\partial\bar{d}$ таким, чтобы квадратная форма $\partial\bar{d}'S\partial\bar{d}$ была отрицательной, получим в окрестности $\bar{x}^*$ точку из области задания, лучшую, чем $\bar{x}^*$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Остановимся на процедуре решения рассматриваемой задачи, получившей название дифференциального алгоритма [1].

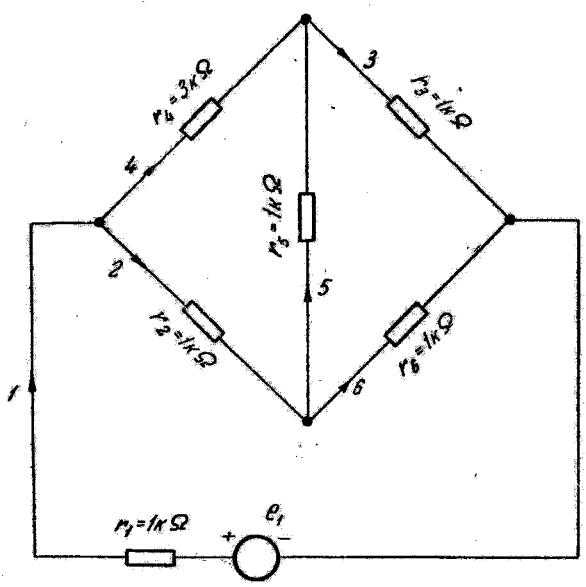
В любой неособенной невырожденной точке из области допустимых решений Ω вычисляются значения производных решения $\frac{\delta y}{\delta \bar{d}}$ и определяются их знаки с целью проверки условий (15), (17), (18), (20), (21), (23). Если какая-либо производная решения $\frac{\delta y}{\delta d_p}$ положительна, а соответствующая ей переменная решения d_p не равна значению на нижней границе (15), то значение y можно улучшить путем уменьшения этой переменной. Очевидно, что уменьшать переменную d_p можно до тех пор, пока она не примет нижнеграничного значения, или какая-нибудь переменная состояния не станет равной значению на границе, или производная $\frac{\delta y}{\delta d_p}$ не обратится в нуль. Если все положительные производные удовлетворяют условию (25), то анализируются отрицательные производные, соответствующие переменные решения которых не удовлетворяют условию (18). Увеличение такой переменной решения приведет к уменьшению значения функции цели y, причем, увеличивать эту переменную решения можно до тех пор, пока она не примет верхнеграничного значения, или соответствующая ей производная решения не обратится в нуль, или какая-нибудь переменная состояния не станет равной граничному значению.

Если выполняются условия (24)—(26), то точка соответствует локальному минимуму, поскольку эти условия в такой же степени достаточны, как и необходимы. Если условие (24) нарушено, но выполняются условия (15), (17), (18), (20), (21), (23), то необходим анализ производных второго порядка, если, конечно, функция цели и область задания не являются выпуклыми.

Если какие-либо из условий не выдерживаются, то выбирается направление возможного улучшения, причем на каждом шаге дифференциального алгоритма изменяется только одна переменная решения d_p, а остальные остаются постоянными. Совершая движение, все же необходимо соблюдать осторожность, чтобы не выйти из области допустимых решений Ω. Удержать переменные решения внутри заданного интервала $[\bar{d}_{\min}, \bar{d}_{\max}]$ легче, поскольку изменять их мы можем по нашей воле. Сложнее обстоит дело с переменными состояния, которые могут выйти из заданного интервала $[\bar{s}_{\min}, \bar{s}_{\max}]$, если шаг взят слишком большой. Чтобы избежать нарушения условия (3) по переменным состояния, необходимо на каждом шаге анализировать вектор условных частных производных по переменным состояния $\frac{\delta \bar{s}}{\delta d_p}$, чтобы видеть (по крайней мере, при линейной аппроксимации), насколько чувствительны перемен-

ные состояния к изменению переменных решения, а если какая-либо переменная состояния принимает граничное значение, то ее необходимо отнести к решению, вводя в качестве новой переменной состояния переменную решения, которая изменялась на данном шаге дифференциального алгоритма.

Примером дифференциального алгоритма служит хорошо известный симплекс-метод Данцига решения задачи линейного программирования, в котором роль переменных состояния играют базисные переменные, а



критерии, определяющие выбор направляющего столбца симплекс-таблицы, представляют собой условные производные решения $\frac{\delta y}{\delta d}$ для задачи линейного программирования, взятые с обратным знаком.

Пример. В качестве примера решения задачи нелинейного программирования при ограничении в виде равенств и двустороннем ограничении переменных решим следующую задачу.

Дано: нелинейная мостиковая схема постоянного тока, приведенная на рисунке. Схема содержит 6 ветвей, сопротивления которых приведены на рисунке, и один регулируемый источник e_1, пределы регулирования которого определяются неравенством

$$20 \leqslant e_1 \leqslant 70^*; \tag{39}$$

$$1 \leqslant i_1 \leqslant 10. \tag{40}$$

В каждой ветви j возможна установка дополнительного регулируемого сопротивления r_{pj} с пределами регулирования

$$0 \leqslant r_{pj} \leqslant 20 \ (j = 1, \ldots, 6). \tag{41}$$

Падение напряжения U_l на сопротивлении $(r_l + r_{pl})$ в зависимости от тока i_l нелинейно и имеет вид

$$U_l = (r_l + r_{pl})\,|i_l|\,i_l. \tag{42}$$

* Примечание. Размерности $[r_l] - k\Omega$; $[U_l]$, $[e_l] - v$; $[i_l] - mA$; $[y] - mW$.

Необходимо определить местоположение и величины регулируемых сопротивлений r_{pj} и режим работы активного источника (e_1, i_1), удовлетворяющих неравенствам (39)—(41) и обеспечивающих минимальное по затратам мощности токораспределение в сети при условии, что

$$i_i = 1 \quad (i = 4, 5). \tag{43}$$

Получим уравнения математической модели процессов токораспределения в сети (рисунок), выбрав в качестве дерева графа этой сети дерево с ветвями {1, 2, 3} [2, 3]. При этом первый закон Кирхгоффа с учетом требования (43) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= i_1 - i_6 - 2 = 0, \\ \varphi_2 &= i_2 - i_6 - 1 = 0, \\ \varphi_3 &= i_3 - 2 = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

а второй закон Кирхгоффа с учетом выражения (42) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_4 &= (3 + r_{p4}) \, i_4 \, i_4 + (1 + r_{p1}) \, i_1 \, i_1 + (1 + r_{p3}) \, i_3 \, i_3 - e_1 = 0; \\ f_5 &= (1 + r_{p5}) \, i_5 \, i_5 + (1 + r_{p1}) \, i_1 \, i_1 + (1 + r_{p2}) \, i_2 \, i_2 + \\ &\quad + (1 + r_{p3}) \, i_3 \, i_3 - e_1 = 0; \\ f_6 &= (1 + r_{p_6}) \, i_6 \, i_6 + (1 + r_{p1}) \, i_1 \, i_1 + (1 + r_{p2}) \, i_2 \, i_2 - e_1 = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Мощность, затрачиваемую на токораспределение, определим из выражения

$$y = e_1 i_1. \tag{46}$$

Итак, задача примера математически формулируется следующим образом.

Определить переменные $i_j (j = 1, 2, 3, 6)$, e_1, $r_{pj} (j = 1, \ldots, 6)$, *удовлетворяющие системе ограничений* (44), (45), (39), (40), (41) *и обращающие функцию цели* y (46) *в минимум.*

Очевидно, легко показать, что функция цели (46) выпукла на области допустимых решений, а ее минимум находится в одной из крайних точек этой области.

Рассматриваемая в примере задача является задачей нелинейного программирования вследствие того, что число ветвей с заданными токами $l = 2$ меньше цикломатического числа $\mu = 3$. При $l = \mu$ она переходит в линейную задачу [4], ибо в этом случае распределение токов в сети, удовлетворяющее первому закону Кирхгоффа, полностью задано.

Определим допустимое решение нашей задачи, предполагая $i_6 = 3$ и решая при этом задачу линейного программирования, что не представляет особого труда [5]. Такое решение дает следующий результат: $\bar{i} = (5, 4, 2, 1, 1, 3)$; $r_{p4} = 18$; $r_{p5} = 4$; $e_1 = 50$; $r_{pj} = 0$ $(j = 1, 2, 3, 6)$.

Разделим переменные на переменные состояния и решения. В данной задаче такое разделение не является произвольным. Во-первых, из физических соображений ясно, что изменение токораспределения в сети является следствием изменения регулируемых сопротивлений и режима активного источника; во-вторых, на известные токи, кроме i_1, не накладываются ограничения ни сверху, ни снизу. Поэтому токи следует отнести к переменным состояния. Отнесем к переменным состояния на первом шаге решения также r_{p5} и e_1. Оставшиеся переменные r_{pj} $(j = 1, 2, 3, 4, 6)$ отнесем к переменным решения.

Вычислим матрицы Якоби W и контроля C на первом шаге решения

$$W = \begin{array}{c|ccc|ccc} & i_1 & i_2 & i_3 & i_6 & r_{p5} & e_1 \\ \hline \varphi_1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \varphi_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline f_4 & 10 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ f_5 & 10 & 8 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ f_6 & 10 & 8 & 0 & 6 & 0 & -1 \end{array} \qquad C = \begin{array}{c|ccccc} & r_{p1} & r_{p2} & r_{p3} & r_{p4} & r_{p6} \\ \hline \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline f_4 & 25 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ f_5 & 25 & 16 & 4 & 0 & 0 \\ f_6 & 25 & 16 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

По формулам (12) и (13) определим матрицу $\frac{\delta \bar{s}}{\delta \bar{d}}$ и вектор $\frac{\delta y}{\delta \bar{d}}$ соответственно, и составим симплекс-таблицу, которая будет содержать $(M+4)$ строки и $(P+3)$ столбца. Основная часть таблицы, начиная со второй строки и второго столбца, будет состоять из матрицы $\frac{\delta \bar{s}}{\delta \bar{d}}$, строка которой определяется текущей переменной состояния, а столбец — текущей переменной решения. Первая строка и первый столбец симплекс-таблицы содержат значения переменных решения и состояния соответственно, а $(M+2)$-я строка — значение вектора $\frac{\delta y}{\delta \bar{d}}$ на данном шаге решения. Две последние строки и два последних столбца определяют верхнюю и нижнюю границы соответствующих переменных. Элемент таблицы, находящийся на пересечении $(M+2)$-й строки и 1-го столбца, определяет текущее значение функции цели. Для нашей задачи размерность симплекс-таблицы 10×8.

Последовательность симплекс-таблиц решения нашей задачи приведена в таблицах. Анализируя на первом шаге решения симплекс-таблицу 1, видим, что для положительной производной $\frac{\delta y}{\delta r_{p4}}$ соответствующая переменная решения $r_{p4} = 18 > 0$, т. е. нарушено условие (15). Уменьшая переменную r_{p4}, можно перейти к точке, в которой значение y меньше, чем на первом шаге. При этом вследствие положительности величин $\frac{\delta r_{p5}}{\delta r_{p4}}$ и $\frac{\delta e_1}{\delta r_{p4}}$ переменные состояния r_{p5} и e_1 будут уменьшаться, ибо при линейной аппроксимации

$$s_m^{(k+1)} = s_m^{(k)} + \left(\frac{\delta s_m}{\delta d_p}\right)^{(k)} \partial d_p. \tag{47}$$

Можно показать, что для рассматриваемого в примере класса задач изменение переменной решения d_p в области Ω, уменьшающее значение y, не приводит к изменению знака соответствующей производной решения $\frac{\delta y}{\delta d_p}$. Следовательно, в процессе уменьшения r_{p4} три переменных r_{p4}, r_{p5} и e_1 могут принять нижнеграничное значение, поскольку остальные переменные состояния не ограничены ни сверху, ни снизу. Нам необходимо определить ту из них, которая первой примет граничное значение. Очевидно, что при линейной аппроксимации этой переменной будет та, которой соответствует

$$\partial r_{p4} = \max \left[(r_{p4\min} - r_{p4}); \frac{r_{p5\min} - r_{p5}}{\frac{\delta r_{p5}}{\delta r_{p4}}}; \frac{e_{1\min} - e_1}{\frac{\delta e_1}{\delta r_{p4}}} \right] =$$

$$= \max \left(-19; \quad -9\frac{1}{3}; \quad -17{,}5 \right) = -9\frac{1}{3},$$

т. е. переменная состояния r_{p5}.

В общем случае такая переменная соответствует условию

$$\partial d_p = \max\left[(d_{p\,\min} - d_p),\ \max_{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}>0} \frac{s_{m\,\min} - s_m}{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}},\ \max_{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}<0} \frac{s_{m\,\max} - s_m}{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}}\right], \quad (48)$$

если нарушены условия (15), (17), т. е. $\partial d_p < 0$, и

$$\partial d_p = \min\left[(d_{p\,\max} - d_p),\ \min_{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}<0} \frac{s_{m\,\min} - s_m}{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}},\ \min_{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}>0} \frac{s_{m\,\max} - s_m}{\frac{\delta s_m}{\delta d_p}}\right], \quad (49)$$

если не выдерживаются условия (18), (20), т. е. $\partial d_p > 0$.

Симплекс-таблица 1

Состояния \ Решения		r_{p1}	r_{p2}	r_{p3}	r_{p4}	r_{p5}		
		0	0	0	18	0	Нижняя граница	Верхняя граница
i_1	5	0	— 1,143	0,286	0,071	— 0,643	1	10
i_2	4	0	— 1,143	0,286	0,071	— 0,643	—	—
i_3	2	0	0	0	0	0	—	—
i_6	3	0	— 1,143	0,286	0,071	— 0,643	—	—
r_{p5}	4	0	— 6,857	— 2,286	0,429	5,014	0	20
e_1	50	25	— 11,57	6,857	1,714	— 6,428	20	70
	250	125	— 115,71	48,57	12,14	— 64,28		
	Нижняя граница	0	0	0	0	0		
	Верхняя граница	20	20	20	20	20		

Если в результате анализа выражений (48) или (49) граничное значение принимает изменяемая переменная решения d_p, то для определения лучшей точки необходимо решить систему нелинейных уравнений относительно переменных состояния при условии, что d_p принимает соответствующее граничное значение, а остальные переменные решения остаются без изменений. Если граничное значение принимает какая-либо переменная состояния s_m, то она становится переменной решения вместо изменяемой на предыдущем шаге переменной d_p (переменные меняются ролями), решается система уравнений задачи относительно переменных состояния при условии, что новая переменная равна

своему граничному значению, а остальные переменные решения остались без изменения. Вследствие нелинейности уравнений задачи для достаточно большого шага условия (48) и (49) не дают стопроцентной гарантии того, что верно определена переменная, первой принимающая граничное значение в выбранном направлении. Поэтому после выбора такой переменной и решения систем уравнений относительно переменных состояния последние должны быть проверены на допустимость решения. Если какие-либо из них вышли из заданного интервала, то анализ условий (48) и (49) должен быть проделан заново, но только для тех переменных, которые оказались за пределом области Ω.

Симплекс-таблица 2

Состояния \ Решения		r_{p1}	r_{p2}	r_{p3}	r_{p5}	r_{p6}		
		0	0	0	0	0	Нижняя граница	Верхняя граница
i_1	4,24	0	0	0,892	0,223	— 1,115	1	10
i_2	3,24	0	0	0,892	0,223	1,115	—	—
i_3	2	0	0	0	0	0	—	—
i_6	2,24	0	0	0,892	0,223	— 1,115	—	—
r_{p4}	8,5	0	10,5	5,784	2,446	— 7,23	0	20
e_1	33,48	17,78	10,5	17,354	4,339	— 16,695	20	70
	141,95	76,24	44,52	99,48	24,87	— 103,17		
	Нижняя граница	0	0	0	0	0		
	Верхняя граница	20	20	20	20	20		

Решая в нашем примере систему уравнений (44)—(45) относительно переменных состояния при условии, что переменная решения r_{p5} (вместо r_{p4}) равна нулю, а остальные переменные решения имеют те же значения, что и на предыдущем шаге (см. симплекс-таблицу 1), получим новую точку, значение функции цели в которой почти в два раза меньше, чем на предыдущем шаге. В новой точке составляется симплекс-таблица 2, определяется новая переменная решения, по которой не выполняются необходимые условия для точки минимума, и определяется новая переменная решения, принимающая граничное значение, и т. д.

Для решения рассматриваемого примера понадобилось четыре итерации, (см. симплекс-таблицы 1—4). Требуемое токораспределение при минимальных затратах мощности, равных 49,8, будет установлено при $\bar{i} = (2{,}49;\ 1{,}49;\ 2;\ 1;\ 1;\ 0{,}49)$, $\bar{r}_p = (1{,}1;\ 0;\ 0;\ 0{,}23;\ 0;\ 20)$ и $e_1 = 20$ *в*.

Симплекс-таблица 3

Состояния \ Решения		r_{p_1}	r_{p_2}	r_{p_3}	r_{p_5}	e_1		
		0	0	0	0	20	Нижняя граница	Верхняя граница
i_1	3,195	— 0,949	— 0,448	—0,372	— 0,093	0,093	1	10
i_6	1,195	— 0,949	— 0,448	—0,372	— 0,093	0,093	—	—
i_3	2	0	0	0	0	0	—	—
i_2	2,195	— 0,949	— 0,448	—0,372	— 0,093	0,093	—	—
r_{p_4}	2,79	— 16,27	— 2,858	— 6,3	0,575	1,593	0	20
r_{p_6}	2,497	1,583	0,747	3,42	— 0,855	— 0,155	0	20
	63,9	— 18,98	— 8,96	— 7,44	—1,86	5,055		
	Нижняя граница	0	0	0	0	20		
	Верхняя граница	20	20	20	20	70		

Симплекс-таблица 4

Состояния \ Решения		r_{p_2}	r_{p_3}	r_{p_5}	r_{p_6}	e_1		
		0	0	0	20	20	Нижняя граница	Верхняя граница
i_1	2,49	0	0,149	0,0485	— 0,0115	0	—	—
i_2	1,49	0	0,149	0,0485	— 0,0115	0	—	—
i_3	2	0	0	0	0	0	—	—
i_6	0,49	0	0,149	0,0485	—0,0115	0	—	—
r_{p_1}	1,1	0,36	— 1,06	— 0,266	0,025	0,161	0	20
r_{p_4}	0,23	2,23	0,588	1,147	— 0,035	0	0	20
	49,8	0	3,88	0,97	— 0,23	2,49		
	Нижняя граница	0	0	0	0	20		
	Верхняя граница	20	20	20	20	70		

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Wilde, C. S. Beightler. Fondations of Optimization. Prentice-Hall, INC, 1967.
2. S. Seshu, M. B. Reed. Linear graphs and Electrical Networks. Addison — Wesley Publ. Co., INC, 1961.
3. А. А. Волков, А. Г. Евдокимов, Б. Д. Яловкин. Синтез регулирующих органов заданной структуры как задача математического программирования. Поиск экстремума. Тр. III Всесоюз. симпозиума по экстремальным задачам. Томск, февраль, 1967. Изд-во Томского ун-та, 1969.
4. С. Гасс. Линейное программирование и его применение. Физматгиз, М., 1961.
5. А. Г. Евдокимов, Б. Д. Яловкин. Применение линейного программирования для решения некоторых задач по оптимальному управлению проветриванием шахт. Сб. «Проектирование и строительство угольных предприятий», вып. 3. М., 1966.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА

А. Г. Евдокимов

Харьков

Математическая модель установившихся процессов потокораспределения в сложных сетевых системах (шахтной вентиляционной, водопроводной, газовой сети и т. д.) описывается системой нелинейных уравнений определенной структуры. В настоящей работе доказывается единственность решения этих уравнений относительно переменных, характеризующих состояния потокораспределения, при соблюдении некоторых условий, которые, как правило, имеют место для реальных инженерных сетей.

К числу задач, имеющих важное практическое применение, относится задача цифрового моделирования процессов потокораспределения в сетевой системе в установившемся режиме. Здесь под сетевой системой, или инженерной сетью, подразумевается сеть [1], для которой справедливы первый и второй постулаты сетей (известные для электрических цепей как законы Кирхгофа) и которую можно представить как ориентированный связный граф, каждой дуге которого поставлены в соответствие ряд активных и пассивных элементов и две переменные величины — последовательная переменная h_i и параллельная переменная q_i, связанные между собой определенной зависимостью

$$h_i = h_i(q_i). \tag{1}$$

Совокупность величин q_i и h_i ($i = 1, \ldots, e$) образует два e-мерных вектора (e — число дуг графа сети) $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_e)$ и $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_e)$, характеризующих состояние потокораспределения в сетевой системе. Математическая модель процессов потокораспределения в сетевой системе, отображающая взаимосвязь между переменными, параметрами и геометрической структурой сети, определяется выражением (1) и математической формулировкой первого и второго постулата сетевых систем, которые при специальной нумерации дуг графа сети могут быть записаны в виде [2]

$$q_i = \sum_{r=v}^{e} b_{ri} q_r \quad (i = 1, \ldots, v-1); \tag{2}$$

$$h_r = \sum_{i=1}^{v-1} b_{ri} h_i \quad (r = v, \ldots, e), \tag{3}$$