

УДК 537.8

*В. А. ДИКАРЕВ* д-р физ.-мат. наук

**ПРИМЕНИМОСТЬ МЕТОДА РИТЦА К ОДНОМУ КЛАССУ  
ФУНКЦИОНАЛОВ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЙ**

---

В статье изучена применимость метода Ритца для расчета спектров одного типа задач теории обобщенных собственных колебаний [1]. В работе [1] развит специальный вариационный аппарат — вариант метода Ритца, сводящий отыскание собственных значений исследуемой граничной задачи к вычислению спектра отвечающего ей функционала. Обоснование применимости этого аппарата ко многим задачам теории обобщенных собственных колебаний было произведено в работе [2]. В данной работе такое обоснование проводится для краевых задач, в которых краевые условия для искомой функции содержат два спектральных параметра. Эти параметры определяют свойства граничной поверх-

ности, например ее прозрачность и потери в ней [1, с. 118—125].  
Ниже используются некоторые результаты из работы [2].

Обоснование применимости метода Ритца к указанному типу задач сводится к обоснованию его применимости к функционалу

$$\begin{aligned} \Phi(u, u; \alpha, \beta) = & \int_V [(\nabla u)^2 - k^2 u^2] dV - \\ & - \frac{\alpha}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} + \frac{\partial u^-}{\partial n} \right)^2 ds + \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ - u^-) \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} + \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) ds - \\ & - \frac{\beta}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} \right)^2 ds + \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ + u^-) \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) ds, \end{aligned} \quad (1)$$

содержащему два спектральных параметра  $\alpha$  и  $\beta$  [1, с. 175]. Этот функционал отвечает следующей однородной задаче:  $\Delta u + k^2 u = 0$ ,  $u \in V$  (2), где  $V$  — объем из  $R^3$ ;

$$\begin{aligned} u^+ - u^- - \alpha \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} + \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) &= 0 \quad \text{на } S_{\alpha\beta}; \\ u^+ + u^- - \beta \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) &= 0 \quad \text{на } S_{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (3)$$

$S_{\alpha\beta}$  — некоторая поверхность;  $n$  — нормаль к ней через  $u^+$ ;  $u^-$ ,  $\frac{\partial u^+}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial u^-}{\partial n}$  обозначены значения функции и ее производной  $\frac{\partial u}{\partial n}$  по обе стороны  $S_{\alpha\beta}$ . В область определения функционала (1) входят функции, имеющие вместе со своими нормальными производными разрывы на  $S_{\alpha\beta}$ . Граничные условия (2), (3) являются для функционала (1) естественными. Соответствующий квадратичному функционалу (1) билинейный функционал имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(u, v; \alpha, \beta) = & \int_V [\nabla u \nabla v - k^2 uv] dv - \\ & - \frac{\alpha}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} + \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) \left( \frac{\partial v^+}{\partial n} + \frac{\partial v^-}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} [(u^+ - u^-) \times \\ & \times \left( \frac{\partial v^+}{\partial n} + \frac{\partial v^-}{\partial n} \right) + (v^+ - v^-) \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} + \frac{\partial u^-}{\partial n} \right)] dS - \frac{\beta}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial v^+}{\partial n} - \frac{\partial v^-}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[ (u^+ + u^-) \left( \frac{\partial v^+}{\partial n} - \frac{\partial v^-}{\partial n} \right) + (v^+ + v^-) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) \right] dS. \end{aligned} \quad (4)$$

Определим пространство  $H$ , фигурирующее в критерии применимости метода Ритца [2]. Пусть элементами пространства  $H$  являются упорядоченные тройки  $F = \{f, \hat{g}, \tilde{g}\}$ , где  $f$  пробегает все  $H_1(V)$  а  $\hat{g}, \tilde{g}$  принимают независимо друг от друга любые значения из  $H_0(S_{\alpha\beta})$ . Здесь  $H_1(V)$ ,  $H_0(S_{\alpha\beta})$  — соболевские пространства функции, определенных соответственно на  $V$  и  $S_{\alpha\beta}$  [1; 3]

$$(F_1, F_2) = (f_1, f_2)_{H_1(V)} + (\hat{g}_1, \hat{g}_2)_{H_0(S_{\alpha\beta})} + (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)_{H_0(S_{\alpha\beta})}.$$

Установим, что множество точек из  $H$  вида

$$\left\{ h, \left( \frac{\partial h^+}{\partial n} - \frac{\partial h^-}{\partial n} \right) \Big|_{S_{\alpha\beta}}, \left( \frac{\partial h^+}{\partial n} + \frac{\partial h^-}{\partial n} \right) \Big|_{S_{\alpha\beta}} \right\}, \quad (5)$$

где  $h$  — гладкая в  $V/S_{\alpha\beta}$  функция, имеющая конечные предельные значения нормальных производных

$$\frac{\partial h^+}{\partial n}, \frac{\partial h^-}{\partial n} \text{ на } S_{\alpha\beta},$$

плотно в пространстве  $H$ . С этой целью параметризуем некоторую окрестность  $S_{\alpha\beta}$  в  $H$  координатами  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  ( $-a \leq \tau_3 \leq a$ ). Ограничимся доказательством того, что множество точек (5) плотно в множестве троек вида  $\{0, b, c\}$ , где  $b = b(\tau_1, \tau_2)$ ;  $c = c(\tau_1, \tau_2)$  — гладкие на  $S_{\alpha\beta}$  функции. Остальная часть доказательства основывается на тех же соображениях, что и в работе [2]. Обозначим через  $\varphi_1(\tau_3)$ ,  $\varphi_2(\tau_3)$  четную и нечетную функции, совпадающие при  $\tau_3 > 0$  с гладкой на положительной полуоси функцией  $\varphi(\tau_3)$ , равной нулю при  $\tau_3 \geq a$ , такой, что  $\varphi'(+0) = 1/2$ . Любой тройке  $\{0, b, c\}$  ( $b$  и  $c$  — гладкие на  $S_{\alpha\beta}$ ) сопоставим тройку

$$\left\{ \varphi_\delta, \left( \frac{\partial \varphi_\delta^+}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_\delta^-}{\partial n} \right) \Big|_{S_{\alpha\beta}}, \left( \frac{\partial \varphi_\delta^+}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_\delta^-}{\partial n} \right) \Big|_{S_{\alpha\beta}} \right\}, \quad (6)$$

где

$$\varphi_\delta = \delta \left[ \varphi_1 \left( \frac{\tau_3}{\delta} \right) b(\tau_1, \tau_2) + \varphi_2 \left( \frac{\tau_3}{\delta} \right) c(\tau_1, \tau_2) \right].$$

При таком выборе  $\varphi_\delta$

$$\frac{\partial \varphi_\delta^+}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_\delta^-}{\partial n} = b, \quad \frac{\partial \varphi_\delta^+}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_\delta^-}{\partial n} = c.$$

Поэтому, при достаточно малых  $\delta$ , тройка (6) будет  $\varepsilon$ -аппроксимировать (в метрике пространства  $H$ ) тройку  $\{0, b, c\}$ , что и требовалось проверить.

Продолжим исследование функционала (1). Свяжем с ним функционал

$$\begin{aligned}
 L(V_1, V_2, \alpha, \beta) = & \int_V (\nabla u_1 \nabla u_2 - k^2 u_1 u_2) dV - \frac{\alpha}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \tilde{u}_{n_1} \tilde{u}_{n_2} dS + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} [(u_1^+ - u_2^-) \tilde{u}_{n_1} + (u_2^+ - u_2^-) u_{n_1}] dS - \frac{\beta}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \hat{u}_{n_1} \hat{u}_{n_2} dS + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} [(u_1^+ + u_2^-) \hat{u}_{n_1} + (u_2^+ + u_2^-) \hat{u}_{n_2}] dS, \quad V_i = \{u_i, \tilde{u}_{n_i}, \hat{u}_{n_i}\}, \\
 & i = 1, 2. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(V_1, V_2; \alpha, \beta) = & \int_V (\nabla u_1 \nabla u_2 + u_1 u_2) dV - \frac{\alpha}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \tilde{u}_{n_1} \tilde{u}_{n_2} dS - \\
 & - \frac{\beta}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \hat{u}_{n_1} \hat{u}_{n_2} dS. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Через  $\Phi_1(V_1, V_2; \alpha, \beta)$  обозначим сумму слагаемых из (7), не вошедших в (8). Функционал  $\Phi_0$  ограничен, а функционал  $\Phi_1$  компактен. Обозначим через

$$A, -\frac{1}{2}\alpha B, -\frac{1}{2}\beta C \tag{9}$$

слагаемые в правой части (8).

Проверим, что если тройка комплексных чисел (9) лежит по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через нуль, то спектр функционала (7) может быть вычислен методом Ритца. Пусть  $\gamma$ ,  $|\gamma|=1$  — комплексное число, такое, что

$$\min \left\{ \operatorname{Re} \gamma, \frac{1}{2} \operatorname{Re} \alpha \gamma, -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \beta \gamma \right\} = D > 0.$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
 |\Phi_0(V, \bar{V})| = |\gamma \Phi_0(V, \bar{V})| \geq \operatorname{Re} \gamma \Phi_0 = A \operatorname{Re} \gamma + B \frac{1}{2} \operatorname{Re} \alpha \gamma + \\
 + C \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} \beta \gamma \right) \geq D(A + B + C) = D \|V\|_H^2,
 \end{aligned}$$

где  $\|V\|_H$  — норма функции  $V$  в  $H$ . Таким образом, форма  $\Phi_0(V, \bar{V})$  удовлетворяет условию

$$|\Phi_0(u, \bar{u}; \lambda) \geq \tau \|U\|_H^2 \tag{10}$$

применимости к функционалу  $L$  метода Ритца. Отсюда в силу критерия применимости метода Ритца [2, с. 20] получаем, что спектр функционала (7) может быть вычислен методом Ритца.

Если тройка (9) не лежит по одну сторону от некоторой прямой (проходящей через нуль), то условие (10) не имеет места. Сходимость метода Ритца для этого случая не изучена.

Обозначим через  $V = \{u, \hat{u}_n, \tilde{u}_n\}$ , стационарный элемент функционала (7). В этом случае  $u, \hat{u}_n, \tilde{u}_n$  — гладкие функции и форма  $L(V, V_1; \alpha, \beta)$  обращается в нуль для всех  $V_1 \in H$ . Учитывая это, положим в выражении для  $L(V, V_1; \alpha, \beta)$ :

$$\begin{aligned} & \int_V (\Delta U + K^2 U) U_1 dV + \int_{S_{\alpha\beta}} U_1^+ \frac{\partial U^+}{\partial n} dS - \int_{S_{\alpha\beta}} U_1^- \frac{\partial U^-}{\partial n} dS + \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} [(U^+ - U^-) \tilde{U}_{n_1} + (U_1^+ + U_1^-) \tilde{U}_n] dS - \frac{\alpha}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \hat{U}_n \hat{U}_{n_1} dS - \\ & - \frac{\beta}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \tilde{U}_n \tilde{U}_{n_1} dS + \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} [(U^+ + U^-) \hat{U}_{n_1} + (U_1^+ + U_1^-) \tilde{U}_n] dS = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$U_1|_{S_{\alpha\beta}} = \hat{U}_{n_1} = \tilde{U}_{n_1} = 0$ . Тогда  $\Delta U + K^2 U = 0$  в  $V$  (12). Далее, полагая в (11)

$$(U_1^+ + U_1^-)|_{S_{\alpha\beta}} = \hat{U}_{n_1} = \tilde{U}_{n_1} = 0, \quad (U_1^+ - U_1^-)|_{S_{\alpha\beta}} = \hat{U}_{n_1} = \tilde{U}_{n_1} = 0,$$

получим соответственно

$$\tilde{U}_n = \left( \frac{\partial U^+}{\partial n} + \frac{\partial U^-}{\partial n} \right) \Big|_{S_{\alpha\beta}}, \quad \hat{U}_n = \left( \frac{\partial U^+}{\partial n} - \frac{\partial U^-}{\partial n} \right) \Big|_{S_{\alpha\beta}}. \quad (13)$$

Наконец, рассмотрим (11) при

$$\hat{U}_{n_1} = \tilde{U}_1|_{S_{\alpha\beta}} = 0, \quad \tilde{U}_{n_1} = U_1|_{S_{\alpha\beta}} = 0.$$

Отсюда имеем на  $S_{\alpha\beta}$ :

$$U^+ - U^- - \alpha \left( \frac{\partial U^+}{\partial n} + \frac{\partial U^-}{\partial n} \right) = 0; \quad U^+ + U^- - \beta \left( \frac{\partial U^+}{\partial n} - \frac{\partial U^-}{\partial n} \right) = 0.$$

Из (12) — (14) видно, что спектры функционалов (4) и (7) совпадают и первый член  $U$  стационарной тройки функционала (7) является стационарной функцией функционала (4). Так как множество троек вида (5) плотно в  $H$ , при составлении аппроксимативных уравнений Ритца для функционала (4) можно использовать подпространства  $E_n$ , элементами которых являются тройки

вида (5). Таким образом, спектр исследуемого функционала (1) может быть вычислен методом Ритца.

Подчеркнем, что в качестве координатных функций  $f$ , порождающих подпространства  $E_n$ , можно брать любые элементы из  $H$ . Требуется лишь выполнение условия  $E_n = \overline{E_n}$ , означающего, что если  $f \in E_n$ , то и  $\bar{f} \in E_n$ . Здесь  $\bar{f}$  — функция, комплексно сопряженная с  $f$ .

В заключение отметим, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть функциями от координат граничной поверхности  $S_{\alpha\beta}$ . Это означает, что поверхность, на которой происходит рассеяние, имеет переменную прозрачность. Метод Ритца для вычисления собственных колебаний исследуемой краевой задачи применим и в этом случае. По-прежнему требуется лишь выполнение условия, состоящего в том, чтобы комплексные величины (9) лежали по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через нуль.

**Список литературы:** 1. Войтович Н. Н., Каценелебаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М., 1977. 416 с. 2. Дикарев В. А. Метод Ритца в теории обобщенных собственных колебаний // Радиотехника и электроника. 1981. 26, № 1. С. 18—26. 3. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980. 496 с.

Поступила в редколлегию 04.05.89