УДК 62.506.001

В. А. ГОРБАЧЕВ, А. Д. ТЕВЯШЕВ, Н. В. ФЕДОРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ПРОМАХОВ В КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Выделение промахов — одно из направлений в теории ошибок. В настоящее время не существует эффективной методики выделения промахов в косвенных измерениях. При обработке результатов измерений промахи могут сильно исказить как значение оценок определяемых величин так и границы доверительной области. Поэтому очень важно устранить промахи из группы измерений.

Рассмотрим ряд измеренных величин θ_i, полученных от угломерных приборов P_i с известными координатами x_i, y_i ($i = 1, \ldots, n$) в целях определения координат x_s, y_s объекта s (рис. 1). Такого рода задачи встречаются в навигации, геодезии. Очевидно, что число измеренных величин $n \geqslant 2$. Если в опыте присутствуют промахи, то обычно рекомендуется отбрасывать измерение, для которого

$$\frac{|\theta_i - \bar{\theta}_i|}{\sigma_i} > 3, \tag{1}$$

где

$$\bar{\theta}_i = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_i - \bar{y}}{x_i - \bar{x}}.$$

Оценки координат $\bar{x}$, $\bar{y}$ можно получить с использованием измерения, подозреваемого на промах [1], или без него. В первом случае при малом числе измеренных величин промах не выявится, как бы груб он ни был, во втором возможны лишь интуитивные рекомендации для выделения промахов.

Постановка задачи в терминах теории распознавания образов

Рассмотрим множество точек T_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n$; $i \neq j$), образованных пересечением направлений i-го и j-го угломерных приборов (рис. 1), и отметим свойства этих точек, которые могли бы характеризовать направления (измеренные величины θ_i) как «точные» или «промахи». Два из последних трех слов заключены в кавычки, так как обозначают относительные понятия и говорить о точных и неточных измерениях можно лишь в сравнении с остальными измеренными величинами из данного опыта.

Точки, которые образованы более точными направлениями и для которых значения φ_{ij} близки к $\frac{1}{2}\pi$ [2], должны группироваться вокруг искомого объекта S, т. е. их совокупность должна обладать свойством «компактности». Множество таких точек обозначим M_s, остальные точки — $M_{\bar{s}}$, определив этим алфавит образов.

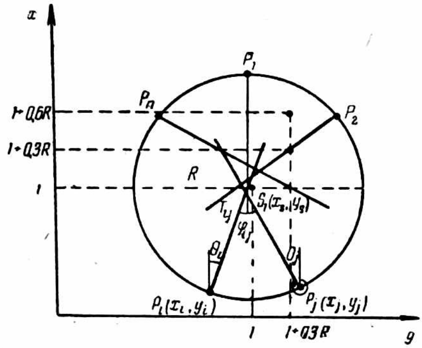

Рис. 1. Система угломерных приборов для определения местоположения объектов.

Следовательно, первый и самый трудный этап решения задачи выделения «промахов» состоит в определении подмножеств M_s, $M_{\bar{s}}$ как образов. Множеством объектов являются точки T_{ij}, пространством признаков — координаты этих точек. В такой интерпретации данную задачу в известной степени можно отнести к задачам «таксономии», которые в [3] определяются следующим образом: «...множество реализаций, т. е. векторов пространства X, с помощью решающих функций D (т. е. по определенному критерию «близости», «связности») нужно разделить на такое количество и таких элементов алфавита S, чтобы при подобной перекодировке затраты не превышали бы заданной величины N_0''».

На втором этапе решения задачи все измеренные величины необходимо разделить на два класса: 1) класс «точных» величин; 2) класс «промахов».

Для каждого наблюдателя P_i будем определять значение некоторой величины λ_i такой, что

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{если хотя бы одна из точек } T_{ij} \in M_s \ (j = 1, \ldots, n;\ i \neq j); \\ 0, & \text{если все точки } T_{ij} \in M_{\bar{s}} \ (j = 1, \ldots, n;\ i \neq j). \end{cases}$$

Измеренную величину θ_i будем относить в класс «точных», если $\lambda_i = 1$, и в класс «промахов», если $\lambda_i = 0$. Легко показать, что решение этой задачи можно также рассматривать с позиций теории распознавания образов. Действительно, мы определили алфавит образов из двух элементов, пространство признаков размерность которого равна единице, (λ), решающую функцию $F(\lambda) = \lambda$, представляющую собой пороговый элемент.

Простота реализации второго этапа не вызывает затруднений. Поэтому остановимся подробнее на первом этапе решения задачи выделения «промахов».

Определение вида решающей функции

Принятая гипотеза «компактности» характеризует структуру таксонов (группировок отдельных реализаций). Поэтому будем считать, что чем «компактнее» подмножества элементов T_{ij}, выделенных в отдельные таксоны, тем выше качество таксономии F.

Аналогично [4] в настоящей работе была предпринята попытка определить параметры критерия качества (решающей функции) таксономии, выполненной человеком. С этой целью группе «экспертов» предъявлялись картинки с различными вариантами реализаций геодезических данных и из этих точек предлагалось выделить два таксона M_s, $M_{\bar{s}}$. В процессе экспериментов было выяснено следующее.

1. С учетом свойства «компактности» таксона M_s «эксперты» за форму его района принимали круг радиусом R.

2. Топологические свойства системы угломерных приборов «эксперты» учитывали при назначении веса отдельной точки T_{ij}. Вес назначался тем большим, чем ближе к $\frac{1}{2}\pi$ приближался угол φ_{ij}.

Прежде чем приступить к определению вида решающей функции, рассмотрим способ оценки параметров, влияющих на качество таксономии.

Определение веса точки T_{ij}. Введем обозначение V_{ij} — вес точки T_{ij}. Значение веса точки удобно определять как

$$V_{ij} = \sin \varphi_{ij}. \tag{2}$$

Функциональная зависимость (2) была выбрана из следующих соображений.

1. Точка должна принимать максимальный вес при $\varphi_{ij} = \frac{1}{2}\pi$.

2. Надежными считаются те направления, для которых $\frac{1}{6}\pi \leqslant \varphi_{ij} \leqslant \frac{5}{6}\pi$, т. е. вес точки при изменении угла встречи в этом интервале должен изменяться медленно. При сравнении значения функции на интервалах

$$\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right] \text{ и } \left[0, \frac{1}{6}\pi\right], \left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right]$$

можно отметить, что на первом интервале скорость изменения в два раза меньше, чем на двух других.

Определение радиуса круга. Уточним понятие радиуса в соответствии с п. 1. Радиусом круга назовем радиус наименьшего круга, содержащего все точки выделенного таксона M_s. Будем также считать, что границы круга принадлежат кругу, т. е. круг замкнут.

Система угломерных приборов будет минимально избыточной при $n = 3$. В этом случае количество точек пересечения k, вычисленное по формуле

$$k = \frac{n(n-1)}{2};$$

равно трем, поэтому в множестве M_s не должно быть меньше трех точек.

Наименьшим кругом, содержащим три точки, является:

1) круг описанной окружности, если данные три точки образуют остроугольный треугольник;

2) круг с центром в середине наибольшей стороны и радиусом, равным половине этой стороны, если точки образуют тупоугольный треугольник.

Эти утверждения очевидны, поэтому доказывать их не нужно. Таким образом, всегда можно определить радиус множества, состоящего из трех точек.

Теорема. *Наименьшим кругом, содержащим данные k точек, является наибольший из множества наименьших кругов для каждых трех точек из данных k точек.*

Доказательство. Пусть на плоскости заданы точки B_i ($i = 1, \ldots, k$). Обозначим R — радиус наименьшего круга, содержащего данные k точек; $R_{jm, l}$—радиус наименьшего круга, содержащего точки B_j, B_m, B_l ($j, m, l = 1, \ldots, k$; $j \neq m \neq l$); O—центр наименьшего круга, содержащего данные k-точек; $O_{j, m, l}$— центр наименьшего круга, содержащего точки B_j, B_m, B_l.

Пусть для точек B_1, B_2, B_3

$$R_{1, 2, 3} = \max_{j, m, l} R_{j, m, l}.$$

Очевидно, что радиус наименьшего круга, содержащего данные k точек, не может быть меньше радиуса наибольшего из множества наименьших кругов для каждых трех точек из данных k, т. е. $R \geqslant R_{1, 2, 3}$. Знак равенства соответствует случаю $O \equiv O_{1, 2, 3}$.

Для доказательства теоремы необходимо показать, что все точки B_i принадлежат наименьшему кругу, содержащему точки B_1, B_2, B_3.

Из множества точек $\{B_i\}$ ($i = 4, \ldots, k$;) возьмем произвольную точку B_4 и рассмотрим точки B_1, B_2, B_4. По условию теоремы $R_{1, 2, 4} \leqslant R_{1, 2, 3}$. Поэтому круги с центрами в точках B_1, B_2, B_4 и радиусом $R_{1, 2, 3}$ имеют непустое множество общих точек. Аналогичный вывод можно сделать и для кругов радиусом $R_{1, 2, 3}$ с центрами в точках B_1, B_3, B_4. В общем случае комбинации кругов по три с центрами в точках B_i и радиусом $R_{1,2,3}$ имеют непустое множество общих точек. Применяя теорему Хэли [5], можно сделать вывод, что существует точка, принадлежащая всем кругам одновременно. Круги с центрами в точках B_1, B_2, B_3 имеют только одну общую точку $O_{1,2,3}$. Следовательно, она принадлежит кругам с центрами в точках B_i $(i = 4, \ldots, k)$. Но если точка $O_{1,2,3}$ принадлежит кругам радиусом $R_{1,2,3}$ с центром в точках B_i $(i = 4, \ldots, k)$, то точки B_i $(i = 4, \ldots, k)$ принадлежат кругу радиусом $R_{1,2,3}$ с центром в точке $O_{1,2,3}$, что и требовалось доказать.

Введем обозначения: M_L—подмножество точек из множества всех точек $\{T_{ij}\}$ $(L = 1, 2, \ldots, C_k^3; i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$; V_{ij}^L — вес точки $T_{ij} \in M_L$; $W_L = \Sigma V_{ij}$ — вес множества M_L; R_L — радиус множества M_L.

Возьмем два множества — M_i и M_j. Допустим, что одно из этих множеств необходимо считать множеством M_s. Если $W_i > W_j$, $R_i < R_j$, то, очевидно, за M_s принимается множество M_i. Таким образом, решающая функция, которую обозначим $F(W, R)$, должна возрастать с увеличением W и уменьшением R, а также достигать своего наибольшего значения, когда все измеренные величины не имеют погрешностей. Пусть максимальное значение $F(W, R)$ равно единице. В этом случае необходимо (необходимость вытекает из (3)) вес множества M_L характеризовать нормированной величиной

$$W_L^* = \frac{W_L}{W_0},$$

где $W_0 = \sum_{i,j} V_{ij}$ — вес всех точек T_{ij}. Перечисленным выше свойствам удовлетворяет функция

$$F(W^*, R) = W^* a^{bR}, \tag{3}$$

где a, b — константы.

Выбор константы «a». Пусть в выражении (3) $a = a_1$, $b = b_1$. Под a, b будем понимать текущее значение констант «a», «b». Покажем, что для любого $a = a_2 \neq a_1$ всегда можно выбрать такое $b = b_2 \neq b_1$, при котором

$$W^* a_1^{-b_1 R} = W^* a_2^{-b_2 R}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что

$$b_2 = b_1 \frac{\ln a_1}{\ln a_2}$$

или

$$a = a_1^{b_1/b_2},$$

т. е. одну из констант можно выбрать произвольно.

Выбор константы «b». Значение параметра b определяет степень влияния радиуса на выбор множества M_s.

Пусть имеются два множества M_i и M_j, для которых справедливо неравенство $F_i > F_j$, т. е.

$$W_i^* a^{-bR_i} > W_j^* a^{-bR_j}$$

или

$$\log_a \frac{W_i^*}{W_j^*} > b\,(R_i - R_j). \qquad (5)$$

Если за множество M_i будет принято множество точек, полученное «экспертом», то неравенство (5) позволяет вычислить границы значений константы «b», при которых выбранное множество можно считать множеством M_s. Границы b определяются тремя случаями:

1. Если $R_i > R_j$, то

$$b < \frac{1}{R_i - R_j} \log_a \frac{W_i^*}{W_j^*}. \qquad (6)$$

2. Если $R_i = R_j$, то независимо от значений константы «b» множество M_i может быть выбрано, когда

$$W_i^* > W_j^*. \qquad (7)$$

3. Если $R_i < R_j$, то

$$b > \frac{1}{R_i - R_j} \log_a \frac{W_i^*}{W_j^*}. \qquad (8)$$

Алгоритм решения задачи

Алгоритм решения задачи может быть получен как следствие доказанной в работе теоремы. Действительно, для определения подмножества M_L, доставляющего $\max\limits_{\{M_L\}} F(W^*, R)$, достаточно просмотреть все возможные сочетания по три из множества точек T_{ij}. Варианты решения, получившие большие значения F, необходимо признать наилучшими.

Нетрудно видеть, что при значительном количестве угломерных приборов этот алгоритм становится очень громоздким. Например, при $n = 15$ число переборов $L = 187\,460$, что, естественно, связано с большими затратами машинного времени. Число переборов можно значительно уменьшить, если процедуру поиска подмножества M_L, максимизирующего F, выполнять в два приема.

Если считать верными рассуждения относительно свойств точек множества M_s и для точек на отдельном направлении, то решающую функцию (3) целесообразно применить последовательно к каждому из них. В результате из всех точек T_{ij} ($j = 1, \ldots, n$; $i \neq j$) i-го направления будет выбрано некоторое подмножество точек M_{iL} $(L = 1, 2, \ldots, C_{n-1}^2)$, при котором функция (3) достигнет максимального значения. Радиус множества R_{iL} определяется как половина отрезка, границами которого являются крайние точки множества M_{iL}. Каждому направлению поставим в соответствие середину найденного отрезка и обозначим его через O_i $(i = 1, \ldots, n)$. Всем этим точкам придадим одинаковый вес (для равноточной системы угломерных приборов) $\frac{1}{n}$.

Ввод координат наблюдателей и их азимутов

↓

Определение координат точек T_{ij}

↓

Определение координат точек O_i

↓

Определение координат центра и радиуса множества M_L

↓

Разделение измерений на «точные» и «неточные»

↓

Вывод результатов

Рис. 2. Блок-схема алгоритма выделения «промахов».

Из взвешенной системы точек O_i, проверяя все сочетания по три, выделим множество точек M_L $(L = 1, 2, \ldots, C_n^3)$, максимизирующее функцию (3). После этого можно приступить к последнему этапу решения задачи выделения «промахов».

Если точка O_i принадлежит множеству M_L, то соответствующую измеренную величину необходимо считать «точной», в противном случае — «промахом».

Применение модифицированного алгоритма (рис. 2) существенно сокращает число переборов (при $n = 15$, $L = 546$) и дает выигрыш машинного времени в 15—20 раз.

Как отмечалось выше, константа a может быть выбрана произвольно. Пусть $a = e$, тогда

$$F(W^*, R) = W^* \exp(-br). \qquad (9)$$

Значение константы «b» было вычислено отдельно для выделения множества M_{iL} и M_L. Как в первом, так и во втором случае была составлена программа, по которой машине задавались множества, названные «экспертом» в качестве M_{is} и M_s, и вычислялись границы возможных значений — соответственно «b_1» и «b_2». Для первого случая было обработано 100 вариантов расположения точек на направлениях, во втором — 50 вариантов расположения точек O_i $(i = 1, \ldots, n)$. В результате проведенного эксперимента были получены следующие значения: $b_1 = 13{,}6$; $b_2 = 17{,}4$.

Эффективность алгоритма, реализованного на ЭВМ «М-222», определялась следующим образом.

Задавался район контроля в виде круга радиусом R. Угломерные приборы размещались по кругу на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 1). На точку с известными координатами x_s, y_s вычислялись истинные углы $\theta_{i\,\text{ист}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Опытный угол находился по формуле

$$\theta_i = \theta_{i\,\text{ист}} + \Delta_i,$$

где Δ_i — ошибка i-го угломерного прибора, полученная с помощью генератора случайных чисел. Для проведенного эксперимента подсчитывался критерий эффективности алгоритма:

$$G_l = \frac{\overline{\Delta}_l}{\overline{\Delta}'_l} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i}{\frac{1}{n-m}\left(\sum\limits_{i} \Delta_i - \sum\limits_{j} \Delta_j\right)} \quad (l = 1, \ldots, \Gamma), \tag{10}$$

где m — число индексов j; j — индексы угломерных приборов, измерения которых были отнесены к классу «промахов»; Γ — число обработанных экспериментов для одной точки.

В таблице для различных точек района и разном числе угломерных приборов — от четырех до пятнадцати — приведены средние значения $\overline{G}$ по экспериментам.

Исходные координаты искомой точки		Коэффициент эффективности $\overline{G}$ при участии 4—15 наблюдателей и соответственном количестве экспериментов											
x	y	45	36	30	25	22	20	18	16	15	13	12	12
1	1	1,23	1,29	1,29	1,37	1,33	1,30	1,32	1,37	1,37	1,41	1,50	1,37
1+0,3	1	1,16	1,28	1,22	1,38	1,35	1,33	1,38	1,33	1,35	1,39	1,36	1,44
1+0,6	1	1,15	1,32	1,26	1,37	1,41	1,27	1,35	1,33	1,29	1,46	1,38	1,44
1+0,3	1+0,3	1,18	1,27	1,25	1,27	1,35	1,33	1,40	1,34	1,34	1,32	1,42	1,37
1+0,6	1+0,3	1,11	1,29	1,25	1,32	1,33	1,33	1,29	1,36	1,37	1,34	1,34	1,40
Среднее значение по всем точкам													
—	—	1,17	1,29	1,26	1,34	1,35	1,31	1,35	1,34	1,34	1,38	1,40	1,40

ВЫВОДЫ

1. Критерий эффективности не зависит от положения искомой точки.
2. Применение предложенного алгоритма уменьшает среднюю погрешность исходной совокупности измерений на 30—40%.

3. Алгоритм может быть использован в общей процедуре обработки геодезических или навигационных данных при назначении апостериорного веса каждому измерению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбачев В. А., Евдокимов А. Г., Матейченко В. В.* К вопросу о создании алгоритма обработки триангуляционных наблюдений с возможным участием оператора в условиях неполной информации.—В сб.: Проблемы бионики. Вып. 11. Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1973, с. 102—111.
2. *Кукес И. С., Старик М. Е.* Основы радиопеленгации. М., «Сов. радио», 1966. 640 с.
3. *Загоруйко Н. Г.* Методы распознавания и их применения. М., «Сов. радио», 1972. 206 с.
4. *Елкина В. Н., Загоруйко Н. Г.* Количественные критерии качества таксономии и их использование в процессе принятия решений.— В сб.: Вычислительные системы. Вып. 36. Новосибирск, 1969, с. 12—18. (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).
5. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли. М., «Мир», 1968. 187 с.