ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ ДО МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОЇ РІДИНИ (ЛІНЕАРІЗОВАНА ЗАДАЧА)

Курлов Є.Е.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
61166, Харків, просп. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36, e-mail: yevhen.kurlov@nure.ua

The linear problem of calculating the non-stationary flat-parallel flow of a viscous heat-conductive non-contiguous liquid is considered. For its numerical solution, it is proposed to use the *R*-function method and the Galerkin method for non-stationary problems.

Розглянемо лінійну задачу розрахунку нестаціонарної плоско-паралельної течії в'язкої теплопровідної нестисливої рідини. Нехай Ω – плоска однозв'язна область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Для функції течії ψ і температури θ можна поставити початково-крайову задачу [1]

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\nu\Delta^2\psi-\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}-\kappa\Delta\theta=0,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{2}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=f_0(s,t),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=g_0(s,t),\ \ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0, \tag{3}$$

$$\psi\big|_{t=0}=\psi_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{4}$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega}=h_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0, \tag{5}$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{6}$$

де ν – кінематична в'язкість; β – коефіцієнт об'ємного розширення; κ – коефіцієнт температуропровідності ; $\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – деякі розподіли нормальної і дотичної складової швидкості потоку відповідно; ψ_0 – початкове значення функції течії; h_0 – розподіл температури на межі $\partial\Omega$; θ_0 – початковий розподіл температури, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

Для розв'язання початково-крайової задачі (1) – (6) скористаємося структурним методом (методом *R*-функцій) [2] і методом Гальоркіна для нестаціонарних задач [3].

Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω кусково-гладка і може бути описана елементарною функцією $\omega(x,y)$ відповідно до методу *R*-функцій, причому функція $\omega(x,y)$ задовольняє умовам:

$$1)\ \omega(x,y)=0 \text{ на } \partial\Omega;\quad 2)\ \omega(x,y)>0 \text{ в } \Omega;\quad 3)\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=-1 \text{ на } \partial\Omega,$$

тобто $\omega(x,y)=0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$.

Крайовим умовам (3) і (5) задовольняють відповідно жмутки функцій

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi, \tag{7}$$

$$\theta = h + \omega\Upsilon, \tag{8}$$

де $f = EC f_0$, $g = EC g_0$, $h = EC h_0$ – продовження функцій f_0, g_0, h_0 в Ω; $\Phi=\Phi(x,y,t)$, $\Upsilon=\Upsilon(x,y,t)$ – невизначені компоненти структур, які будемо вважати достатньо гладкими.

Для апроксимації невизначених компонент Φ, Υ скористаємося методом Гальоркіна для нестаціонарних задач, подавши їх у вигляді

$$\Phi \approx \Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\tau_k(x,y), \tag{9}$$

$$\Upsilon \approx \Upsilon_n = \sum_{k=1}^{n} d_k(t)\tau_k(x,y), \tag{10}$$

де $\{\tau_k\}$ – будь-яка повна в $L_2(\Omega)$ система функцій.

Відповідно до методу Гальоркіна невідомі функції $c_k(t)$ і $d_k(t)$, $k=1, ..., n$, знайдемо з умов ортогональності нев'язки, яка отримується при підстановці (9), (10) в (7), (8) і в рівняння (19) і (20), першим n координатним функціям $\varphi_1, ..., \varphi_n$ і $\upsilon_1, ..., \upsilon_n$ відповідно ($\varphi_k=\omega^2\tau_k$, $\upsilon_k=\omega\tau_k$, $k=1, ..., n$). Це призводить для визначення $c_k(t)$, $d_k(t)$, $k=1,...,n$, до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Після визначення функції течії ψ за формулами

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

можна відновити поле швидкостей в'язкої рідини.

Обчислювальний експеримент для задачі (1) – (6) був проведений в одиничному квадраті Ω при $\nu=1$, $\kappa=1$ і $t\in(0;5]$. Крайові і початкові умови відповідають вільній конвекції в квадратній порожнині Ω з підігрівом зверху.

Список використаних джерел:

1. Артюх А.В., Яловега И.Г. Численный анализ нестационарных линеаризованных задач вязкой теплопроводной жидкости. Радиоэлектроника и информатика. 2012. № 3 (58). С. 22-28.

2. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с.

3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.