УДК 510.62

Д. Э. СИТНИКОВ, Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДИКАТОВ ПОРЯДКА

Предикат E, определенный на декартовом квадрате множества M, называется *рефлексивным*, если для любого x из M: $E(x, x)=1$.

Предикат E называется *транзитивным*, если для любых x, y и z из M: $E(x, y) \wedge E(y, z) \Rightarrow E(x, z)$.

Предикат E называется *антисимметричным*, если для любых x, y из M: $E(x, y) \wedge E(y, x) \Rightarrow x=y$.

Предикат E назовем предикатом квазипорядка, если он рефлексивен и транзитивен. Антисимметричный предикат квазипорядка назовем предикатом *нестрогого порядка*. Докажем теорему об общем виде класса предикатов квазипорядка.

Теорема 1. *Пусть $E(x, y)$ — предикат квазипорядка, определенный на декартовом квадрате множества M. Тогда существует такое множество N, функция f: $M \to N$ и предикат нестрогого порядка W на множестве N, что для любых x, y из M: $E(x, y) = W(f(x), f(y))$* **(1)**. *Обратно, любой предикат $E(x, y)$, который можно представить в виде* (1), *является предикатом квазипорядка.*

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы. Пусть предикат $E(x, y)$ представлен в виде (1); пусть $E(x, y)=E(y, z)=1$. Это означает, что $W(f(x), f(y))=W(f(y), f(z))=1$. В силу транзитивности предиката W, можно утверждать, что $W(f(x), f(z))=1$, откуда $E(x, z)=1$. Значит, предикат E транзитивен. Для любого x из M $E(x, x)=W(f(x), f(x))=1$, в силу рефлексивности предиката W. Значит, предикат E рефлексивен. Итак, предикат $E(x, y)$ обладает свойствами рефлексивности и транзитивности и, следовательно, является предикатом квазипорядка.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $T_x=\{y \mid E(x, y)=1\}$. В качестве множества N возьмем множество всех T_x, а в качестве предиката нестрогого порядка W — предикат $W(X, Y)$, равный 1 тогда и только тогда, когда $X \supseteq Y$. Функцию $f(x)$ построим следующим образом: $f(x)=T_x$. Заметим, $T_x \neq \varnothing$, так как для любого x из M $E(x, x)=1$, т. е. $x \in T_x$. Пусть $E(x, y)=1$. Тогда $T_x \supseteq T_y$, так как если $z \in T_y$ (т. е. $E(y, z)=1$), то в силу транзитивности предиката E, $E(x, z)=1$, а значит, $z \in T_x$. Следова-

тельно, в этом случае $W(f(x), f(y))=1$. Пусть теперь $E(x, y)=0$. Тогда $y \in T_x$. Но, в силу рефлексивности, $y \in T_y$. Значит, $T_y \subseteq T_x$, т. е. $W(f(x), f(y))=0$. Теорема доказана.

Эту теорему можно получить из более общих соображений. Докажем теорему об общем виде класса транзитивных предикатов.

Теорема 2. *Пусть $E(x, y)$ — транзитивный предикат, определенный на декартовом квадрате множества M. Тогда существует такое множество N функции $f_1: M \to N_1$, $f_2: M \to N_2$ ($N_1, N_2 \subseteq N$) и предикат нестрогого порядка W на множестве N, что для любых x, y из M*

$$E(x, y) = W(f_1(x), f_2(y)) \wedge W(f_2(y), f_1(y)). \qquad (2)$$

Обратно, любой предикат $E(x, y)$, который можно представить в виде (2), является транзитивным предикатом.

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы. Пусть $E(x, y)$ представлен в виде (2), $E(x, y)=1$, $E(y, z)=1$. Тогда $W(f_1(x), f_2(y))=1$, $W(f_2(y), f_1(y))=1$, $W(f_1(y), f_2(z))=1$, $W(f_2(z), f_1(z))=1$. Отсюда следует, что $W(f_1(x), f_2(z))=1$ (в силу транзитивности предиката E) и $W(f_2(z), f_1(z))=1$. Значит, $E(x, z)=W(f_1(x), f_2(z)) \wedge W(f_2(z), f_1(z))=1$. Мы показали, что предикат E, представленный в виде (2), всегда транзитивен.

Докажем первую часть теоремы. В качестве множества N возьмем множество всех подмножеств множества M. Предикат W определим точно так же, как и в доказательстве теоремы 1. Пусть $T_x=\{y \mid E(x, y)=1\}$, $P_y=T_y \cup \{y\}$. Тогда в качестве N_1 возьмем множество всех P_y. Построим функции f_1 и f_2 следующим образом: $f_1(x)=T_x$, $f_2(y)=P_y$. Пусть $E(x, y)=1$. Отсюда следует, что $y \in T_x$. Покажем, что $T_y \subseteq T_x$. Действительно, пусть $z \in T_y$. Это означает, что $E(y, z)=1$. В силу транзитивности получаем $E(x, z)=1$, т. е. $z \in T_x$. Значит, $T_y \subseteq T_x$. Но тогда $T_y \cup \{y\}=P_y \subseteq T_x$, откуда $W(f_1(x), f_2(y))=1$. Из построения функций f_1 и f_2 непосредственно вытекает, что $W(f_2(y), f_1(y))=1$. Следовательно, в этом случае $W(f_1(x), f_2(y)) \wedge W(f_2(y), f_1(y))=1$. Пусть теперь $E(x, y)=0$. Тогда $y \in T_x$, значит, $P_y \subseteq T_x$, откуда $W(f_1(x), f_2(y)) \wedge W(f_2(y), f_1(y))=0$. Теорема доказана.

Покажем, как из общего вида (2) класса транзитивных предикатов можно получить общий вид (1) класса предикатов квазипорядка. Рассмотрим выражение $E(x, x)=W(f_1(x), f_2(x)) \wedge W(f_2(x), f_1(x))$. Если E — предикат квазипорядка, то он обладает свойством рефлексивности, следовательно, для любого x: $W(f_1(x), f_2(x)) \wedge W(f_2(x)), f_1(x))=1$. В силу антисимметричности предиката W, для любого $x f_1(x)=f_2(x)$, следовательно, $f_1=f_2$. Тогда $W(f_2(y), f_1(y)) \equiv 1$ и мы получаем представление (1).

Докажем теорему об общем виде класса предикатов, удовлетворяющих условиям:

$$\forall x \forall y \mathrm{A} z (E(x, y) \wedge E(y, x) \wedge E(y, z) \Rightarrow E(x, z)), \quad (3)$$

$$\forall x \mathrm{A} y \mathrm{A} z (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, y) \Rightarrow E(x, z)) \quad (4)$$

и условию рефлексивности.

Теорема 3. *Пусть $E(x, y)$ — предикат, удовлетворяющий условию рефлексивности и условиям* (3), (4), *определенный на декартовом квадрате множества M. Тогда существует такое множество N, функция $f: M \to N$ и предикат W^*, удовлетворяющий условиям рефлексивности и антисимметричности, определенный на декартовом квадрате множества N, что для любых x, y из M*

$$E(x, y) = W^*(f(x), f(y)). \quad (5$$

Обратно, любой предикат $E(x, y)$, который можно представить в виде (5), *удовлетворяет условию рефлексивности и условиям* (3), (4).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы. Пусть предикат $E(x, y)$ представлен в виде (5), x, y, z таковы, что $E(x, y) \wedge E(y, x) \wedge E(y, z) = 1$. Тогда, в силу представления (5), $W^*(f(x), f(y)) = W^*(f(y), f(x)) = W^*(f(y), f(z)) = 1$. В силу антисимметричности предиката W^*, можно утверждать, что $f(x) = f(y)$, откуда $W^*(f(x), f(z)) = 1$. Отсюда, в силу представления (5) следует, что $E(x, z) = 1$. Свойство (3) доказано. Пусть x, y, z таковы, что $E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, y) = 1$. Тогда $W^*(f(x), f(y)) = W^*(f(y), f(z)) = W^*(f(z), f(y)) = 1$. В силу антисимметричности предиката $W^* f(y) = f(z)$, откуда $W^*(f(x), f(z)) = 1$. Следовательно, $f(x, z) = 1$. Свойство (4) доказано. Рефлексивность предиката E вытекает из рефлексивности предиката W^*.

Докажем первую часть теоремы. Пусть предикат E рефлексивен и удовлетворяет условиям (3) и (4). Введем на множестве M отношение τ следующим образом $x \tau y \leftrightarrow E(x, y) \wedge E(y, x) = 1$. Покажем, что τ — отношение эквивалентности. Действительно, для любого x верно $x \tau x$, ибо $E(x, x) = 1$ в силу рефлексивности предиката E. Значит, отношение τ рефлексивно. Пусть $x \tau y$, тогда по определению $E(x, y) = 1$, $E(y, x) = 1$. Но тогда, очевидно, $y \tau x$. Пусть $x \tau y$, $y \tau z$. Тогда, в силу (3), $x \tau z$. Мы показали симметричность и транзитивность отношения τ. Так как τ — отношение эквивалентности, оно индуцирует на множестве M разбиение на попарно непересекающиеся классы эквивалентности.

В качестве множества N возьмем множество классов эквивалентности (фактор-множество), в качестве функции $f: M \to N$ — функцию, ставящую в соответствие любому элементу множества M класс эквивалентности, содержащий его. Предикат W^* определим так:

$$W^*(F_1, F_2) = 1 \leftrightarrow \forall x \in F_1, \ \forall y \in F_2 \ E(x, y) = 1,$$

где F_1, F_2 — некоторые элементы фактор-множества. Рефлексивность предиката W^* следует из определения отношения эквивалентности. Действительно, x и y принадлежат одному классу эквивалентности F тогда и только тогда, когда $E(x, y) \wedge E(y, x) = 1$, следовательно, для любого $x \in F$ и любого $y \in F$ $E(x, y) = 1$, каков бы ни был класс F. Значит, для любого класса $FW^*(F, F) = 1$.

Покажем, что предикат W^* антисимметричен. Пусть $W^*(F_1, F_2) \wedge W^*(F_2, F_1) = 1$. По определению получаем

$$\forall x \in F_1, \ \forall y \in F_2 \quad E(x, y) \wedge E(y, x) = 1,$$

откуда следует, что $\forall A \ x \in F_1, \ y \in F_2 \ x \tau y$. Это означает, что $F_1 = F_2$. Антисимметричность предиката W^* доказана. Остается показать, что справедливо представление (5). Пусть $E(x, y) = 1$. Тогда $f(x)$ — класс эквивалентности, содержащий x, $f(y)$ — класс эквивалентности, содержащий y. Покажем, что для любого $x_1 \in f(x)$ и любого $y_1 \in f(y)$ $E(x_1, y_1) = 1$. Пусть $x_1 \in f(x)$. Это значит, что $E(x_1, x) \wedge E(x, x_1) = 1$. Учитывая, что $E(x, y) = 1$, получаем в силу (3) $E(x_1, y) = 1$. Из $y_1 \in f(y)$ следует, что $E(y, y_1) \wedge E(y_1, y) = 1$. Учитывая, что $E(x_1, y) = 1$, получаем в силу (4) $E(x_1, y_1) = 1$. Из сказанного выше и определения предиката W^* следует, что $W^*(f(x), f(y)) = 1$. Пусть теперь $E(x, y) = 0$. Тогда непосредственно из определения предиката W^* следует, что $W^*(f(x), f(y)) = 0$. Теорема доказана.

Для одного и того же предиката $E(x, y)$ возможны, вообще говоря, различные представления типа (5).

Теорема 4. *Пусть рефлексивный предикат $E(x, y)$, удовлетворяющий условиям* (3), (4), *допускает представление* (5) *двумя способами:*

$$E(x, y) = W^*(f(x), f(y)), \tag{6}$$

$$E(x, y) = W^{**}(f'(x), f'(x), f'(y)), \tag{7}$$

где $f: M \to N$, $f': M \to N'$, W^* и W^{**} — рефлексивные и антисимметричные предикаты на множествах N и N' соответственно. Тогда предикаты W^* и W^{**} изоморфны [1].

Доказательство. Для доказательства изоморфизма покажем существование такой взаимно однозначной функции $\varphi: N \to N'$, что $f'(x) = \varphi f(x)$. Рассмотрим множество пар вида $(f(x), f'(x))$. Получим некоторое отношение φ. Покажем, что если $f(x_1) = f(x_2)$, то $f'(x_1) = f'(x_2)$. Действительно, если $f(x_1) = f(x_2)$, то $W^*(f(x_1), f(x_2)) = 1$ в силу рефлексивности, откуда в силу (6) $E(x_1, x_2) = 1$. В силу (7) $W^*(f'(x_1), f'(x_2)) = 1$. Но также, очевидно, имеем $f(x_2) = f(x_1)$, $'(^2x)f)_*M$ 'следовательно $f(x_1)) = 1$ и $E(x_2, x_1) = 1$. В силу (7) получаем $W^{**}(f'(x_2), f'(x_1)) = 1$. Так как W^{**} — антисимметричный предикат, то $f'(x_1) = f'(x)_2$. Мы показали, что отношение φ является отображением. Когда x пробегает все множество M, $f'(x)$ пробегает все множество N'. Следовательно, отображение φ сюръектив-

но. Покажем, что φ также инъективно. Для этого достаточно показать, что если $f'(x_1)=f'(x_2)$, то $f(x_1)=f(x_2)$. Действительно, из $f'(x_1)=f'(x_2)$, в силу (7) следует, что $E(x_1, x_2)=E(x_2, x_1)=1$, откуда $W^*(f(x_1), f(x_2))=W^*(f(x_2), f(x_1))=1$. В силу антисимметричности предиката W^* имеем $f(x_1)=f(x_2)$. Инъективность отображения φ доказана. Из сказанного выше вытекает, что φ является взаимно однозначным отображением. Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 следует, что любой рефлексивный предикат, удовлетворяющий условиям (3), (4), с точностью до изоморфизма можно представить в виде (5). Заметим, что класс предикатов квазипорядка является частью класса рефлексивных предикатов, удовлетворяющих условиям (3), (4), так как эти условия транзитивности. Это видно также из представлений (1) и (5) (предикат нестрогого порядка всегда рефлексивен и антисимметричен). Следовательно, любой предикат квазипорядка с точностью до изоморфизма можно представить в виде (1).

Рассмотрим теперь одну интересную интерпретацию теорем 3 и 4. В представлении (5) фигурирует некоторая функция $f:M\to N$. Эта функция естественным образом индуцирует на множестве M отношение эквивалентности r, причем для любых x и y из $M: xry \leftrightarrow f(x)=f(y)$. Такую эквивалентность в литературе называют ядерной эквивалентностью [2]. Отношение r определяет на множестве M разбиение на попарно непересекающиеся непустые классы эквивалентности. Тогда функцию f можно интерпретировать как функцию, ставящую в соответствие каждому элементу множества M класс эквивалентности, его содержащий. Предикат $E(x, y)$ определяет некоторое отношение e на множестве M, причем $xey \leftrightarrow E(x; y)=1$. Предикат $W^*(f(x), f(y))$ определяет на множестве классов эквивалентности (фактор-множестве) также некоторое отношение ω. Тогда (теорема 3)

$$xey \leftrightarrow f(x)\,\omega\, f(y), \qquad (8$$

где $f(x)$ и $f(y)$ — классы, содержащие x и y соответственно. Из теоремы 4 следует, что если предикат $E(x, y)$ удовлетворяет условиям рефлексивности (3) и (4), то существует единственное фактор-множество F и единственное рефлексивное и антисимметричное отношение ω такие, что верно (8). Это видно из того, что, в соответствии с теоремой 4, любые две функции f и f', фигурирующие в представлении одного и того же предиката $E(x, y)$, отличаются лишь взаимнооднозначной функцией и, следовательно, не влияют на фактор-множество.

Введем понятие предиката линейного упорядочения. Предикатом *линейного упорядочения* назовем любой предикат нестрогого порядка $E(x, y)$, удовлетворяющий условию $E(x, y)\vee \vee E(y, x)=1$ **(9)** для любых x, y из M. Если предикат нестрогого порядка W, фигурирующий в теореме 1, удовлетворяет *условию (9), то и предикат $E(x, y)$ в представлении* (1) также удовлетворяет этому условию, и наоборот, если предикат $E(x, y)$

удовлетворяет (9), то и W удовлетворяет (9). Отсюда следует, что *любой предикат квазипорядка, удовлетворяющий* (9), *можно представить в виде* (1), *где* W *— предикат линейного упорядочения, и наоборот, если* W *— предикат линейного упорядочения, то предикат* $E(x, y)$, *фигурирующий в* (1), *является предикатом квазипорядка и удовлетворяет условию* (9). Очевидно, и в этом случае представление (1) будет единственным с точностью до изоморфизма. Докажем теорему, в некотором смысле обобщающую полученный выше результат.

Теорема 5. *Пусть предикат* $E(x, y)$, *заданный на декартовом квадрате множества* M, *удовлетворяет условию*

$$\forall x \forall y \forall x_1 \forall y_1 (E(x, y_1) \wedge \overline{E}(x_1, y_1) \wedge E(x_1, y) \Rightarrow E(x, y)). \quad (10)$$

Тогда его можно представить в виде

$$E(x, y) = L(f_1(x), f_2(y)), \quad (11)$$

где $f_1: M \to N_1$, $f_2: M \to N_2$; $N_1, N_2 \subseteq N$, N *— некоторое множество,* L *— предикат линейного упорядочения на этом множестве. Наоборот, любой предикат* $E(x, y)$, *допускающий представление* (11), *удовлетворяет* (10).

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть предикат $E(x, y)$ удовлетворяет (10). Введем в рассмотрение множества

$$T_x = \{y \mid E(x, y) = 1\}; \quad K_y \{x \mid E(x, y) = 1\}.$$

Покажем, что если $y \in T_x$, $y_1 \overline{\in} T_x$, то $K_y \subseteq K_y$. Действительно, пусть $y \in T_x$. Это значит, что $E(x, y) = 1$. Пусть $y_1 \in T_x$. Это значит, что $E(x, y_1) = 0$. Пусть $x_1 \in K_{y_1}$, т. е. $E(x_1, y_1) = 1$. Тогда, в силу (10) $E(x_1, y) = 1$, т. е. $x_1 \in K_y$. Включение множеств $K_{y_1} \subseteq K_y$ доказано. Рассмотрим произвольный элемент x из M. Если T_x не пусто, то для каждого y из T_x построим множество K_y и рассмотрим пересечение P_x всех таких множеств. Мы обозначили это пересечение через P_x потому, что оно однозначно определяется элементом x. Если же $T_x = \varnothing$, то положим $P_x = M$.

В качестве множества N возьмем множество всех P_x, объединенное с множеством всех K_y. Предикат $L(X, Y)$ на множестве N определим следующим образом: $L(X, Y) = 1$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$. Покажем, что предикат $L(X, Y)$ является предикатом линейного упорядочения. Очевидно, предикат L удовлетворяет аксиомам нестрогого порядка. Остается показать, что он удовлетворяет (9). Для этого достаточно показать, что из $L(X, Y) = 0$ следует $L(Y, X) = 1$. Действительно, пусть $L(X, Y) = 0$ $(X, Y \in N)$. Возможны следующие варианты:

1) существуют x и y такие, что $X = P_x$, $Y = K_y$. Тогда $P_x \overline{\subseteq} K_y$. Это значит, что существует такой элемент $x_1 \in P_x$, что $x_1 \overline{\in} K_y$. Следовательно, $y \overline{\in} T_{x_1}$. Для любого $y_1 \in T_x$ верно $y_1 \in T_{x_1}$. В силу доказанного ранее $K_y \subseteq K_{y_1}$ (для любого $y_1 \in T_x$). Это

означает, что $K_y \subseteq P_x$, т. е. $L(Y, X) = 1$; 2) существуют x и y такие, что $X = K_y$, $Y = P_x$. Тогда $K_y \subseteq P_x$. Тогда, очевидно, $P_x \subseteq K_y$, ибо в противном случае, согласно 1), $K_y \subseteq P_x$; 3) существуют y_1 и y_2 такие, что $X = K_{y_1}$, $Y = K_{y_2}$. Тогда $K_{y_1} \subseteq K_{y_2}$. Это значит, что существует такой элемент $x \in K_{y_1}$, что $x \bar{\in} K_{y_2}$, откуда $y_1 \in T_x$, $y_2 \bar{\in} T_x$. Из доказанного ранее следует $K_{y_2} \subseteq K_{y_1}$, значит, $L(Y, X) = 1$; 4) существуют x_1 и x_2 такие, что $X = P_{x_1}$, $Y = P_{x_2}$. Тогда $P_{x_1} \subseteq P_{x_2}$. Это означает, что существует такой элемент x_3, что $x_3 \in P_{x_3}$, $x_3 \bar{\in} P_{x_2}$. Из $x_3 \in P_{x_1}$ следует, что для любого $y \in T_{x_1}$ верно $x_3 \in K_y$, откуда для любого $y \in T_{x_1}$ верно $y \in T_{x_3}$. Из $x_3 \bar{\in} P_{x_2}$ следует, что существует $y_1 \in T_{x_2}$ такой, что $x_3 \bar{\in} K_{y_1}$, откуда $y_1 \bar{\in} T_{x_3}$. Значит, $K_{y_1} \subseteq K_y$ для любого y из T_{x_1}. Но $P_{x_2} \subseteq K_{y_1}$, значит, $P_{x_2} \subseteq K_y$ для любого $y \in T_{x_1}$ Следовательно, $P_{x_2} \subseteq P_{x_1}$, откуда $L(Y, X) = 1$. В приведенных выше рассуждениях предполагалось, что T_x не пусто. В том случае, когда $T_x = \varnothing$, $P_x = M$ и, очевидно, доказываемое условие выполняется.

Итак, мы ввели множество N и построили на нем предикат L линейного упорядочения. В качестве множество N_1 и N_2, фигурирующих в условии теоремы, возьмем соответственно множество всех P_x и множество всех P_y. Очевидно, $N_1 \subseteq N$, $N_2 \subseteq N$. Построим функции f_1 и f_2:

$$f_1(x) = P_x, \quad f_2(y) = K_y.$$

Покажем, что справедливо представление (11). Действительно, пусть $E(x, y) = 1$. Тогда $y \in T_x$ и, следовательно, $P_x \subseteq K_y$ (так как P_x представляет собой пересечение множеств, одним из которых является K_y). Значит, в этом случае $L(f_1(x), f_2(y)) = 1$. Пусть теперь $E(x, y) = 0$. Тогда возможны два случая: 1) $T_x = \varnothing$. Значит, $P_x = M$, откуда $P_x \subseteq K_y$, так как в противном случае $E(x, y) = 1$); 2) $T_x = \varnothing$. Тогда $x \in P_x$, $x \in K_y$. Следовательно, и в этом случае $P_x \subseteq K_y$. Мы показали, что из $E(x, y) = 0$ следует $L(f_1(x), f_2(y)) = 0$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $E(x, y)$ представлен в виде (11). Пусть $E(x, y_1) = 1$, $E(x_1, y_1) = 0$, $E(x_1, y) = 1$. Тогда $L(f_1(x), f_2(y_1)) = 1$, $L(f_1(x_1), f_2(y_1)) = 0$, $L(f_1(x_1), f_2(y)) = 1$. В силу свойства (9) предиката линейного упорядочения L верно $L(f_2(y_1), f_1(x_1)) = 1$. В силу транзитивности предиката L верно $L(f_1(x), f_2(y)) = 1$, откуда, согласно (11), $E(x, y) = 1$. Свойство (10) предиката $E(x, y)$ доказано. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что любой бинарный предикат $E(x, y)$ так или иначе связан с предикатом нестрогого порядка.

Теорема 6. *Для любого бинарного предиката $E(x, y)$ найдется множество N, множества N_1, $N_2 \subseteq N$, функции $f_1: M \to N_1$, $f_2: M \to N_2$ и предикат нестрогого порядка W на множестве N такие, что*

$$E(x, y) = W(f_1(x), f_2(y)). \qquad (12)$$

Доказательство. В качестве множества N, множеств N_1, N_2 и функций f_1 и f_2 возьмем те же множества и те же функции, что и в доказательстве теоремы 5. В качестве предиката $W(X, Y)$ возьмем предикат, равный единице тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$. Возможность представления (12) доказывается так же, как и возможность представления (11) (см. доказательство теоремы 5). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х., 1987. 160 с. 2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М., 1970. 392 с.

Поступила в редколлегию 17.03.87