

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИАДНАЯ МЕЖДУПЕРИОДНАЯ ОБРАБОТКА

Известны алгоритмы оптимальной междупериодной обработки сигналов, приводящие к вычислению циклических сверток [1; 2]. Цифровая реализация циклических сверток с использованием быстрых алгоритмов проще, чем реализация линейных сверток [3]. Так, число операций умножения и сложения, приходящихся на выходной отсчет, в циклическом фильтре приближенно в два раза меньше, чем в линейном. Однако наиболее экономичны в вычислениях алгоритмы диадных сверток, требующие не более одного умножения на выходной отсчет независимо от длины импульсной характеристики. Их непосредственному использованию в технике обработки радиолокационной информации препятствует своеобразие свойств мультипликативности функций Уолша [4].

Рассмотрим задачу синтеза алгоритма оптимальной по критерию Неймана — Пирсона системы обнаружения дискретных детерминированных сигналов, обладающих свойством групповости относительно диадного сдвига, на фоне нормальных коррелированных аддитивных помех и шумов. Задан N -мерный вектор-столбец Y_0 комплексных выборочных отсчетов входного процесса, причем $N = 2^n$ и n — целое число. Входной процесс — аддитивная смесь стационарной нормальной коррелированной помехи \dot{W}_0 , белого шума H_0 и одного из возможных сигналов \dot{S}_i .

Пусть аргументы сигналов $\{\dot{S}_i\}$, $i \in \{0, N-1\}$ — элементы конечной коммутативной группы. Все сигналы $\{\dot{S}_i\}$ находятся заданием одного из них \dot{S}_0 :

$$\dot{S}_i = A_i \dot{S}_0 = \dot{S}_{i \oplus 0}, \quad (1)$$

(A_i — оператор диадного сдвига).

При синтезе алгоритма ограничимся классом правил, инвариантных относительно диадного сдвига на конечных коммутативных

группах. Задача синтеза оптимального в этом классе правила состоит в определении равномерно наиболее мощного инвариантного правила. Нахождение этого правила основано на представлении априорной неопределенности в форме воздействия на наблюдаемый процесс оператора A_i :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_i^\Phi &= A_i \dot{Y}_0^{\text{сф}} = \dot{S}_{0 \oplus i}^2 + A_i (\dot{W}_0 + H_0) = \dot{S}_{0 \oplus i}^2 + \dot{W}_{0 \oplus i}^2 + H_{0 \oplus i}^2, \\ \dot{Y}_i^\Phi &= A_i (\dot{W}_0 + H_0) = \dot{W}_{0 \oplus i}^2 + H_{0 \oplus i}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Сформируем симметричное относительно оператора диадного сдвига семейство $P = \{p_\Phi(\dot{Y}_i/0)\}$ распределений выборок фона. Для этого определим функции распределения каждого вектора \dot{Y}_i^Φ :

$$p_\Phi(\dot{Y}_i/0) = (4\pi)^{-N} (\det R_i)^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\dot{Y}_i^\top R_i^{-1} \dot{Y}_i^*) \right\}. \quad (3)$$

Пусть исходные вектора фона \dot{Y}_0^Φ и полученные преобразованием \dot{Y}_i^Φ ($i \neq 0$) принадлежат некоторому пространству Φ . Тогда плотность вероятности наличия вектора \dot{Y} в пространстве Φ

$$p^{(2)}(\dot{Y}/0) = (4\pi)^{-N} (\det R^{(2)})^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\dot{Y}^\top [R^{(2)}]^{-1} \dot{Y}^*) \right\}, \quad (4)$$

где

$$R^{(2)} = N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} R_i. \quad (5)$$

Для смеси сигнала и фона плотность вероятности приобретает вид

$$\begin{aligned} p^{(2)}(\dot{Y}/S_i) &= (4\pi)^{-N} (\det R^{(2)})^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\dot{Y}^\top [R^{(2)}]^{-1} \dot{Y}^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\dot{S}_i^\top [R^{(2)}]^{-1} \dot{S}_i^*) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая свойства оператора диадного сдвига и соотношение (5), элементы диадной корреляционной матрицы находим из выражения

$$R_{pl}^{(2)} = N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} R_{p \oplus i, l \oplus i}^2. \quad (7)$$

Для $l = 0$ первый столбец корреляционной матрицы (7) описывает известное выражение связи диадной корреляционной функции с арифметической

$$R_{p0}^{(2)} = R_{(p)}^{(2)} = N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} R(i \oplus p - i). \quad (8)$$

Оператор диадного сдвига A_i может быть представлен как матрица перестановок T_i , в каждом столбце и в каждой строке которой лишь

один элемент равен единице, а остальные — нули, причем $T_i T_i^* = I$ (9). Здесь I — единичная матрица. Диадная корреляционная матрица с элементами, полученными в соответствии с (7), является клеточно-циркулянтной. Такая матрица, являясь дискретным аналогом инвариантного оператора, удовлетворяет соотношению

$$R^{(2)} = [R^{(2)} : T_1 R^{(2)} : \dots : T_{N-1} R^{(2)}], \quad (10)$$

где

$$R^{(2)} = [R_{(0)}^{(2)} \ R_{(1)}^{(2)} \ \dots \ R_{(N-1)}^{(2)}]^T.$$

Симметрию семейства (4)

$$p^{(2)}(A_i \dot{Y}_0 / 0) = p^{(2)}(\dot{Y}_0 / 0) \quad (11)$$

докажем, используя (10) и свойство ортогональности перестановочных матриц (9):

$$\begin{aligned} \dot{Y}_i^T [R^{(2)}]^{-1} \dot{Y}_i^* &= \dot{Y}_i^T I [R^{(2)}]^{-1} I \dot{Y}_i^* = \\ &= \dot{Y}_i^T T_i T_i^T [R^{(2)}]^{-1} T_i T_i^T \dot{Y}_i^* = \\ &= \dot{Y}_0^T [T_i R^{(2)} T_i^T]^{-1} \dot{Y}_0^* = \dot{Y}_0^T [R^{(2)}]^{-1} \dot{Y}_0^*, \end{aligned} \quad (12)$$

что и требовалось доказать. Симметрия (6) доказывается аналогично.

Для построения равномерного наиболее мощного правила, кроме симметрии семейств распределений, необходима инвариантность параметрического пространства относительно преобразований диадного сдвига. Параметрическим пространством в данной задаче являются номера возможных сигналов и помех. В соответствии с (1) и (2) инвариантность параметрического пространства соблюдается.

Задачи с инвариантными множествами параметров сигналов, помех и с симметричными семействами распределений относительно групп преобразований могут иметь также инвариантные относительно этих преобразований функции мощности правил проверки гипотез. Условие инвариантности функции мощности $D(z/\dot{Y}_i) = D(z/\dot{Y}_0)$ выполняется, если решающая функция и алгоритм обработки инвариантен относительно преобразований A_i :

$$z(\dot{Y}_i) = z(A_i \dot{Y}_0) = z(\dot{Y}_0).$$

Оптимальный алгоритм обнаружения по критерию Неймана — Пирсона сводится к сравнению с порогом отношения правдоподобия

$$\ln L(\dot{Y}_0) = \ln p^{(2)}(\dot{Y}_0 / \dot{S}_i) - \ln p^{(2)}(\dot{Y}_0 / 0). \quad (13)$$

Учитывая (4), (6), получаем

$$\ln L(\dot{Y}_0) = -\frac{1}{2} \dot{S}_i^T [R^{(2)}]^{-1} \dot{S}_i^* + \operatorname{Re} \{ \dot{Y}_0^T [R^{(2)}]^{-1} \dot{S}_i^* \} \stackrel{\gamma_0}{\cong} z_*. \quad (14)$$

В последнем выражении $\dot{S}_i^T [R^{(2)}]^{-1} \dot{S}_i^* = \operatorname{tr} \dot{S}_i^* \dot{S}_i^T [R^{(2)}]^{-1} = \operatorname{tr} \dot{S}_0^* \dot{S}_0^T \times \times [R^{(2)}]^{-1}$ не зависит от \dot{Y} и определяет дополнительное смещение

порога $z_0 = \left[z_* + \frac{1}{2} \text{tr} S_0^* S_0^* [R^{(2)}]^{-1} \right]$. Поскольку $[R^{(2)}]^{-1} A_i = A_i \times [R^{(2)}]^{-1}$, то структура пороговой системы записывается в виде

$$z = Y_0^T [R^{(2)}]^{-1} A_0 S_0^* = Y_0^T A_i [R^{(2)}]^{-1} S_0^* = Y_0^T A_i \hat{h}, \quad (15)$$

которое является диадной сверткой вектора входной реализации и вектора весовых коэффициентов

$$\hat{h} = [R^{(2)}]^{-1} S_0^*. \quad (16)$$

Таким образом, диадная свертка — это оптимальная процедура обработки при обнаружении класса детерминированных сигналов, связанных соотношением (1). При этом мощность такого решающего правила не зависит от номера входного сигнала.

Для реальных сигналов соотношение (1) выполняется лишь приближенно. Поэтому целесообразно оценить реальную эффективность обнаружения сигналов алгоритмом (15). Так как синтезированный алгоритм обработки — линейный, то оценивать эффективность при нормально распределенных помехах можно по энергетическому отношению $\rho^{(2)}$ пиковой мощности полезного сигнала к средней мощности помех, взятых на выходе устройства обработки.

Отношение сигнал-помеха на выходе диадной системы обработки определяется выражением

$$\rho^{(2)} = \sum_{p=0}^{N-1} S_p \hat{h}_{i \oplus p}^2. \quad (17)$$

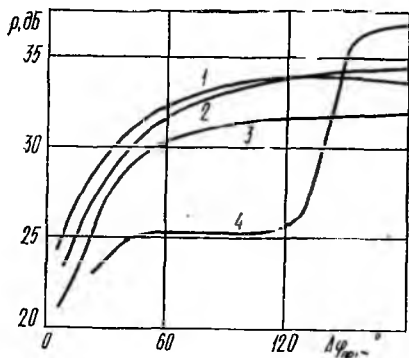
Вектор \hat{h} найдем из (16). Считаем, что помеха имеет экспоненциальную функцию корреляции $R(p) = \sigma_n^2 \exp\{-\alpha |p|\}$, а коэффициент корреляции $r = R(1)/\sigma_n^2 = 0,99$ и $\sigma_n^2 \gg \sigma_w^2$. Тогда при $N = 8$ имеем

$$[R^{(2)}]^{-1} \approx \frac{1}{1,4\sigma_n^2(1-r)} \begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пусть сигнал S_0 представлен комплексными отсчетами $S_p = \exp\{jp\Delta\theta_c\}$.

Произведение $[R^{(2)}]^{-1} S_0$ дает вектор весовых коэффициентов \hat{h}_p , соответствующих $i = 0$. Для других $i \in [1, N - 1]$ векторы весовых коэффициентов можно получить как результат произведения $[R^{(2)}]^{-1} S_i$, где вектор сигнала S_i определяется отсчетами $S_{p \oplus i} = \exp\{j(p \oplus i)\Delta\theta_c\}$.

На рисунке представлены зависимости $\max \rho_i^{(2)}$ при неизвестной доплеровской частоте сигнала с расчетными $\Delta\Theta_c = 180, 120, 30^\circ$ (кривые 3, 2, 1 соответственно) от фактического междупериодного набега фазы. Аналогичная зависимость (кривая 4) построена для устройства, максимизирующего среднее значение ρ в интервале $\Delta\Theta_c$ от 0 до 180° . Весовой вектор такого устройства определяется собственным вектором арифметической корреляционной матрицы помехи, соответствующим наименьшему собственному значению. Здесь $h = [-0,0985; 0,2780; -0,4157; 0,4900; -0,4900; 0,4157; -0,278; 0,0981]'$.



Сопоставление этих зависимостей позволяет сделать вывод, что наряду с отмеченным преимуществом в вычислении диадных сверток, использование диадной обработки при неизвестной доплеровской частоте сигнала от цели в присутствии коррелированных помех и шумов обеспечивает высокую помехоустойчивость в широком диапазоне изменений частоты сигнала.

Список литературы: 1. Голиков В. С., Кравченко Н. И. Теория оптимальной М-ичной фильтрации сигналов на фоне коррелированных помех // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1984. Т. 27, № 7. С. 15—19. 2. Там же. Эффективность М-ичного оптимального дискретного фильтра при обнаружении пачки сигналов с неизвестным временем ее начала на фоне коррелированных помех // 1986. Т. 29, № 11. С. 53—57. 3. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М., 1985. 248 с. 4. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М., 1981. 416 с. 5. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Г. П. Тартаковского. М., 1963. Т. 1. 424 с.

Поступила в редколлегию 09.07.87