УДК 621.391

А. А. ЗАМУЛА, В. Л. КУЛЕШОВ

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Исследования корреляционных, спектральных и статистических свойств характеристических дискретных сигналов (ХДС) показали, что данный класс сигналов по указанным свойствам весьма близок к широко используемым в системах связи в качестве расширяющих спектр М-последовательностям. Вместе с тем ХДС по сравнению с М-последовательностями обладают улучшенными ансамблевыми и структурными свойствами.

Найдены пары ХДС, значения максимальных боковых выбросов периодической функции взаимной корреляции (ПФВК) которых меньше, чем у лучших по взаимокорреляционным свойствам последовательностей Голда. В дальнейшем эти пары будем именовать предпочтительными. Изложенное иллюстрируется данными таблицы, где L_1 — длительность последовательности Голда, L_2 — длительность ХДС, θ_1, θ_2 — первообразные элементы поля Галуа, по которым построены пары.

Класс сигналов					
Последовательности Голда (Касами)		Характеристические дискретные последовательности			
L_1	$R_б$	L_2	θ_1	θ_2	$R_б$
63	17	66	2	32	14
255	33	255	3	27	32
1023	65	1060	2	8	64

Нахождение предпочтительных пар с применением известных методов требовало проведения расчетов на ЭВМ значений максимальных боковых выбросов для всех возможных сочетаний пар ХДС.

В настоящей статье описан быстрый алгоритм исследования взаимокорреляционных свойств. Такой алгоритм должен существенно уменьшить вычислительную сложность определения предпочтительных пар, а также подсчет статистических характеристик ПФВК ХДС. Сформулирована и доказана теорема, с помощью которой определяется быстрый алгоритм нахождения максимальных боковых выбросов ПФВК всех возможных пар ХДС по известным значениям выбросов ПФВК ограниченного числа пар ХДС. Сигнал, построенный по наименьшему из значений первообразных элементов θ_m поля $GF(P^n)$, будем считать исходным.

Теорема 1. *Пусть W_μ и W_ν есть ХДС с числом символов L, построенные посредством децимации исходного сигнала W_1 соответственно по коэффициентам μ и ν, а μ' и ν' новые коэффициенты децимации, причем $\mu'=\mu\varkappa \pmod L$; $\nu'=\nu\varkappa \pmod L$, где $\varkappa$ — целое число, такое, что наибольший общий делитель (н. о. д.) чисел $\varkappa$ и $L=1$. Тогда децимация исходного ХДС W_1 по коэффициентам μ' и ν' дает новые пары, реализация ПФВК которых есть результат децимации ПФВК пары ХДС W_μ и W_ν*

Доказательство. Значения кодов ХДС, полученных путем децимации исходной последовательности по коэффициентам μ и ν, могут быть описаны выражениями [4]

$$\mu_i = \begin{cases} \psi(\Theta_a^{\mu} i + 1), & \text{если } \Theta_m^{\mu} i + 1 \neq 0 \pmod P; \\ 1 & \text{, если } \Theta_m^{\mu} i + 1 = 0 \pmod P; \end{cases} \quad (1)$$

$$\nu_i = \begin{cases} \psi(\Theta_m^{\nu} i + 1), & \text{если } \Theta_m^{\nu} i + 1 \neq 0 \pmod P; \\ 1 & \text{, если } \Theta_m^{\nu} i + 1 = 0 \pmod P), \quad i=\overline{0, L-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку всегда можно найти такое k, что $\Theta_1 = \Theta^k$, где $\Theta = \Theta_1^{\mu}$, $\Theta_1 = \Theta_1^{\nu}$, и н. о. д. $(k, L) = 1$, то (3) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\mu_i = \begin{cases} \psi(\Theta^i + 1), & \text{если } \Theta^i + 1 \neq 0 \pmod P; \\ 1 & \text{, если } \Theta^i + 1 = 0 \pmod P; \end{cases}$$

$$\nu_) = \begin{cases} \psi(\Theta_1^i + 1), & \text{если } \Theta_1^i + 1 \neq 0 \pmod P; \\ 1 & \text{, если } \Theta_1^i + 1 = 0 \pmod P). \end{cases}$$

Для сигналов, полученных по μ' и ν', имеем

$$\mu_i' = \begin{cases} \psi(\Theta^{i_1\varkappa} + 1), & \text{если } \Theta^{i_1\varkappa} + 1 \neq 0 \pmod P; \\ 1 & \text{, если } \Theta^{i_1\varkappa} + 1 = 0 \pmod P; \end{cases}$$

$$\nu_i' = \begin{cases} \psi(\Theta^{i_1\varkappa} + 1), & \text{если } \Theta_1^{i_1\varkappa} + 1 \neq 0 \pmod P; \\ 1 & \text{, если } \Theta_1^{i_1\varkappa} + 1 = 0 \pmod P). \end{cases}$$

Выражения для ПФВК пар ХДС, построенных соответственно по μ, ν и μ', ν'.

$$R_{\mu,\nu}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi\,)\Theta^i + 1)\,\psi(\Theta_1^{i+m} + 1);$$

$$R_{\mu',\nu'}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi(\Theta^{i_1\varkappa} + 1)\,\psi(\Theta^{(i+m_1)\varkappa} + 1).$$

И с учетом (1)

$$R_{\mu,\nu}(m)=\sum_{i=0}^{L-1}\psi(\Theta^{i}+1)\,\psi(^{k(i+m)}+1);$$

$$R_{\mu',\nu'}(m)=\sum_{i=0}^{L-1}\psi(\Theta^{i_1\varkappa}+1)\,\psi(\Theta^{k\chi(i_1+m_1)}+1).$$

Введем произвольные переменные $\{a,\ b,\ b'\}\in GF(P^n)$. Пусть для сигналов, построенных путем децимации исходного сигнала, выполняются условия $a=\Theta^{k(i+m)}$, $b=\Theta^{i}$. Тогда $a/b=$ $=\Theta^{ki+km-1}$. Для пары сигналов, полученных путем децимации исходного по коэффициентам μ' и ν', найдем некоторое значение $\Theta^{k\varkappa(i_1+m_1)}$ равное a, т. е.

$$\Theta^{k\varkappa(i_1+m_1)}=\Theta^{k(i+m)}=a. \qquad (3)$$

Для выполнения равенства (3) необходимо, чтобы

$$k\varkappa(i_1+m_1)\equiv k(i+m)\,(\mathrm{mod}\,L). \qquad (4)$$

Поскольку н. о. д. $(k,\ L)=1$, выражение (4) можно переписать в виде

$$\varkappa(i_1+m_1)\equiv i+m\,(\mathrm{mod}\,L);\ \ \varkappa i_1+\varkappa m_1\equiv i+m\,(\mathrm{mod}\,L);$$

$$\varkappa i_1\equiv i\,(\mathrm{mod}\,L);\ \ \varkappa m_1\equiv m\,(\mathrm{mod}\,L).$$

Найдем отношение a/b', где $b'=\theta^{i_1\varkappa}$ для пары ХДС, построенной в соответствии с μ' и ν'.

$$a/b'=\frac{\Theta^{k\varkappa(i_1+m_1)}}{\Theta^{i_1\varkappa}}=\Theta^{k\varkappa i_1+k\varkappa m_1-i_1\varkappa}. \qquad (5)$$

С учетом (5) можно заключить, что $a/b'=a/b$, и следовательно, $b'=b$. А это означает, что в выражении для ПФВК $R_{\mu',\nu'}(m_1)$ изменится лишь порядок набора суммы для некоторого фиксированного отсчета ПФВК пары ХДС, построенной по μ' и ν'. Другими словами, значения функции ПФВК для пары ХДС, построенной путем децимации исходного сигнала по коэффициентам μ' и ν' будут такими же, как для ПФВК последовательностей, полученных по μ и ν. Но с учетом того, что $m=\varkappa m_1$, $R^{\mu',\nu'}(m_1)$ — есть результат децимации $R_{\mu,\nu}(m)$ по коэффициенту $\varkappa$, т. е. реализация ПФВК $R_{\mu',\nu'}(m_1)$ будет результатом децимации ПФВК $R_{\mu',\nu'}(m)$. Теорема доказана.

С учетом теоремы 1 могут быть определены все предпочтительные пары ХДС.

Для приложений важным является знание значений максимальных боковых выбросов ПФВК для данной системы сигналов с объемом M. С тем, чтобы оценить значения, которые принимают выбросы ПФВК сигналов с помощью традиционных методов вычисления ПФВК, необходимо провести расчеты значений выбросов для всех возможных пар сигналов.

Формулируемая ниже теорема позволяет существенно уменьшить объем вычислений, связанных с определением значений выбросов ПФВК для систем сигналов, в частности для системы ХДС.

Будем называть ПФВК различных пар ХДС функциями одного типа в том случае, если реализации ПФВК для них одинаковы. Примером ХДС, имеющих ПФВК одного типа, являются, как это показано для теоремы 1, пары ХДС, построенные путем децимации исходного сигнала по коэффициентам ν, μ и ν', μ' соответственно.

Назовем взаимокорреляционной матрицу $\|R\|$, номерами строк и столбцов которой, являются коэффициенты децимации, в соответствии с которыми формируются ХДС. На пересечении строк и столбцов матрицы размещены значения максимальных боковых выбросов ПФВК данной пары ХДС.

Теорема 2. *Пусть $\|R\|$ есть матрица максимальных значений ПФВК размерности $M \times M$, причем M — число изоморфизмов ХДС, построенных с использованием коэффициентов децимации и упорядоченных по возрастанию значений коэффициентов децимации, тогда строка с максимальными значениями ПФВК исходного сигнала W_1, построенного по минимальному из значений первообразных элементов (коэффициент децимации равен 1) со всеми оставшимися $(M-1)$ изоморфизмами, содержит все возможные максимальные значения боковых выбросов ПФВК, которые дают пары W_i и W_j, $i, j = 1, M$.*

Таким образом теорема 2 указывает на то, что для определения значений максимальных боковых выбросов ПФВК, которые дают возможные сочетания пар ХДС, достаточно вычислить реализацию ПФВК исходного сигнала W_1 со всеми оставшимися W_2, $W_3 \ldots W_{M-1}$ изоморфизмами, т. е. только первую строку матрицы $\|R\|$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что ПФВК пары ХДС, построенной по коэффициентам децимации, например k_1 и k_2, имеет свой «образ» в первой строке матрицы $\|R\|$, т. е. один из коэффициентов децимации равен 1. Пусть имеются коэффициенты децимации k_1 и k_2, причем $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$ и $k_1 \neq k_2$, тогда существует такое число $\varkappa$ (н. о. д. $(\varkappa, L) = 1$), что $k_1' = k_1\varkappa = 1 \pmod L$, при этом $k_2' = k_2\varkappa \pmod L$ — другое число взаимно простое с L, т. е. пара коэффициентов k_1 и k_2 переходит в пару коэффициентов $k_1' = 1$ и k_2, находящуюся в первой строке взаимокорреляционной матрицы $\|R\|$.

Утверждение о том, что существует такое $\varkappa$, для которого $k_1\varkappa = 1 \pmod L$ непосредственно следует из теоремы Эйлера *, которая гласит, что если есть такое k_1, что н. о. д. $(k_1, L) = 1$, то

$$k_1^{\varphi(L)} \equiv 1 \pmod L, \qquad (6)$$

* *Свердлик М. Б.* Оптимальные дискретные сигналы. М., 1975. 200 с.

Инв. 710271

где $\varphi(L)$ — функция Эйлера.

Из (6) следует, что у каждого коэффициента из множества коэффициентов децимации есть обратный и он равен $k_1^{\varphi(L)-1}$,

$$k_1^{\varphi(L)} = k_1 k_1 \dots k_1 \equiv 1 \pmod L, \tag{7}$$

число сомножителей в (7) определяется функцией Эйлера.

Пары ХДС, построенные по коэффициентам децимации k_1, k_2 и $k_1' = 1$, k_2', дают ПФВК одного типа, а это означает, что в первой строке матрицы $\|R\|$ содержатся все возможные типы ПФВК, существующие для системы сигналов с объемом M. Теорема доказана.

Утверждение. Значение первой строки взаимокорреляционной матрицы оказывается достаточным для определения статистических характеристик ПФВК системы ХДС. Действительно, среднее значение статистической характеристики S_{ij} ($i = \overline{1, l}$ — вид характеристики, например математическое ожидание модуля боковых выбросов; l — количество характеристик; $j = \overline{1, n}$ — тип функции ПФВК; n — количество типов функций ПФВК) может быть определено из выражения

$$\overline{S_i} = \frac{1}{C^2_{\varphi(L)}} \sum_{j=1}^{n} t_j \frac{\varphi(L)}{2} \cdot S_{ij}, \tag{8}$$

где t_j — количество ПФВК j-го типа в первой; строке; $t_j \frac{\varphi(6)}{2}$ — количество ПФВК j-го типа во всей матрице $\|R\|$.

После несложных преобразований выражение (8) можно записать в следующем виде:

$$\overline{S_i} = \frac{1}{\varphi(L) - 1} \sum_{j=1}^{n} t_j S_{ij}. \tag{9}$$

Таким образом с использованием выражения (9) могут быть рассчитаны все статистические характеристики ПФВК. При этом достаточно определить эти характеристики лишь для различных типов ПФВК первой строки матрицы $\|R\|$.

Оценим вычислительную сложность предложенного алгоритма исследования взаимокорреляционных свойств ХДС. При этом отметим, что традиционный алгоритм требует выполнения N_1 операций, $N_1 = C^2_{\varphi(L)}$. Для реализации предложенного требуется N_2 операций, $N_2 = \varphi(L)$.

Действительно, в соответствии с теоремой 2 первая строка взаимокорреляционной матрицы исчерпывает все разнообразные значения максимальных боковых выбросов ПФВК. Значения максимальных боковых выбросов для всех других пар ХДС, а также статистические характеристики ПФВК могут быть рассчитаны с применением теоремы 1 и утверждения 1 соответственно.

Эффективность предложенного алгоритма по сравнению с известным оценивается соотношением

$$C = N_1/N_2 \approx \frac{1}{2}(\varphi(L) - 1). \qquad (10)$$

Таким образом, вычислительная сложность известного алгоритма примерно в $\frac{1}{2}\varphi(L)$ раз больше предложенного. Анализ выражения (10) показывает, что эффективность нового алгоритма исследования взаимокорреляционных свойств ХДС возрастает с увеличением L.

Поступила в редколлегию 01.04.87