УДК 621.3

А. Г. НЕРУХ, д-р физ.-мат. наук, А. В. ВОЗИАНОВА

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ОПЕРАТОР УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ 6-МЕРНОГО ВЕКТОРА ПОЛЯ

Введение

Современное развитие технологий требует исследования электромагнитных нестационарных полей в сложных ограниченных средах, (например, киральные среды, движущиеся среды, искусственные среды, метаматериалы и т.п.). Моделирование соответствующих явлений приводит к необходимости решения сложных начально-краевых электромагнитных задач с явным учетом зависимости полей от времени, как правило, отличающейся от гармонической. Очень часто в таких задачах векторная структура поля имеет существенное значение и ее приходится учитывать. При этом не удается разделить материальные уравнения на независимые электрическую и магнитную составляющие, и тогда необходимо учитывать существенно 6-мерную структуру электромагнитного поля.

Наряду с дифференциальным подходом к описанию электромагнитного поля, новым мощным и быстро развивающимся средством для временного моделирования электромагнитных процессов в сложных структурах являются сейчас интегральные уравнения [1]. Для их решения применяются как аналитические, так и, большей частью, численные методы (методы моментов [2], методы вспомогательных источников [3] и т.д.). Однако, кроме существующей в численных схемах проблемы точности и стабильности, которая к тому же существенно усугубляется в многомерных задачах, численные методы обладают еще и тем недостатком, что область исследования с их помощью ограничена конкретными значениями параметров и основных величин. Это сужает видение картины явления или процесса в целом, позволяющей выявить общие закономерности, присущие данному явлению или процессу, и это значительной мере снижает эффективность метода интегральных уравнений, одним из преимуществ которого как раз и является интегральность описания. Поэтому важным является развитие аналитических методов исследования и построение на их базе аналитико-численных схем исследований, позволяющих проводить анализ явлений распространения электромагнитных волн в сложных средах, актуальный как теоретически, так и с практической точки зрения.

Формулирование интегральных уравнений во временной области, независимо от способа их дальнейшего решения, требует знание явного выражения для пространственно-временной функции Грина. Такая функция используется как в задачах в свободном пространстве [4], так и в задачах в средах: трехмерные векторные задачи со сложными средами [5], анизотропные среды [6], задачи с многослойными диэлектрическими структурами [7], задачи о структурах с запрещенными зонами [8]. Временная функция Грина уравнений Максвелла в неограниченном пространстве позволяет решать многие электродинамические задачи, такие как задачи для нестационарных источников [9, 10], задачи рассеяния во временном борновском приближении [11], задачи об электромагнитных колебаниях в фотонных кристаллах [12, 13] и т.д. В работе [4] рассмотрена полная функции Грина свободного пространства для уравнений Максвелла во временной области. Функция Грина получена с помощью метода операторов распространения (пропагаторов), обычных в квантовой механике, но сравнительно редко используемых в классической электродинамике. Существует немного работ, использующих такой подход, например, временные интегральные операторы распространения получены в работе [14] для исследования распространения импульсов в нестационарной, однородной и изотропной диэлектрической и магнитной среде.

В данной работе приводится общий подход к исследованию начально-краевой задачи для уравнений Максвелла в однородной среде во временной области, путем сведения их к интегральному уравнению Вольтера второго рода для 6-мерного вектора поля. Это достигается с помощью полученной функции Грина в 6-мерной формулировке во временной области. Интегральное уравнение эквивалентно уравнениям Максвелла и содержит в себе начальные и граничные условия, а также единым образом определяет поле во всем пространстве, включая как нестационарную область неоднородности, так и окружающее пространство. Получен разрешающий (резольвентный) оператор для этого уравнения, и он применен к исследованию преобразования плоской волны, а также излучения сосредоточенного источника в среде с резкими временными изменениями параметров. Произвольная нестационарность среды может быть аппроксимирована последовательностью таких резких изменений ее параметров, причем при каждом изменении рассчитывается точное аналитическое решение, полученное с помощью метода резольвенты.

Функция Грина уравнений Максвелла для 6-мерного вектора поля

Математический аппарат теории нестациорных электромагнитных явлений должен включать описание как непрерывных, так и скачкообразных изменений функций, а также учитывать взаимосвязь пространственных и временных изменений. Такая взаимосвязь имеет место, например, при движении границы среды, когда в каждой фиксированной точке, через которую проходит граница, происходит резкий временной скачок параметров среды. Адекватным математическим аппаратом является теория обобщенных функций [15]. Применение этой теории означает, в первую очередь, замену в уравнениях Максвелла обычных (классических) производных на обобщенные. Это позволяет включить в уравнения условия на поверхностях разрыва параметров среды. После перехода к обощенным производным форма уравнений не измениться.

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{B} = m_0\left(e_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + m_0\left(\operatorname{rot}\mathbf{M} + j\right) \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь **P** и M – векторы электрической и магнитной поляризаций среды, j – ток проводимости, ε_0 – электрическая постоянная, μ_0 – магнитная постоянная.

Если соединить оба эти уравнения в одно волновое, то мы получим уравнение, содержащее вторые производные и по времени и по координатам.

$$\left(\operatorname{rotrot} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = -\mu_0\left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial t}\right) \tag{2}$$

где $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ – скорость света в вакууме.

Для такого уравнения функция Грина тоже содержит вторые производные по времени [16], что усложняет как анализ, так и вычисление последующих выражений. Избежать повышения порядка производной по времени можно при использовании исходной системы уравнений Максвелла (1), записывая ее в виде одного матричного уравнения. Тогда и функция Грина для обобщенного матричного уравнения не должна содержать вторые производные по времени.

Сформулируем начально-краевую задачу, которая состоит в том, что в некоторой области, заданной характеристической функцией χ, которая равна 1 внутри области и нулю вне этой области, начиная с некоторого момента параметры среды становятся функцией от времени. В дальнейшем такой момент будем считать нулевым. Введем уравнения, описывающие всю среду во всем пространстве.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{ex}\right) + \mathbf{P}_{ex} \\ \mathbf{M} &= \chi\left(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{ex}\right) + \mathbf{M}_{ex} \\ j &= j_1 + j_{ex/r} \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь величины с индексом "ex" относятся к среде вне области, величины с индексом "1" описывают среду внутри области. Пусть $\mathbf{P}_{ex} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$, $\mathbf{M}_{ex} = \dfrac{\mu - 1}{\mu_0\mu}\mathbf{B}$. Тогда обобщенное матричное уравнение Максвелла относительно шестимерного вектора $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$ имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\times\bar{1} & -\nabla\times\bar{1}\\ \nabla\times\bar{1} & \frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}=-\mu\mu_0\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t} & \nabla\times\bar{1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi(\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{ex})\\ \chi(\mathbf{M}_i-\mathbf{M}_{ex})\end{pmatrix}-\mu\mu_0\begin{pmatrix}\bar{1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi j_i+j_{ext}\\ 0\end{pmatrix} \quad (4)$$

где $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – фазовая скорость, j_{extr} – токи, описывающие сторонние источники, ∇ – оператор набла, $\bar{1}$ – единичная матрица размерности 3×3.

Наряду с координатным представлением векторов и операторов в дальнейшем будем использовать импульсное представление, переход к которому осуществляется посредством преобразования Фурье-Лапласа $\langle\mathbf{p}|\mathbf{F}\rangle=\int\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle dx$ с помощью функций преобразования

$$\langle x||\mathbf{p}'\rangle_{ij}=\delta_{ij}e^{p't+ik'r},\ \langle\mathbf{p}||x\rangle_{ij}=\delta_{ij}e^{-pt-ikr},\ \mathbf{p}=(p,\mathbf{k})$$

Здесь p переменная преобразования Лапласа, k – переменная трехмерного преобразования Фурье.

Фундаментальное решение (функцию Грина) уравнения (4) будем искать в импульсном (Фурье-Лапласа) представлении в виде 6×6

$$\langle\mathbf{p}|G|\langle\mathbf{p}'|\rangle=\langle\mathbf{p}|\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}|\mathbf{p}'\rangle \quad (5)$$

где G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22} – искомые матрицы размерности 3×3. Уравнение для нахождения функции Грина примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{K} & -\mathbf{L}\\ \mathbf{L} & v^2\mathbf{K}\end{pmatrix}\langle\mathbf{p}|\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}|\mathbf{p}'\rangle=\begin{pmatrix}\bar{1} & 0\\ 0 & \bar{1}\end{pmatrix} \quad (6)$$

где $\mathbf{K}$ – матрица с элементами $\mathbf{K}_{ij}=v^{-2}p\delta_{ij}$, $\mathbf{L}$ – матрица с элементами $\mathbf{L}_{ij}=ie_{inj}k_n$.

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера, e_{inj} – кососимметрический тензор третьего ранга, $i,j,n=1,2,3$. Полученное матричное уравнение $\hat{Q}X=\hat{I}$ относительно неизвестной матрицы

$$\mathbf{X}=\langle\mathbf{p}|\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}|\mathbf{p}'\rangle,$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица размерности 6×6, решается обычным способом. Если $\det\hat{Q}=p^2+v^2k^2\neq0$, то функция Грина совпадает с обратной матрицей к матрице $\hat{Q}$ и имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}|G_{11}|\mathbf{p}'\rangle&=\mu\frac{p^2\delta_{ij}+v^2k_ik_j}{p(k^2+v^{-2}p^2)}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')=\frac{v^2}{\mu}\langle\mathbf{p}|G_{22}|\mathbf{p}'\rangle\\ \langle\mathbf{p}|G_{12}|\mathbf{p}'\rangle&=\frac{ie_{inj}k_n}{k^2+v^{-2}p^2}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')=-\mu\langle\mathbf{p}|G_{21}|\mathbf{p}'\rangle\end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta(\mathrm{p}-\mathrm{p}')=\dfrac{(2\pi)^3\delta(\mathrm{k}-\mathrm{k}')}{p-p'}$.

Следует отметить, что полюсы в формулах (7) или особые точки функции Грина $\langle\mathbf{p}|G|\mathbf{p}'\rangle$, имеют место при значениях k и p удовлетворяющих дисперсионному соотношению $p^2+v^2k^2=0$, т.е. равенства нулю детерминанта $\hat{Q}$. Это существенно при выполнении обратного преобразования Фурье-Лапласа для получения выражения для функции Грина в координатном (пространственно-временном) представлении

$$\langle x|G_{11}|x'\rangle = \frac{1}{4\pi}\mu\left(\partial_t \frac{\delta(h)}{R} - v^2\nabla\nabla\frac{\theta(h)}{R}\right) = \frac{v^2}{\mu}\langle x|G_{22}|x'\rangle,\ \langle x|G_{12}|x'\rangle = \frac{1}{4\pi} rot\frac{\delta(h)}{R} = -\mu\langle x|G_{21}|x'\rangle, \quad (8)$$

где $h = T - \frac{R}{v}$, $T = t - t'$, $R = |\mathrm{r} - \mathrm{r}'|$.

Если $\det\hat{Q} = p^2 + v^2k^2 = 0$, то решение матричного уравнения будет псевдообратной матрицей $\hat{Q}^+$ [17], и функция Грина будет иметь вид

$$\langle \mathbf{p}|G_{11}^+|\mathbf{p}'\rangle = \frac{\left(p^2\delta_{jm} + 3v^2k_jk_m\right)}{2pk^2}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = v^2\langle \mathbf{p}|G_{22}^-|\mathbf{p}'\rangle;$$
$$\langle \mathbf{p}|G_{12}^+|\mathbf{p}'\rangle = \frac{-ie_{jnm}k_n}{2k^2}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = -\langle \mathbf{p}|G_{21}^-|\mathbf{p}'\rangle, \quad (9)$$

Обратное преобразование Фурье-Лапласа в этом случае, при условии что $p = \pm ikv$, дает интеграл $\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dp}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kr}{kr}f(p)dk$. Это есть двойной интеграл от функции двух переменных в комплексной плоскости. Этот интеграл обращается в ноль, как двойной интеграл по множеству меры нуль (по паре мнимых прямых $p = \pm ikv$). Следовательно, при условии $\det\hat{Q} = p^2 + v^2k^2 = 0$ функция Грина обращается в ноль. Таким образом, выражение (8) исчерпывает все решения уравнения (4). В (8) содержатся производные по времени только первого порядка. Структура полученной функции Грина совпадает с результатом, полученным в [8] с помощью метода рассеяния [18].

Оператор резольвенты

Переход от уравнении Максвелла в дифференциальной форме к интегральному уравнению Вольтера второго рода производиться посредством свертки функции Грина с правой частью уравнения (4), которая содержит всю информацию о нестационарности и границах неоднородности.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{B}_0\end{pmatrix} - \frac{\mu_0}{4\pi}\begin{pmatrix}\mu\left(\partial_t\frac{\delta(h)}{R} - v^2\nabla\nabla\frac{\theta(h)}{R}\right) & \mathrm{rot}\frac{\delta(h)}{R}\\ -\mu\,\mathrm{rot}\frac{\delta(h)}{R} & \frac{1}{v^2}\left(\partial_t\frac{\delta(h)}{R} - v^2\nabla\nabla\frac{\theta(h)}{R}\right)\end{pmatrix}\otimes$$
$$\otimes\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t} & \mathrm{rot}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{ex})\\ \chi(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{ex})\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\chi j_1 + j_{ext}\\ 0\end{pmatrix}\right] \quad (10)$$

Материальные уравнения можно записать в операторном виде

$$\begin{pmatrix}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{ex})\\ (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{ex})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{P}_e & \hat{P}_m\\ \hat{M}_e & \hat{M}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} \quad (11)$$

Уравнение (10) может быть записано в операторной форме следующим образом

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \hat{K}\mathrm{F} \quad (12)$$

где $\hat{K}$ – интегральный оператор в уравнении (10), F_0 – свободный член этого уравнения. Тогда решение этого уравнения может быть представлено через резольвентный оператор $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \hat{R}\mathrm{F}$. Оператор резольвенты $\hat{R} = \begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$, сам удовлетворяет такому уравнению

$$\hat{R} = \hat{K} + \hat{K}\hat{R} \tag{13}$$

где R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22} – матрицы размерности 3×3.

Рассмотрим случай, когда параметры среды меняются скачком в нулевой момент времени $\varepsilon\to\varepsilon_1$ и $\mu\to\mu_1$. Тогда параметры, характеризующие среду, имеют следующий вид:

$$\hat{P}_e = \varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon),\ \hat{M}_m = \frac{1}{\mu_0\mu}\left(1-\frac{\mu}{\mu_1}\right),\ \hat{P}_m = 0,\ \hat{M}_e = 0 \tag{14}$$

В этом случае уравнение (10) примет вид

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{B}_0\end{pmatrix} - \frac{\mu_0}{4\pi}\begin{pmatrix}\mu\left(\partial_t\dfrac{\delta(h)}{R} - v^2\nabla\nabla\dfrac{\theta(h)}{R}\right) & \operatorname{rot}\dfrac{\delta(h)}{R}\\ -\mu\operatorname{rot}\dfrac{\delta(h)}{R} & \dfrac{1}{v^2}\left(\partial_t\dfrac{\delta(h)}{R} - v^2\nabla\nabla\dfrac{\theta(h)}{R}\right)\end{pmatrix}\times$$
$$\times\left[\begin{pmatrix}\partial_t & \operatorname{rot}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{P}_e & 0\\ 0 & \hat{M}_m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\chi j_1 + j_{\text{ext}}\\ 0\end{pmatrix}\right] \tag{15}$$

Оператор резольвенты для уравнения (13) будем искать в импульсном (Фурье-Лапласа) представлении

$$\langle \mathrm{p}|\hat{R}|\mathrm{p}'\rangle = \langle \mathrm{p}|\hat{K}|\mathrm{p}'\rangle + \int d\mathrm{p}''\langle \mathrm{p}|\hat{K}|\mathrm{p}''\rangle\langle \mathrm{p}''|\hat{R}|\mathrm{p}'\rangle \tag{16}$$

После вычисления интеграла в свертке $\int d\mathrm{p}''\langle \mathrm{p}|\hat{K}|\mathrm{p}''\rangle\langle \mathrm{p}''|\hat{R}|\mathrm{p}'\rangle$, получаем систему линейных уравнений для элементов матриц R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}. Решив систему уравнений, получим оператор резольвенты в импульсном представлении

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}|R_{11}|\mathbf{p}'\rangle &= -\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\frac{p^2\delta_{ij} + v_1^2 k_i k_j}{p^2 + v_1^2 k^2}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\\
\langle \mathbf{p}|R_{12}|\mathbf{p}'\rangle &= -\frac{\mu_1-\mu}{\mu}v_1^2\frac{ipe_{imj}k_n}{p^2 + v_1^2 k^2}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\\
\langle \mathbf{p}|R_{21}|\mathbf{p}'\rangle &= \frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\frac{ipe_{imj}k_n}{p^2 + v_1^2 k^2}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\\
\langle \mathbf{p}|R_{22}|\mathbf{p}'\rangle &= \frac{\mu_1-\mu}{\mu}v_1^2\frac{k^2\delta_{ij} - k_i k_j}{p^2 + v_1^2 k^2}\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')
\end{aligned} \tag{17}$$

где $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_0\mu_1}}$ – фазовая скорость в новой среде.

Выполнив обратное преобразование Фурье-Лапласа, получим выражение для резольвенты в координатном представлении

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{x}|R_{11}|\mathrm{x}'\rangle &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\left(\partial_t^2 + v_1^2\Delta\right)\times\bar{1}\delta(h_1)\\
\langle \mathrm{x}|R_{12}|\mathrm{x}'\rangle &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu}{\mu_1}\cdot v_1\partial_t\nabla\times\bar{1}\delta(h_1)\\
\langle \mathrm{x}|R_{21}|\mathrm{x}'\rangle &= \frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\partial_t\nabla\times\bar{1}\frac{1}{R}\delta(h_1)\\
\langle \mathrm{x}|R_{22}|\mathrm{x}'\rangle &= \frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu}{\mu_1}\cdot v_1^2(\Delta-\nabla\nabla)\times\bar{1}\frac{1}{R}\delta(h_1)
\end{aligned} \tag{18}$$

где $h_1 = T - \dfrac{R}{v_1}$.

Этот оператор дает единое сжатое выражение, описывающее изменение электрического и магнитного полей. Также заметим, что оператор резольвенты содержит вторую производную по времени, в отличие от функции Грина, которая содержит только первую производную по времени.

Преобразование электромагнитного поля в среде с изменяющимися во времени параметрами

Рассмотрим преобразование плоской гармонической волны в однородной среде, параметры которой изменяются скачком в нулевой момент времени. Начальное поле волны до скачка диэлектрической поляризации описывается вектором $F_0(t,r) = \begin{pmatrix} E_0 \\ \frac{1}{\omega}[k_0, E_0] \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_0 r)}$. В результате скачка волна распадается на две, противоположно распространяющиеся волны, имеющие новую частоту $\omega_1 = \dfrac{v_1}{v}\omega$, но сохраняющие прежнее значение волнового вектора

$$\begin{pmatrix} E(t,r) \\ B(t,r) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{v_1}{v}\right)\begin{pmatrix} E_0 \\ \omega_1 [k_0, E_0] \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t + ik_0 r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - \frac{v_1}{v}\right)\begin{pmatrix} E_0 \\ -\omega_1 [k_0, E_0] \end{pmatrix} e^{-i\omega_1 t + ik_1 r} \qquad (19)$$

Этот результат находится в соответствии с полученным ранее в работе [19] для скалярного случая. Как следует из (19) характер волн сохраняется. амплитуды электрического и магнитного полей преобразуются одинаково. однако магнитные поля в новых волнах направлены в противоположные стороны..

Рассмотрим теперь преобразование более сложного первичного поля, а именно поле точечного источника $F_0(t,r) = \dfrac{ik_0}{|r - r_0|}\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{\omega}[k_0, a] \end{pmatrix} e^{i\omega t - ik_0(r - r_0)}$, расположенного в точке r_0. Скачок диэлектрической проницаемости приводит к более сложному, чем в предыдущем случае, изменению поля.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E(t,r) \\ B(t,r) \end{pmatrix} = \frac{ik_0}{|r - r_0|}&\left(\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{\omega}[k_0, a] \end{pmatrix} e^{i\omega t - ik_0(r - r_0)}\theta\left(\frac{|r - r_0|}{v_1} - t\right) + \right.\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{v_1}{v}\right)\begin{pmatrix} a \\ \omega_1 [k_0, a] \end{pmatrix} e^{iv_1 k_0 t - ik_0 r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - \frac{v_1}{v}\right)\begin{pmatrix} a \\ -\omega_1 [k_0, a] \end{pmatrix} e^{-iv_1 k_0 t - ik_0 r} + \qquad (20)\\ &\left.+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{v_1}{v}\right)\begin{pmatrix} a \\ \omega_1 [k_0, a] \end{pmatrix} e^{\omega_1\left(t - \frac{|r - r_0|}{v_1}\right)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - \frac{v_1}{v}\right)\begin{pmatrix} a \\ -\omega_1 [k_0, a] \end{pmatrix} e^{-\omega_1\left(t - \frac{|r - r_0|}{v_1}\right)}\right)\theta\left(t - \frac{|r - r_0|}{v_1}\right)\right)\end{aligned}$$

Первичное излучение также расщепляется на две противоположно распространяющиеся, но теперь уже сферические волны. Одна из них представляет собой прямую волну, расходящуюся от источника, вторая – обратную волну, сходящуюся к источнику. Частота этих волн изменяется таким же образом, как и в случае плоской волны. Однако. в отличие от того случая, в пространстве образуется сферическая граница $|r - r_0| - v_1 t = 0$, расширяющаяся от точки источника со скоростью, равной фазовой скорости волн в новой среде. Внутри этой сферы существует только одна из расщепившихся волн, а именно волна, сходящаяся к точке источника. Кроме этой волны внутри сферы существует также волна излучения источника в новой среде, имеющая частоту источника. Расходящаяся волна существует только вне сферы. Волна, сходящаяся к источнику, фокусируется в точке источника, которая является для нее особой точкой. Однако, это является артефактом, так как рассмотренная модель предполагает бесконечно мощный источник механизма изменения диэлектрической проницаемости. В реальной ситуации обращения в бесконечность не будет, однако, явление фокусировки сохранится.

Выводы

Получена пространственно-временная функция Грина уравнений Максвелла для шестимерного вектора поля, объединяющего электрическую и магнитную составляющие. В отличие от обычно используемой трехмерной функции Грина волнового уравнения полученная функция не содержит вторую производную по времени, а только первую.С ее помощью получены интегральные уравнения Вольтера второго рода во временной области, полностью эквивалентные уравнениям Максвелла с граничными и начальными условиями.

Рассмотрена начальная электромагнитная задача, описывающая динамику поля в случае резкого временного скачка параметров неограниченной среды. Для этой задачи построен оператор резольвенты интегрального уравнения. С помощью этого оператора проанализировано преобразование электромагнитного поля, вызванное резким изменением во времени диэлектрической проницаемости среды. Рассмотрено как поле плоской волны, так и поле излучения точечного источника.

Література: 1. *J. Pingenot, S Chakraborty, V. Jandhyala.* Polar integration for exact space-time quadrature in time-domain integral equations // IEEE Trans on Antennas and Propag. 2006. Vol. 54, No 10. P 3037-3042. 2. *R. F. Harrington.* Field Computation by Moment Methods. New York: MacMillan, 1968. 3. *A. Ludwig, Y. Leviatan.* Towards a stable two-dimensional time-domain source-model solution by use of a combined source formulation // IEEE Trans. On Antennas and Propag. 2006. Vol.54, No 10. P. 3010-3021. 4. *R. Nevels, J. Jeong*: The time domain Green's function and propagator .IEEE Trans. on Antennas and Propag., vol. 52, pp. 3012-3018. 2004. 5. *I. V Lindell, A. H. Sihvola. S. A. Tretyakov, A. J Viitanen* Electromagnetic waves on chiral and bi-isotropic media. Norwood, MA: Artech House,1994. 6. *P G. Cottis, G.D Kondylis* Properties of the Green's function for an unbounded medium // IEEE Trans. on Antennas and Propag. 1995, Vol. 43, No 2. P. 154-161. 7. *K.A. Michalski, J. R. Mosig.* Multilayered media Green's functions in integral equation formulations // IEEE Trans. on Antennas and Propag. 1997. Vol. 45, No 3. P. 508-518. 8. *C Serier C Cheype, R Chantalat, M. Thevenot. T Monediere. A. Reineix, B. Jecko.* 1-D phptonic bandgap resonator antenna // Microwave Opt. Technol. Lett. 2001. Vol. 29, No 5. P.312-315. 9. *Y. He. M. Maruyma, T. Uno, S. Adachi, T. Mashiko.* Dipole antenna reseption of transient electromagnetic fields refracted from a dipole antenna buried in a lossy half-space // IEICE Trans. 1991. Vol. E 74, No 9. P. 2870-2876. 10. *R. Cicchetti.* Transient analysis of radiated field from electric dipoles and microstrip lines // IEEE Trans. on Antennas and Propag., 1991. Vol.39, No 7. P. 910-918. 11. *D. Quak. A.T. de Hoop.* Time domain Born approximation to the far-field scattering of plane electromagnetic waves by a penetrable abject // Radio Science. 1986. Vol. 21, No 5. P. 815-821. 12. *M.Skorobogatiy, J.D. Joannopoulos.* Rigid vibrations of a photonic crystal and induced interband transitions // Phisical Review. 2000. Vol. 61, No 8. P. 5293-5302. 13. *M.Skorobogatiy. J.D. Joannopoulos.* Photon modes in photonic crystals undergoing rigid vibrations and rotations // Phisical Review. 2000. Vol. 61, No 23. P. 15554-15557. 14. *S. Rikte. I. Aberg.* One-way wave operators for nonstationary dielectrics. Wave Motion 32 (2000) 25-36. 15. *ВладимировВ.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 16. *A.G. Nerukh . Scherbatko, M.Marciniak* Electromagnetic of modulated media with application to photonics. Warsaw, 2001. 17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 18. *G. Barton.* Elements of Green's function and propagation. Oxford. U.K.: Clarendon Press, 1989. 19. *F. R. Morgenthaler.* Velocity modulation of electromagnetic waves, 1959, 1958. Vol. MTT–6, 167-172.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 21.03.2007