УДК 519.6

О.О. Литвин, Є.Л. Хурдей

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків, Україна, hurdei@mail.ru

ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-ПРОЕКЦІЙНІ ПОЛІНОМИ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ *n*-го СТЕПЕНЯ З ВІДОМИМИ ПРОЕКЦІЯМИ ВЗДОВЖ ЗАДАНОЇ СИСТЕМИ ПЕРЕТИННИХ ПРЯМИХ

В роботі досліджується існування та єдиність інтерполяційно-проекційного полінома степеня n для не менше двох перетинних прямих. Доведено, що інтерполяційно-проекційні поліноміальні оператори точно відновлюють поліноми степеня $n = M - 1$. Доведено відповідні твердження для інтерполяційно-проекційних поліномів.

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-ПРОЕКЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ, ПЕРЕТИННІ ПРЯМІ, ПРОЕКЦІЯ, ЛІНІЙНО-НЕЗАЛЕЖНА СИСТЕМА

Вступ

Обчислювальна та прикладна математика широко використовує для розв'язання багатьох задач науки і техніки поняття інтерполяції функцій. Для побудови операторів інтерполяції використовують широко відомі інтерполяційні поліноми Лагранжа, в яких в явному вигляді написані формули з координатами точок інтерполяції і значеннями наближуваної функції в точках інтерполяції. Одним з найважливіших досягнень людства в кінці минулого століття є поява і широке використання комп'ютерної томографії, яка для наближення функції 2-х або 3-х змінних використовує інтеграли від неї (проекції) вздовж заданої системи ліній, що перетинають об'єкт дослідження (тобто область задання функцій $f(x,y)$ або $f(x,y,z)$ відповідно).

Щоб знайти інтерполяційний поліном, можна розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів полінома, а можна зразу ж його записати у вигляді полінома Лагранжа.

В роботі [1] запропоновано метод побудови операторів інтерполяції функції $f(x) = f(x_1, x_2)$ на системі точок $A_{kl} = \Gamma_k \cap \Gamma_l$, де

$$\Gamma_k = \{(x_1,x_2) : \omega_k(x_1,x_2) = x_1\omega_{k1} + x_2\omega_{k2} - \gamma_k = 0\},$$
$$k = \overline{1,M}.$$

1. Постановка проблеми

Розглянемо деякі твердження, доведені в роботі [1].

Накладемо на множину прямих $\{\Gamma_k\}, k = \overline{1,M}$ такі обмеження:

1. Ніякі три прямі з множини $\{\Gamma_k\}, k = \overline{1,M}$ не перетинаються в одній точці.

2. Кожна пряма Γ_i з множини $\{\Gamma_k\}$ перетинається з усіма іншими прямими, тобто серед прямих $\{\Gamma_k\}$ нема паралельних (дану умову можна послабити).

3. Для чисел $\delta_k =: \int\limits_{\Gamma_k} H_k^*(x)ds$ виконується нерівність

$$\delta_k =: \int\limits_{\Gamma_k} H_k^*(x)ds \neq 0, \;\; H_k^*(x) =: \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{M} \omega_i(x), k = \overline{1,M}.$$

Теорема. Нехай

$$f(x) \in K(\Omega) =$$
$$= C(\Omega) \cap \left\{ f(x) : \exists \int\limits_{\Gamma} f(x)ds < \infty, \forall \Gamma, \Gamma \cap \Omega \neq \varnothing \right\}.$$

Тоді оператор

$$T_M f(x) = \sum_{k=1}^{M} H_k(x) \left[\int\limits_{\Gamma_k} f(x)ds - \int\limits_{\Gamma_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{M} f(A_{kl})h_{kl}(x)ds \right] +$$
$$+ I_{M-2} f(x), \qquad (1)$$

де використано позначення

$$H_k(x) = \frac{H_k^*(x)}{\delta_k}; M = 2 \Rightarrow h_{12} \equiv 1;$$

$$M > 2 \Rightarrow h_{kl}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k,l}}^{M} \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(A_{kl})}, k \neq l;$$

$$I_{M-2} f(x) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{M} f(A_{kl})h_{kl}(x),$$

задовольняє умові [1]

$$\int\limits_{l} T_M f(x)ds = \int\limits_{l} f(x)ds =: \gamma_l, l = \overline{1,M};$$

$$T_M x^\alpha \equiv x^\alpha, 0 \le |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \le M - 1;$$

$$x^\alpha =: x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Лема. Інтерполяційний оператор I_{M-2} має властивості [1]:

$$I_{M-2} f(A_{kl}) = f(A_{kl}), k,l = \overline{1,M}, k \neq l,$$

$$I_{M-2} x^\alpha \equiv x^\alpha, 0 \le |\alpha| \le M - 2,$$

$$\forall f \in C^q(\Omega), 1 \le q \le M-1 \Rightarrow f(x) = (I_{M-2} + r_{M-2}) f(x),$$

$$r_{M-2} f(x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt -$$

$$- \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{M} h_{kl}(x) \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(A_{kl} - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt.$$

В даній роботі розв'язується задача: для M $(M \ge 2)$ перетинних прямих, які задовольняють обмеження 1 — 3, дослідити деякі питання пов'язані з існуванням та єдиністю полінома $P_n(x,y)$, який будемо називати інтерполяційно-проекційним поліномом, що має наступні властивості:

1. $$P_n(x_{kj},y_{kj}) = f(x_{kl},y_{kl}), k=\overline{1,n}, j=\overline{k+1,M}. \quad (2)$$

2. $$\int\limits_{\Gamma_k} P_n(x,y)ds = \int\limits_{\Gamma_k} f(x,y)ds = a_k, k=\overline{1,M}, \quad (3)$$

$\Gamma_k = \{(x,y): \omega_k(x,y) = x\omega_{k1} + y\omega_{k2} - \gamma_k = 0\}, k=\overline{1,M}$ $\omega_{k1}^2 + \omega_{k2}^2 = 1, (x_{kl},y_{kl}) = {}_k \cap {}_l, k \neq l$; числа a_k будемо називати проекціями, як це прийнято в комп'ютерній томографії.

2. Основні твердження роботи

Лема 1. Кількість точок перетину M прямих серед яких немає паралельних, тобто кожна пряма перетинається з усіма іншими $(M-1)$ прямими, причому в одній точці не перетинаються більше ніж дві прямі, дорівнює $Q_2(M) = \frac{M(M-1)}{2}$.

Доведення. Доведення будемо проводити методом математичної індукції. Дійсно

1. При $M=1$ кількість точок перетину прямих $Q_2(1)=0$;

2. При $M=2$ кількість точок перетину прямих $Q_2(2)=1$;

3. При $M=3$ кількість точок перетину всіх трьох прямих $Q_2(3)=3$.

Припустимо, що формула

$$Q_2(M) = \frac{M(M-1)}{2},$$

яка справедлива для $M=1$, $M=2$ і $M=3$, виконується для довільного $M-1$. Тобто

$$Q_2(M-1) = \frac{(M-1)(M-2)}{2}, M>2.$$

Враховуючи, що додавання ще однієї прямої, яка повинна перетинатися з усіма іншими $M-1$ прямими, додасть $M-1$ нову точку. Тобто,

$$Q_2(M) = Q_2(M-1) + M - 1 = \frac{(M-1)(M-2)}{2} + M - 1 =$$
$$= \frac{M^2 - M}{2} = \frac{M(M-1)}{2}.$$

Отже, $Q_2(M) = \frac{M(M-1)}{2}$ – загальна кількість точок перетину M прямих.

Лема1 доведена.

Лема 2. Загальна кількість коефіцієнтів алгебраїчного полінома від 2-х змінних степеня n дорівнює

$$Q_1(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (4)$$

Доведення. Доведення будемо проводити методом математичної індукції. Дійсно

1. При $n=0$ кількість коефіцієнтів $Q_1(0)=1$;

2. При $n=1$ кількість коефіцієнтів $Q_1(1)=3$.

Припустимо, що формула (4) справедлива для $n-1$, тобто, $Q_1(n-1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Врахуємо, що збільшення степеня полінома з $n-1$ до n додасть всього $n+1$ одночленів і отримаємо многочлен вигляду $a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0,n}y^n$. Це означає, що загальна кількість коефіцієнтів в поліномі степеня n буде дорівнювати

$$Q_1(n) = Q_1(n-1) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Таким чином, формула

$$Q_1(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

згідно з методом математичної індукції доведена.

Лема 2 доведена.

Зауваження. Таким чином, кількість коефіцієнтів полінома степеня n, якщо $n=M-1$ буде дорівнювати $Q_1(n)|_{n=M-1} = Q_2(n)|_{n=M-1} + M$.

Лема 3. Існує поліном степеня *n*, який має властивості (2) — (3).

Доведення. Кількість точок, в яких виконується умова (2), дорівнює $Q_2 = Q_1 - M$, де $Q_1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Кількість умов (3) дорівнює M. Тому загальна кількість умов (2) — (3) дорівнює $Q_2 + M = Q_1$, таким чином кількість рівнянь (2) — (3) дорівнює кількості коефіцієнтів полінома $P_n(x,y)$ степеня *n*. Врахуємо, що всі функціонали, які входять у формування системи рівнянь (2) — (3) є лінійно незалежними, оскільки ні один із інтегралів (3), при зроблених припущеннях, не може бути виражений через інтеграли по всіх $M-1$ інших прямих заданої системи. Крім того інтеграли по цих прямих не можуть бути виражені через значення функції в точках перетину вказаних прямих для довільної функції $f(x,y)$. Звідси витікає, що якщо один поліном $P_{1_n}(x,y)$ степеня *n* збігається з другим поліномом $P_{2_n}(x,y)$ степеня *n* в точках перетину M прямих і інтеграли від $P_{1_n}(x,y)$ будуть дорівнювати інтегралам від $P_{2_n}(x,y)$ вздовж заданих прямих, то такі два поліноми тотожно рівні. Оскільки їх різниця буде поліномом $P_n(x,y) = P_{1_n}(x,y) - P_{2_n}(x,y)$ з властивостями:

$$\begin{cases} P_n(x_{kj},y_{kj}) = 0, k=\overline{1,n}, j=\overline{k+1,M}, \\ \int\limits_{\Gamma_k} P_n(x,y)ds = 0, k=\overline{1,M}, \end{cases}$$

Очевидно, ця система рівнянь є однорідною, має тривіальній розв'язок

$$a_j = 0,\ j = \overline{0, \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1}.$$

Таким чином, маємо, що $P_{1_n}(x,y) = P_{2_n}(x,y)$.

Лема 3 доведена.

Теорема. Якщо маємо M прямих і кожна з них перетинається з $(M-1)$–ю іншою, в одній точці перетинаються тільки дві прямі, то оператор, який інтерполює $f(x,y)$ в точках перетину цих прямих і проекції від якого вздовж заданих прямих дорівнюють проекціям від $f(x,y)$, точно відновлює всі поліноми степеня $n=M-1$.

Доведення. Розглянемо поліном степеня $n=M-1$, який має $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ коефіцієнтів. Невідомі коефіцієнти знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} P_n(x_{kj},y_{kj})=f(x_{kj},y_{kj}), k=\overline{1,n}, j=\overline{k+1,M} \\ \int\limits_{\Gamma_k} P_n(x,y)ds=\int\limits_{\Gamma_k} f(x,y)ds, k=\overline{1,M} \end{cases},$$

де $f(x_{kj},y_{kj})$ – відомі значення функції $f(x,y)$ в точка $(x_{kj},y_{kj})=(x_{jk},y_{jk})$ перетину прямих Γ_k і Γ_i, $k,i=\overline{1,M}$.

Враховуючи твердження попередньої леми 3 можемо стверджувати, що загальна кількість рівнянь (2) – (3) дорівнює $Q_1(n)|_{n=M-1}$. Тобто кількість рівнянь дорівнює кількості коефіцієнтів полінома $P_n(x,y)$ степеня *n*. Зазначимо, що всі точки (x_{kj},y_{kj}) є різними за припущенням, що серед Γ_k, $k=\overline{1,M}$ немає паралельних. Крім того, ні один з інтегралів $\int\limits_{\Gamma_k} f(x,y)ds, k=\overline{1,M}$ не може бути представлений у вигляді лінійної комбінації значень функції $f(x_{kj},y_{kj})$ та інтегралів $\int\limits_{\Gamma_j} f(x,y)ds, j=\overline{1,M}, j\neq k$. Тобто, вся система функціоналів, які входять у формування системи рівнянь (2) – (3) є лінійно незалежними. Звідси витікає, що детермінант такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь не дорівнює нулю, тобто система невироджена і має єдиний розв'язок.

Теорема доведена.

Зауважимо, що на основі формули (1) можна довести, єдиність такого полінома степеня $n=M-1$. Фактично формула (1) являє собою поліном найменшого степеня $n=M-1$, який задовольняє заданим умовам (2) – (3).

3. Приклади

Приклад 1.

Нехай *M=3* і задано три прямі Γ_k такі, що

$$\Gamma_k : \omega_k(x,y)=0, k=\overline{1,3},$$

де $\omega_k(x,y)$ задаються у вигляді

$$\omega_1(x,y)=-hx+Ry-hR, \omega_2(x,y)=$$
$$=-hx-Ry+hR, \omega_1(x,y)=0,$$

які перетинаються в точках

$$A_{12}(-R,0), A_{13}(R,0), A_{23}(0,h),$$

Нехай

$$P_2(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2$$

поліном степеня $n=2$ з $m=6$ невідомими коефіцієнтами, які знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} P_2(x_{kj},y_{kj})=f(x_{kj},y_{kj}), l,k=\overline{1,3}, l\neq k, l<k, \\ \int\limits_{\Gamma_k} P_2(x,y)ds=\int\limits_{\Gamma_k} f(x,y)ds, k=\overline{1,3}; \end{cases}$$

де $f(x_{kj},y_{kj})$ – відомі значення функції $f(x,y)$ в точка перетину прямих $\Gamma_k, k=\overline{1,3}$ та з заданими проекціями функції.

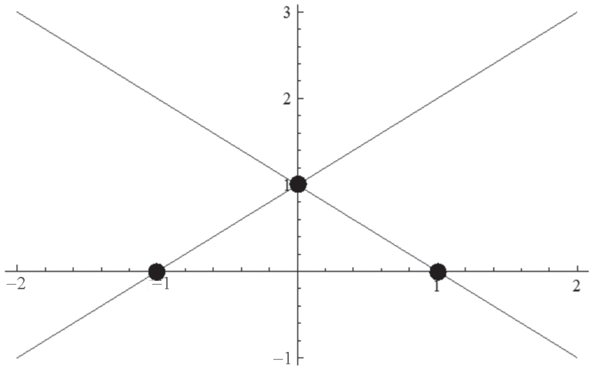

Рис. 1. Графіки прямих $\Gamma_k, k=\overline{1,3}$ та точок їх перетину та $f(x,y)=1+2x+3y+4x^2+5xy+6y^2$.

Розв'язком системи є поліном

$$P_2(x,y)=1+2x+3y+4x^2+5xy+6y^2.$$

Таким чином, в цьому прикладі поліном 2-го степеня точно відновлюється відповідним інтерполяційно-проекційним поліномом 2-го степеня.

Приклад 2.

Нехай *M*=4 і задано чотири прямі Γ_k такі, що $\Gamma_k : \omega_k(x,y)=0, k=\overline{1,4}$, де $\omega_k(x,y)$ задаються у вигляді

$$\omega_1=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\frac{4}{5\sqrt{2}}, \omega_2=\frac{5x-7y+2}{\sqrt{74}}$$
$$\omega_1=\frac{-x-8y+5}{\sqrt{65}}, \omega_4=\frac{-6x-y+4}{\sqrt{37}}$$

які перетинаються в точках

$$A_{12}\left(\frac{3}{10},\frac{1}{2}\right), A_{13}\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right), A_{14}\left(\frac{16}{25},\frac{4}{25}\right),$$
$$A_{23}\left(\frac{19}{47},\frac{27}{47}\right), A_{24}\left(\frac{26}{47},\frac{32}{47}\right), A_{34}\left(\frac{27}{47},\frac{26}{47}\right).$$

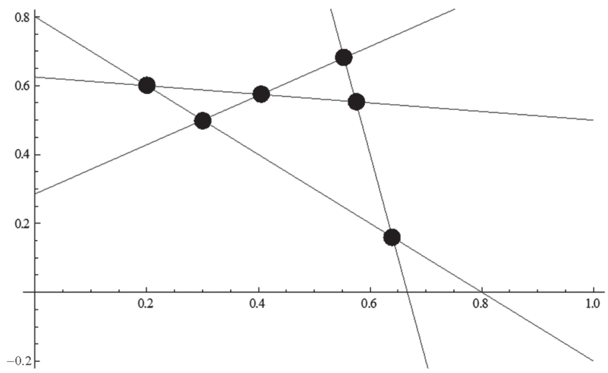

Рис. 2. Графіки прямих $\Gamma_k, k=\overline{1,4}$ та точок їх перетину

та $f(x,y)=1+2x+3y+4x^2+5xy+6y^2+$
$+7x^3+8x^2y+9xy^2+10y^3$.

Нехай

$$P_3(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2+$$
$$+a_6x^3+a_7x^2y+a_8xy^2+a_9y^3$$

– поліном степеня $n=3$ з $m=10$ невідомими коефіцієнтами, які знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} P_3(x_{kj},y_{kj})=f(x_{kj},y_{kj}), k,l=\overline{1,4}, k\neq l, l<k, \\ \int\limits_{\Gamma_k} P_3(x,y)ds=\int\limits_{\Gamma_k} f(x,y)ds, k=\overline{1,4}; \end{cases}$$

де $f(x_{kj},y_{kj})$ – відомі значення функції $f(x,y)$ в точка перетину прямих $\Gamma_k, k=\overline{1,4}$ та з заданими проекціями функції. Розв'язком системи є поліном

$$P_3(x,y)=1+2x+3y+4x^2+5xy+6y^2+$$
$$+7x^3+8x^2y+9xy^2+10y^3.$$

Таким чином, в цьому прикладі поліном 3-го степеня точно відновлюється відповідним інтерполяційно-проекційним поліномом 3-го степеня.

Висновки

Таким чином, в даній роботі доведено, що введені інтерполяційно-проекційні поліноміальні оператори, які інтерполюють функцію $f(x,y)$ та проекції яких на заданій системі відрізків M прямих дорівнюють відповідним проекціям від наближуваної функції $f(x,y)$, точно відновлюють поліноми степеня $n=M-1$. Доведено відповідні леми та теореми. В роботі розглянуто приклади, в яких поліноми степеня $n=3$ і $n=4$ інтерполюють задану функцію $f(x,y)$. В подальшому автори планують узагальнити цей результат на систему M груп паралельних перетинних прямих.

Список літератури: 1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с. **2.** *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ./ Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 279 с. **3.** *Пикалов В. В., Мельников Т. С.* Томография плазмі // Новосибирск:Наука, 1995. – 345 с. **4.** *Филонин О. В.* Малоракурсная томография в физическом єксперименте. // (Матер. 2 международной научно – пр. конф.). Высокие технологии и фундаментальные исследования. С – Петербург, 2006, т. 4. – С. 245–252. **5.** *Буштабер В. М., Маслов В. К.* Математические модели и алгоритмы томосинтеза волновых полей в неоднородных средах, в кн.: Вопросы кибернетики. Математические проблемы томографии. – М., АН СССР, 1990. – С. 7–56. **6.** *Клюев В. В., Вайнберг Э. М., Ведмин В. Е., Казак И. А.* Новое поколение рентгеновских вычислительных томографов для технической диагностики. Дефектоскопия. 19991, №1. – С. 81–86. **7.** *Льюис А. К., Наттерет Ф.* Математические проблемы реконструктивной томографии.// ТИИЭР, т. 78, №3, 1983. – С. 111–126. **8.** *Вейнштейн Б. К.* О нахождении строения объектов по проекциям//Кристаллография. 1972, т. 15, вып. 5. – С. 324–331. **9.** *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. – М: Мир, 1983, 352 с. **10.** *Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.* Вычислительная томография и физический эксперимент. / УФН, 1983, т. 141, вып. 3. – С. 469–498.

Надійшла до редколегії 5.03.2015

УДК 519.6

Одна теорема об интерполяционно-проекционные полиномы от двух переменных *n*-й степени вдоль заданной системы пересекающихся прямых / О. О. Литвин, Е. Л. Хурдей // Бионика интелекта: научн.-техн. журнал. – 2015. – № 1 (84). – С. 65–68.

Вычислительная и прикладная математика широко используют для решения многих задач науки и техники понятие интерполяции функций. В данной работе исследуются некоторые вопросы из существования и единственности интерполяционного-проекционного полинома $P_n(x, y)$ для M ($M \geq 2$) пересекающихся прямых. Доказано, что интерполяционно-проекционные полиномиальные операторы точно восстанавливают полиномы степени $n = M - 1$. В дальнейшем авторы планируют обобщить этот результат на систему M груп параллельных прямых.

Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

UDC 519.6

A theorem on polynomial interpolation-projection of two variables degree *n* along a given system intersecting lines / O. O. Lytvyn, E. L. Hurdei // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2015. – №1 (84). – P. 65–68.

Computational and Applied Mathematics widely used for solving many problems of science and engineering concepts interpolation functions. In this paper investigates some questions of existence and uniqueness of polynomial interpolation-projection $P_n(x, y)$ for M ($M \geq 2$) intersecting lines. Proved that polynomial interpolation-projection operators to accurately restore the polynomial degree $n = M - 1$. In the future, the authors plan to generalize this result to a system M groups of parallel lines.

Fig. 2. Ref.: 10 items