

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту  
(повна назва)

Кафедра прикладної математики  
(повна назва)

## АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методу двобічних наближень на основі  
використання функції Гріна до розв'язання еліптичних крайових  
задач з ізотонними нелінійностями  
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ПМм-19-1  
Границя Ю.А.  
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика  
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Тевяшев А.Д.  
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Тевяшев А.Д.  
(прізвище, ініціали)

2020 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Границі Юлії Андріївни

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу двобічних наближень на основі  
використання функції Гріна до розв'язання еліптичних крайових задач  
з ізотонними нелінійностями

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи крайова задача  $-\Delta u = \lambda(1+u)^q$ ,  $u > 0$  у  $\Omega$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$ ,  
де у якості  $\Omega$  розглядаються коло та прямокутник

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесів  
міграції популяції

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз проблеми \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Тевяшев А.Д. \_\_\_\_\_  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 51 с., 10 табл., 18 рис., 1 дод., 10 джерела.

КОНУС, ФУНКЦІЯ ГРІНА, ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, КОНУСНИЙ ВІДРІЗОК, ІЗОТОННІСТЬ, ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ, НАПІВУПОРЯДКОВАНІСТЬ, БАНАХОВИЙ ПРОСТІР.

Об'єкт дослідження – процеси міграції популяції.

Мета роботи – отримання чисельних розв'язків нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь, що описують процеси міграції популяції, та залежності наближених розв'язків від параметрів та геометрії області цих крайових задач.

Методи дослідження – метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

Атестаційна робота присвячена дослідженню застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь з ізотонними нелінійностями, які застосовуються при математичному моделюванні процесів міграції, та дослідженню залежності отриманого розв'язку від параметрів та геометрії області вихідної задачі. У якості геометрії області у роботі розглядалися коло та прямокутник. Попередньо були доведені існування та єдиність розв'язку розглядуваної крайової задачі. Усі розрахунки та графічне представлення результатів були здійснені за допомогою математичного пакету «Mathematica 10».

## ABSTRACT

Introductory note: 51 pages, 10 tables, 18 figures, 1 appendixes, 10 sources.

CONE, GREEN'S FUNCTION, INTEGRAL EQUATION, CONICAL SECTION, ISOTONICITY, DIRICHLET PROBLEM, SEMI-ORDER, BANACH'S SPACE.

Object of research – population migration processes.

Purpose of work – obtaining numerical solutions of nonlinear boundary value problems for differential equations describing the processes of population migration and the dependence of approximate solutions on the parameters and geometry of the area of these boundary value problems.

Methods of research – method of two-sided approximations based on the use of the Green's function.

The attestation work is devoted to the research of the application of the method of two-sided approximations based on the Green's function use to solving boundary value problems for elliptic differential equations with isotonic nonlinearities used in mathematical modeling of migration processes, and to the research of the dependence of the solution on the parameters and geometry of the area of source problem. A circle, a semicircle and a rectangle were considered as the geometry of the area. The existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem were previously proved. All calculations and graphical presentation of the results were performed using the mathematical package "Mathematica 10".

## ЗМІСТ

	С.
Вступ .....	8
1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесів міграції популяції та постановка задач дослідження .....	9
1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесів міграції популяції .....	9
1.1.1 Вербальна модель системи .....	9
1.1.2 Морфологічний опис системи .....	10
1.1.3 Функціональна модель системи .....	11
1.1.4 Інформаційна модель системи .....	15
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання процесів міграції популяції .....	16
1.2.1 Модель аналізу проблеми .....	16
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій .....	18
1.2.3 Модель вирішення проблеми .....	21
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....	22
1.3.1 Змістовна постановка задачі .....	22
1.3.2 Формальна постановка задачі .....	23
1.4 Постановка задач дослідження .....	24
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....	25
2.1 Основні теоретичні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах .....	25
2.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для рівняння $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$ на основі використання функції Гріна .....	28
2.3 Застосування методу двобічних наближень до знаходження розв'язків еліптичних крайових задач з ізотонними нелінійностями .....	33
2.4 Алгоритм розв'язання задачі .....	37

	7
3 Програмна реалізація .....	38
3.1 Mathematica 10 як система символної математики.....	38
3.2 Опис програми.....	39
4 Результати обчислювального експерименту .....	40
5 Аналіз можливих застосувань .....	47
Висновки .....	48
Перелік джерел посилання .....	49
Додаток А Лістинг програми .....	50

## ВСТУП

У сучасному світі дуже важко уявити наукові дослідження без застосування математичного моделювання. Реальний об'єкт замінюється його «образом», який стає предметом подальшого вивчення та аналізу за допомогою обчислювальних алгоритмів. У якості об'єктів для дослідження можуть виступати природні явища та процеси. У реальному житті вони залежать від багатьох факторів, тому математичним моделями таких об'єктів будуть крайові задачі саме для нелінійних диференціальних рівнянь.

Теорія чисельних методів має у своєму арсеналі багато засобів розв'язання такого типу задач, зокрема метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Будується конусний відрізок, кінці якого є початковими наближеннями для двох ітераційних послідовностей, перша з яких наближає точний розв'язок задачі знизу, а друга – зверху. Метод є доволі зручним у програмній реалізації, що полегшує проведення чисельного експерименту.

Для більш глибокого розуміння складових та процесів моделі, що досліджується, проводять системний аналіз відповідної системи. Таким чином, можна розгледіти багато корисних деталей, які були непомітні на перший погляд. Також системний аналіз дає змогу вирішити проблеми, які виникають під час математичного моделювання. Так, наприклад, якщо виникає проблема вибору найкращого варіанту з декількох, то для цього можна використати метод аналізу ієрархій.

Метою атестаційної роботи є застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання нелінійних еліптичних рівнянь, що виникають при математичному моделюванні процесів міграції популяції у популяційній генетиці.

# 1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ МІГРАЦІЇ ПОПУЛЯЦІЇ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесів міграції популяції

### 1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Процеси міграції популяції».

Предмет аналізу – «Крайова задача для нелінійного диференціального рівняння, що описує процес міграції популяції».

Точка зору: дослідник.

Ціль: отримання чисельних розв'язків крайових задач для нелінійних еліптичних диференціальних рівнянь з параметрами, що описують процеси міграції популяції, та дослідження залежності наближених розв'язків від параметрів рівнянь та геометрії області.

«Чорний ящик» здійснює перетворення входів у виходи системи, де входи – це, найчастіше, ресурсний вплив зовнішнього середовища, а виходи – це цільовий продукт системи. Модель «чорний ящик» для системи «Дослідження процесів міграції популяції» наведено на рисунку 1.1. На вхід система отримуватиме диференціальне рівняння, значення параметрів, крайові умови та область, у якій буде розглядатись відповідна задача. Усі зазначені входи системи разом утворюють модель процесу міграції у популяційній генетиці. Виходом системи будуть чисельний розв'язок крайової задачі та залежність цього розв'язку від вихідних параметрів та геометрії області.

У якості механізмів системи, тобто ресурсів, які виконують роботу, будуть виступати дослідник та програмне забезпечення. А процедурами та правилами, якими буде керуватися робота системи будуть теорія математичної фізики та теорія чисельних методів.

### 1.1.2 Морфологічний опис системи

Перейдемо до морфологічної моделі системи, а саме – опису її зовнішнього середовища. В якості зовнішнього середовища розглядаємо сукупність об'єктів поза межами системи, зміна властивостей яких впливає на систему, а також тих об'єктів, чії властивості змінюються у результаті поведінки системи [1]. Опис зовнішнього середовища системи наведено на рисунку 1.2.

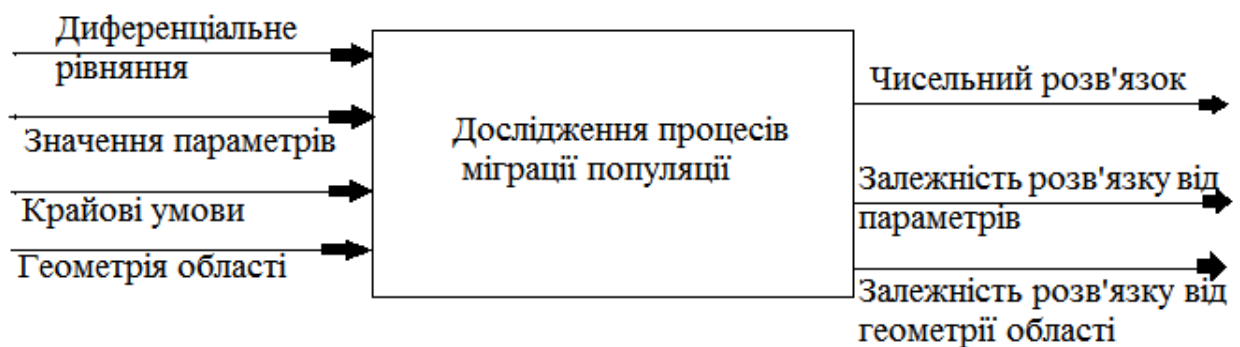


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

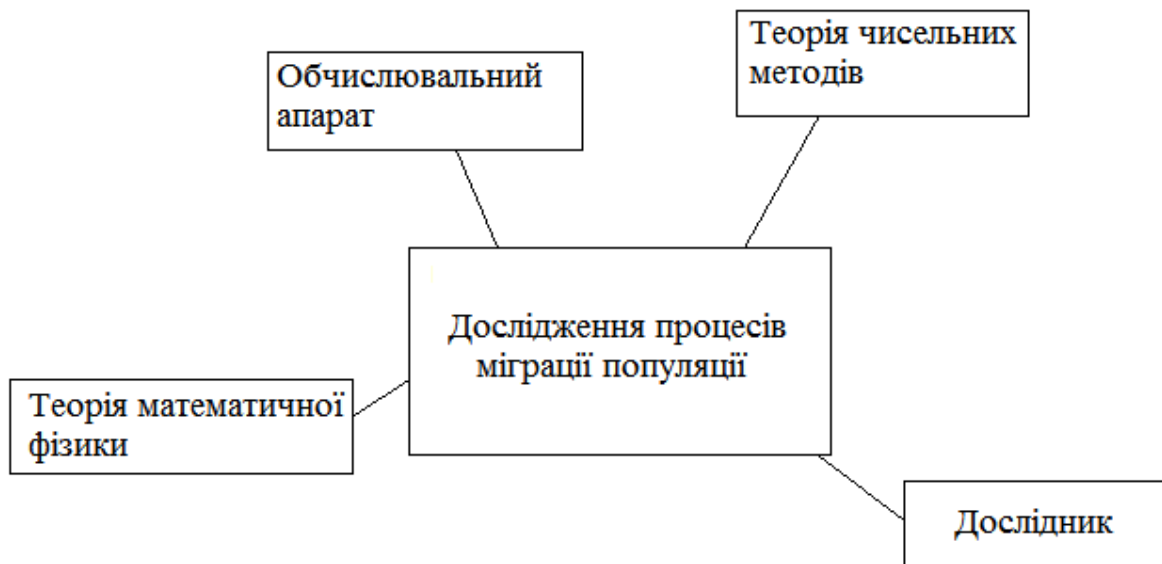


Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Наведемо також опис підсистем та зв'язки між елементами системи «Дослідження процесів міграції популяції». Для цього побудуємо модель «білий

ящик», де головна система має позначку  $A_0$ , а у якості її підсистем виступають  $A_1$  – керуюча система та  $A_2$  – система, якою керують. До керуючої системи відносяться дослідник ( $A_{11}$ ) та засоби керування ( $A_{12}$ ). Система, якою керують, складається з математичного апарату, програмного забезпечення та досліджень з біології. Модель «білий ящик» для системи «Дослідження процесів міграції» зображено на рисунку 1.3.

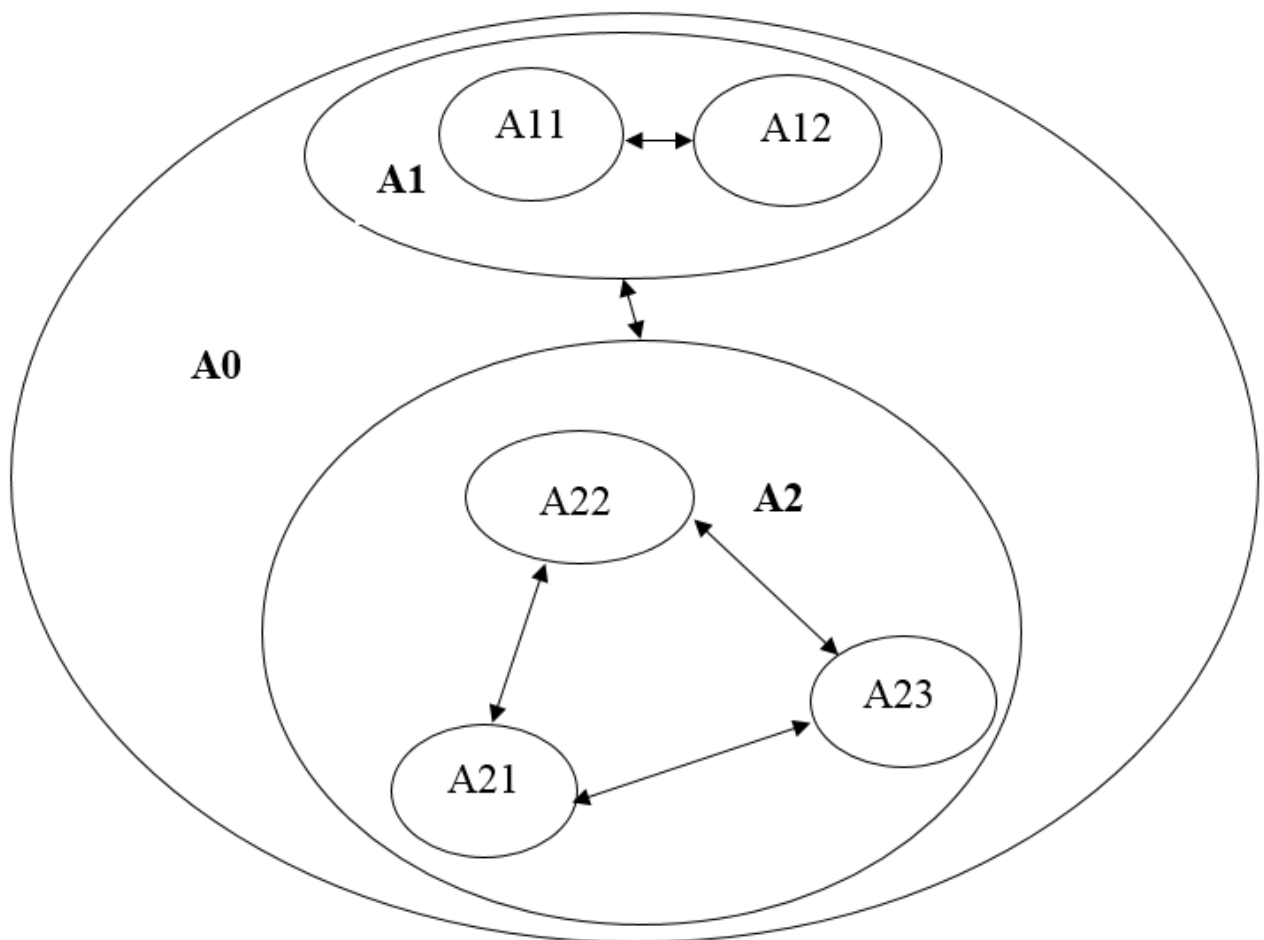


Рисунок 1.3 – Модель типу «білий ящик»

### 1.1.3 Функціональна модель системи

Найкращим засобом вирішення проблеми є виявлення її місцезнаходження у загальній моделі процесу. Таким чином можна зрозуміти, яка саме частина

дає цю проблему і як це впливає на інші частини. Це в свою чергу допоможе обрати оптимальний шлях усунення відповідної проблеми. Для проведення такого аналізу треба дослідити процес та скласти його функціональну модель.

Функціональна модель системи допомагає більш детально розглянути сукупність функцій, які виконує система, її функціональні підсистеми та їх взаємодію [1]. Для побудови такої моделі слід застосовувати методологію IDEF0. Перш за все вона проста у використанні, по-друге, вона дозволяє дуже детально та змістовно описати систему. Її суть полягає у тому, що система подається як сукупність взаємодіючих блоків, які відображають функції цієї системи. Ці блоки мають зв'язок із зовнішнім середовищем, а також пов'язані між собою. Усі ці блоки та зв'язки зображуються у вигляді діаграми. Після побудови діаграми першого рівня, її ще називають контекстною, проводиться декомпозиція – розбиття системи на її складові. Декомпозицію проводять до моменту досягнення потрібного рівня детального опису системи.

Для моделювання процесів, які відбуваються всередині системи, використовується методологія IDEF3. Вона допомагає дослідити причинно-наслідкові зв'язки між різними подіями, які пов'язані з відповідною системою. Система зображується як послідовність подій або процесів, а також зображуються об'єкти, які приймають участь в одному процесі [1].

Система, яка буде розглядатись, має назву «Дослідження процесів міграції популяції». Контекстна діаграма, відповідна до цієї системи, наведена на рисунку 1.4. Більш детальний опис її підсистем, тобто декомпозиція, наведена на рисунках 1.5 – 1.6. Діаграми, які відповідають опису системи в нотації IDEF3, зображено на рисунках 1.7 – 1.8.

Процес міграції популяції є доволі складним об'єктом для моделювання та аналізу. Застосування методології IDEF3 значно полегшує цю роботу. Так, ми отримаємо змогу більш детально дослідити залежність вихідного розв'язку моделі від її початкових даних, а саме – параметрів та геометрії області. У цьому нам допомагають теоретичні відомості з чисельних методів та математичної фізики. Саме тому вони є процедурами та правилами зазначеної системи.

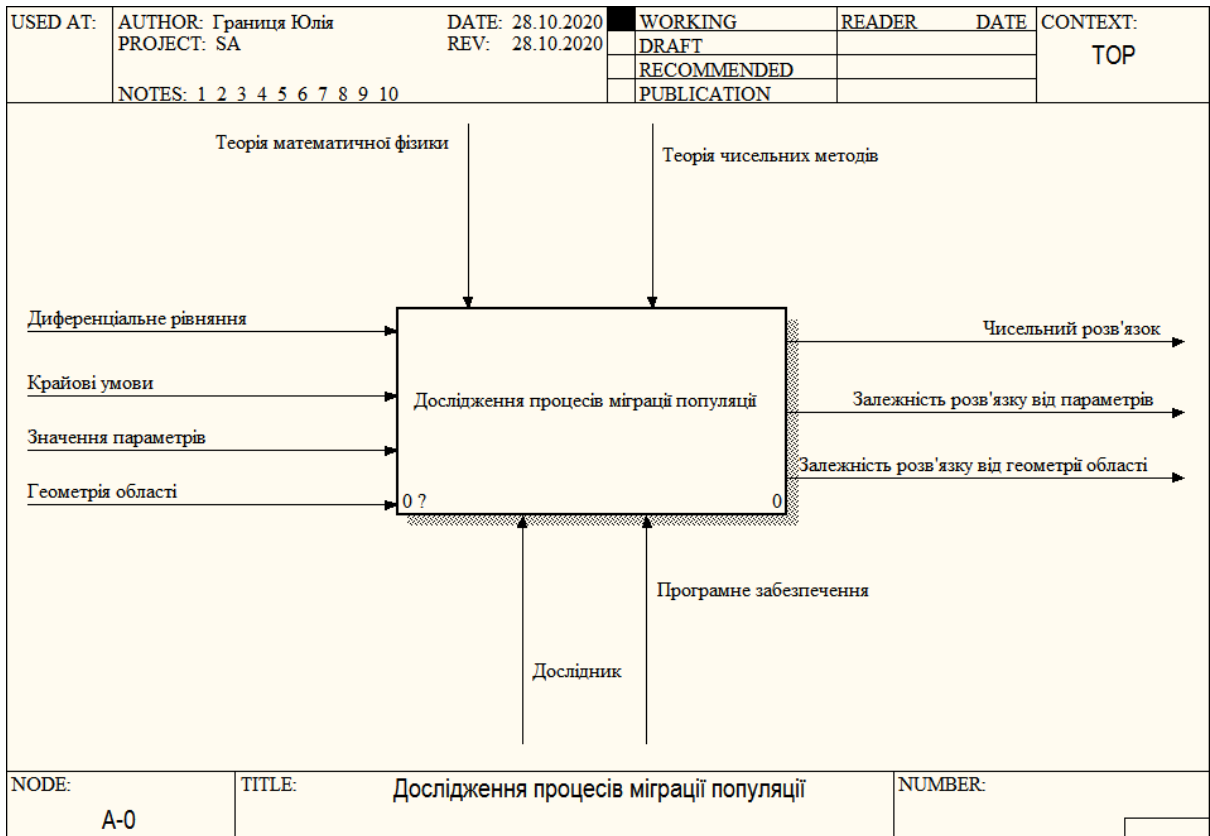


Рисунок 1.4 – Контекстна діаграма (рівень A-0)

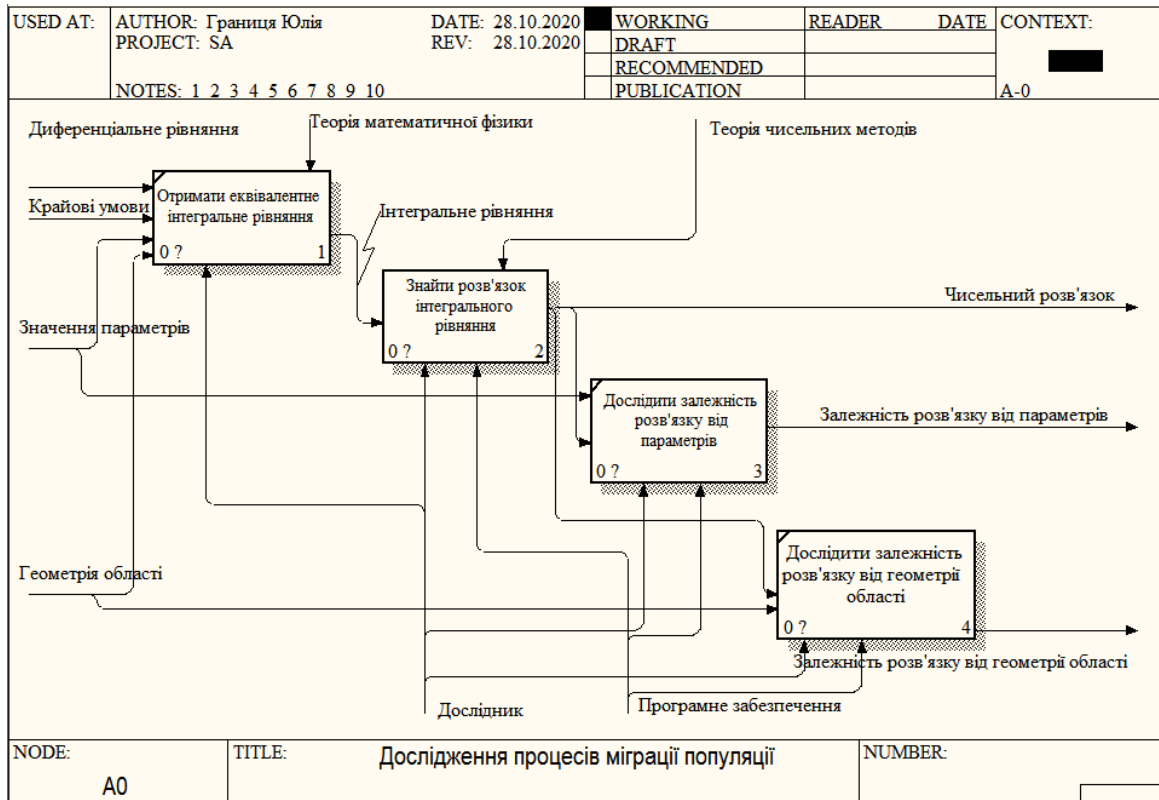


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Дослідження процесів міграції популяції»: рівень A0

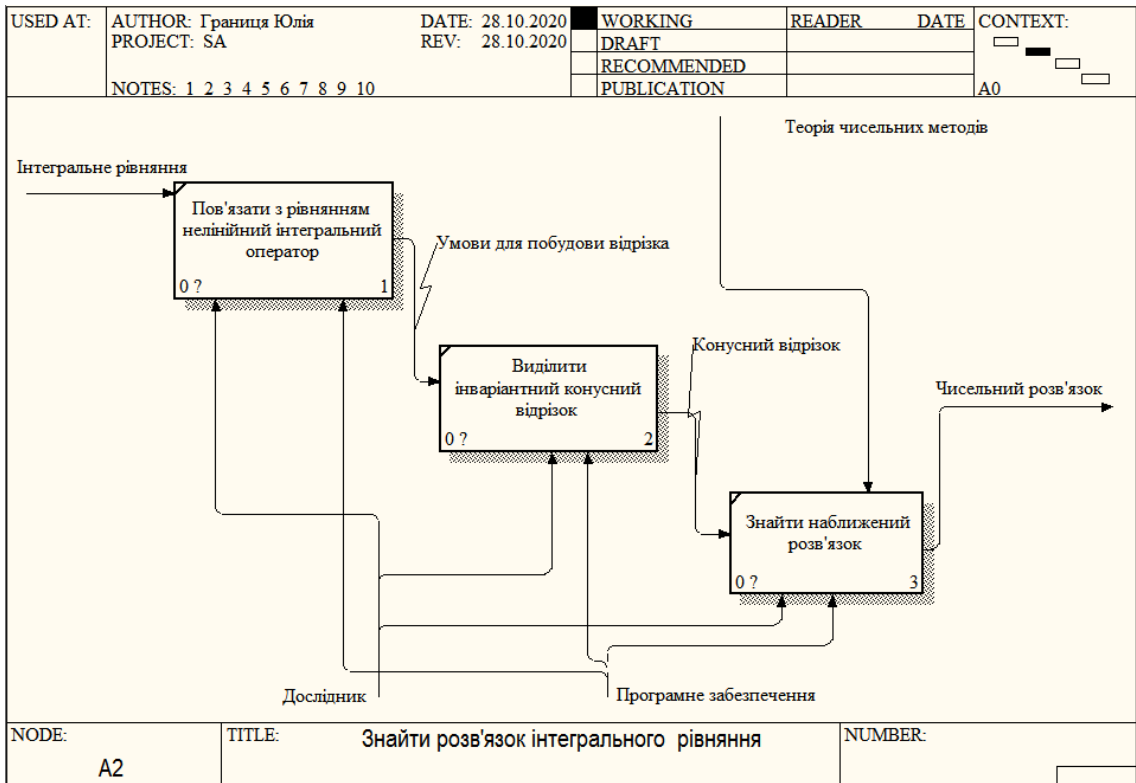


Рисунок 1.6 – Декомпозиція роботи «Знайти розв'язок інтегрального рівняння»: рівень A1

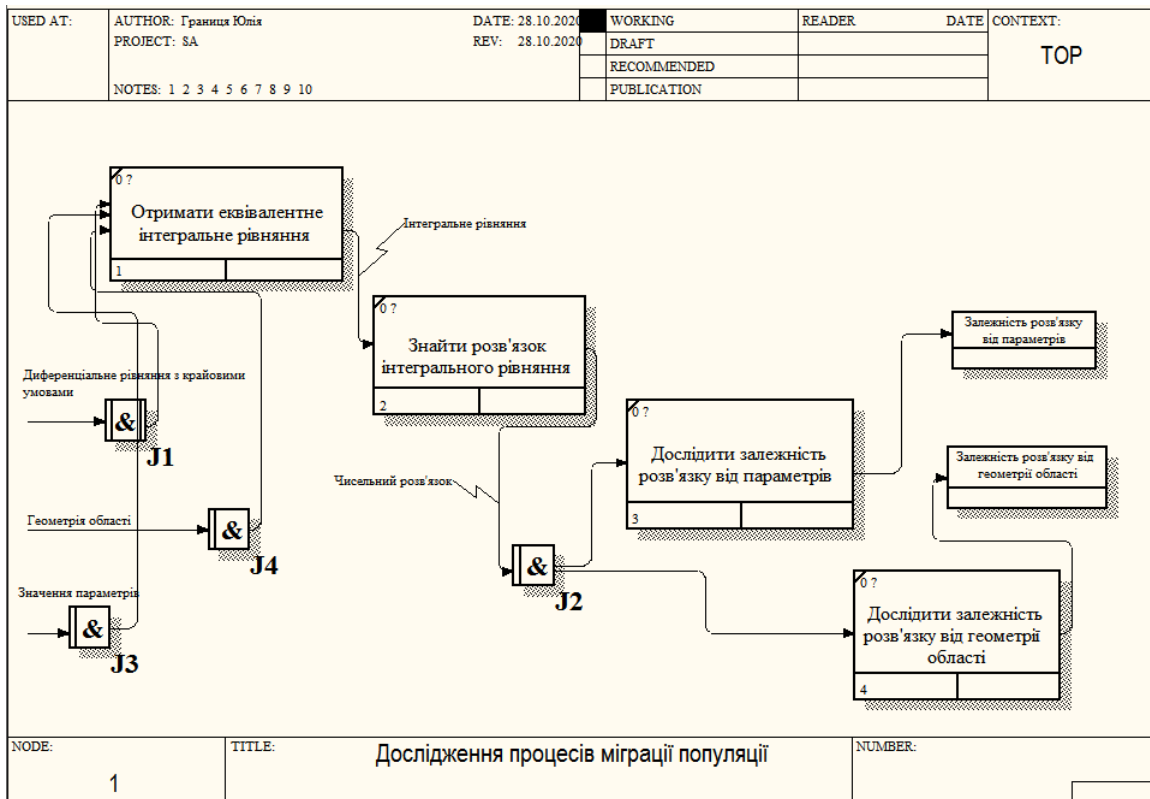


Рисунок 1.7 – Опис роботи «Дослідження процесів міграції»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

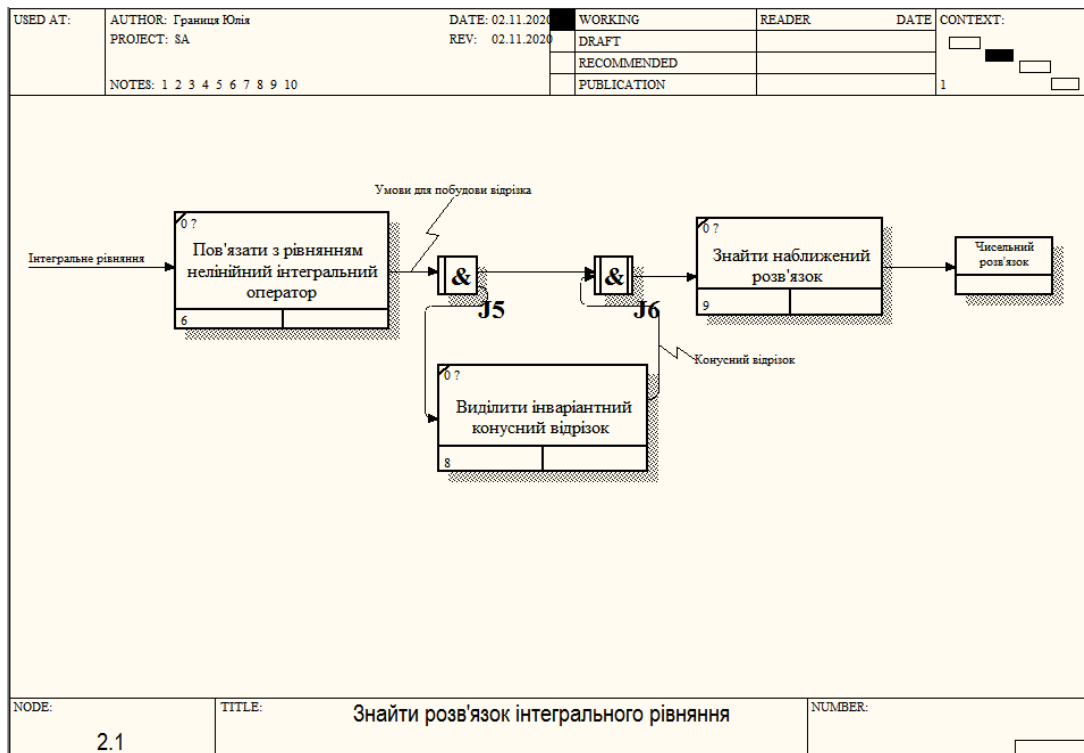


Рисунок 1.8 – Опис роботи «Знайти розв'язок інтегрального рівняння»: рівень A1 (в нотації IDEF3)

#### 1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель надає дані про найважливіші з точки зору поточного аналізу параметри та змінні величини об'єкту, що розглядається. Дослідник при наявності необхідної інформації має змогу подивитись, як буде змінюватись поведінка системи при зміні її вхідних параметрів [1].

DFD (Data Flow Diagrams) – розшифровується як діаграми потоків даних. Це один із основних інструментів проектування інформаційних систем. Її головною метою є показати, як кожна робота перетворює свої вхідні дані у вихідні, а також виявити відносини між цими роботами [1]. На рисунку 1.9 зображено DFD-діаграму роботи «Знайти розв'язок інтегрального рівняння».

Як бачимо, ми застосовуємо властивості інтегрального оператора та ітераційний процес, які у термінах DFD-діаграми мають значення сховища даних та позначаються спеціальними блоками на схемі.

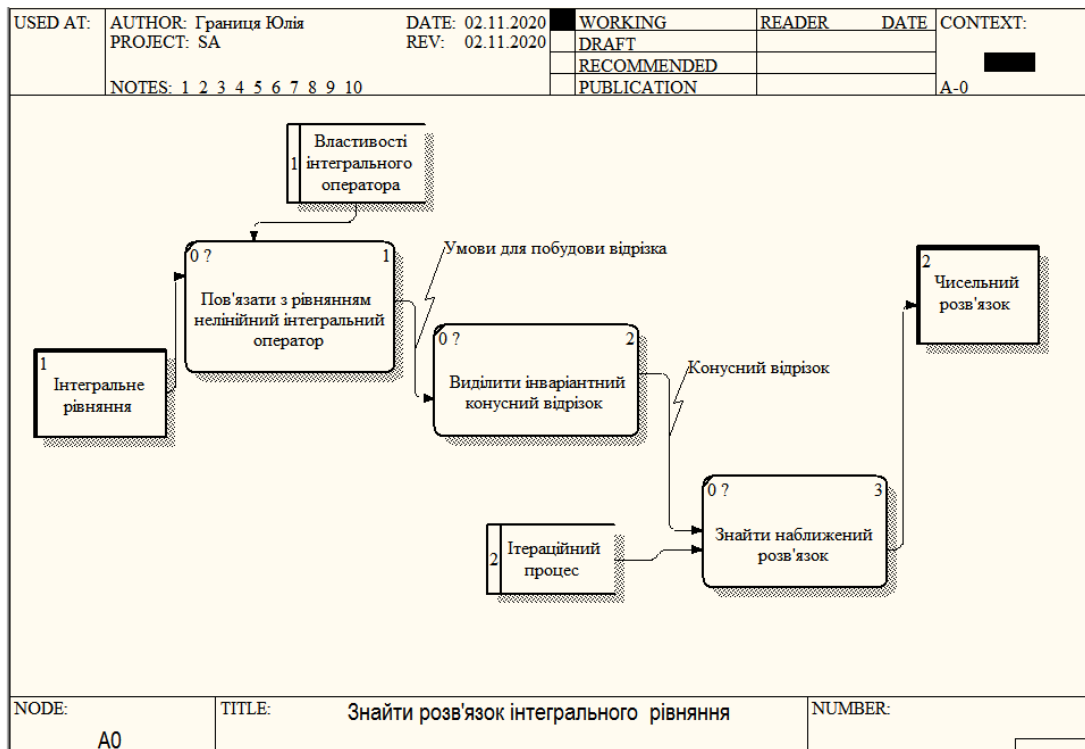


Рисунок 1.9 – DFD-діаграма роботи «Знайти розв'язок інтегрального рівняння»

## 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання процесів міграції популяції

### 1.2.1 Модель аналізу проблеми

Математичне моделювання – це найпоширеніший спосіб дослідження фізичних явищ та процесів. Зокрема процес міграції популяції у генетиці можна описати за допомогою математичного апарату, а саме склавши відповідне нелінійне еліптичне рівняння з параметрами. Теорія чисельних методів надає нам декілька способів розв'язання цього рівняння. Дослідник має обрати, яким саме методом він буде розв'язувати задачу.

Проблема: обрати метод, яким буде розв'язуватися крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння з параметром, яка відповідає процесу міграції популяції у генетиці.

Обирати метод будемо з наступної множини альтернатив:

- альтернатива 1 (A1): метод скінчених різниць;
- альтернатива 2 (A2): метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна;
- альтернатива 3 (A3): метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова;
- альтернатива 4 (A4): метод Ньютона-Канторовича.

Метод скінчених різниць також має назву “метод сіток”. Він полягає у тому, що нелінійне диференціальне рівняння замінюється на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, після розв’язання якої ми отримаємо каркас наближеного розв’язку задачі. Метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна полягає у тому, що вихідній задачі ставиться у відповідність інтегральне рівняння Гаммерштейна. Воно розглядається у просторі неперервних функцій, яке напівупорядковано за допомогою конусу невід’ємних функцій [2]. Далі будуються дві ітераційні послідовності, кожна з яких наближає точний розв’язок задачі. Для отримання розв’язку крайової задачі методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова треба її замінити еквівалентним інтегральним рівнянням Урисона. Далі треба дослідити це рівняння за допомогою методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах. Застосовуючи метод лінеаризації Ньютона-Канторовича ми повинні звести вихідну нелінійну задачу до послідовності лінійних задач. Кожну з цих задач ми можемо розв’язати, наприклад, методом сіток чи якимось варіаційним методом (Рітца, найменших квадратів тощо).

Оберемо наступні критерії оцінки альтернатив:

- критерій 1 (K1): складність написання програми;
- критерій 2 (K2): представлення наближеного розв’язку;
- критерій 3 (K3): швидкість збіжності;
- критерій 4 (K4): залежність від вихідних даних.

Побудуємо ієрархічну структуру, що відповідає моделі вибору метода розв’язання задачі, зображена на рисунку 1.9.

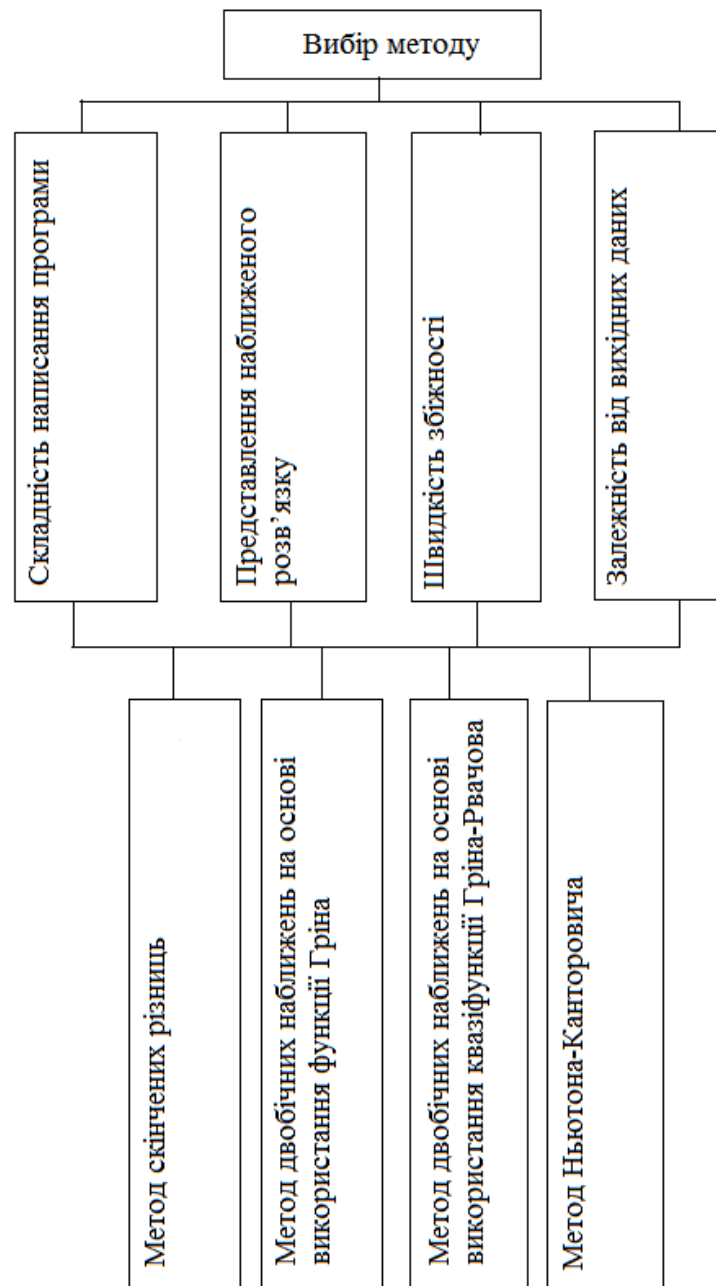


Рисунок 1.9 – Ієрархічна структура аналізу проблеми

### 1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для подальшого аналізу треба сформуванати матрицю попарних порівнянь елементів першого рівня ієрархії, тобто матрицю попарних порівнянь критеріїв. Далі, щоб обрати найкращий метод, треба також побудувати матрицю попарних порівнянь альтернатив, де кожна з альтернатив оцінюється щодо зазначених

критеріїв. У розрахунках використовується випадковий індекс  $RI$ , який у нашому випадку для матриці четвертого порядку дорівнює 0,9. Матриця попарних порівнянь критеріїв та відповідні до неї розрахунки наведені у табл. 1.1. Дані, отримані у результаті оцінювання альтернатив щодо критеріїв, наведені в табл. 1.2 – 1.5.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	K1	K2	K3	K4	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
K1	1	6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	0,572	0,089	1,439
K2	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	0,234	0,037	0,814
K3	7	7	1	$\frac{1}{2}$	2,225	0,348	1,144
K4	8	8	2	1	3,364	0,526	0,921
Всього					6,395		4,318

Таблиця 1.2 – Порівняння альтернатив за першим критерієм

K1	A1	A2	A3	A4	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	0,302	0,051	0,816
A2	6	1	2	8	3,130	0,529	0,948
A3	4	$\frac{1}{2}$	1	7	1,934	0,327	1,110
A4	5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	1	0,547	0,093	1,507
Всього					5,913		4,381

Таким чином, для таблиці 1.1 індекс узгодженості  $CI = \frac{4,318 - 4}{4 - 1} = 0,106$

та відносна узгодженість  $CR = \frac{0,106}{0,9} = 0,118$ , а для таблиці 1.2 отримаємо

$CI = 0,127$ ,  $CR = 0,141$ .

Таблиця 1.3 – Порівняння альтернатив за другим критерієм

К2	A1	A2	A3	A4	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	0,307	0,050	0,900
A2	8	1	3	6	3,464	0,565	0,918
A3	7	$\frac{1}{3}$	1	5	1,848	0,302	1,312
A4	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	1	0,508	0,083	1,038
Всього					6,127		4,168

Для таблиці 1.3 отримаємо  $CI = 0,056$ ,  $CR = 0,060$ .

Таблиця 1.4 – Порівняння альтернатив за третім критерієм

К3	A1	A2	A3	A4	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	0,244	0,040	0,840
A2	7	1	5	$\frac{1}{4}$	1,720	0,272	1,453
A3	5	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{6}$	0,639	0,101	1,232
A4	8	4	6	1	3,722	0,588	0,907
Всього					6,325		4,432

Для таблиці 1.4 отримаємо  $CI = 0,144$ ,  $CR = 0,160$ .

Таблиця 1.5 – Порівняння альтернатив за четвертим критерієм

К4	A1	A2	A3	A4	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	0,302	0,049	0,784
A2	6	1	3	9	3,568	0,578	0,931
A3	5	$\frac{1}{3}$	1	6	1,778	0,288	1,258
A4	4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	1	0,522	0,085	1,381
Всього					6,170		4,354

Для таблиці 1.5 отримаємо  $CI = 0,118$ ,  $CR = 0,130$ .

### 1.2.3 Модель вирішення проблеми

Тепер ми, як особа, що приймає рішення, враховуючи усі отримані результати, можемо провести підсумковий аналіз (табл. 1.6) та зробити висновки.

Таблиця 1.6 – Результати підсумкового аналізу

Критерій/ Альтернатива	К1	К2	К3	К4	Узагальнені пріоритети
A1	0,051	0,050	0,040	0,049	0,046
A2	0,529	0,565	0,272	0,578	0,467
A3	0,327	0,302	0,101	0,288	0,227
A4	0,093	0,083	0,588	0,085	0,261

Отже, можна зробити висновок, що найкращою альтернативою буде метод двобічних наближень з використанням функції Гріна (альтернатива A2).

### 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

#### 1.3.1 Змістовна постановка задачі

Дослідження фізичного процесу або явища зводиться до побудови відповідної математичної моделі. Деякі моделі простіше будувати, що обумовлено їх лінійністю, тобто, з точки зору математики, для таких моделей справедливий принцип суперпозиції. Це означає, що будь-яка лінійна комбінація розв'язків (наприклад, їх сума) теж буде розв'язком задачі. Але більшість моделей реальних процесів є нелінійними, вони не підпорядковуються принципу суперпозиції. Лінійні моделі відповідають доволі окремим випадкам та, як правило, є першим наближенням до реальності. Стосовно, наприклад, популяційних моделей, вони одразу стають нелінійними, якщо прийняти до уваги обмеженість доступних популяції ресурсів [3].

Нелінійні моделі застосовуються для опису просторово-часової динаміки однієї або декількох взаємодіючих популяцій [4]. Процес міграції популяції є поширеним об'єктом для досліджень та побудови математичної моделі. Так, наприклад, динаміка міграції населення під впливом психологічних факторів описується системою рівнянь Лотка-Вольтерра, яка є однією з основних математичних моделей синергетики, а значить, розв'язок цієї системи повинен описувати міграційні ефекти (зокрема, наявність так званих хвиль міграції) [5].

Стосовно популяційних моделей найпростішим та найпопулярнішим на даний час положенням є гіпотеза про випадковість «блукання» особин у просторі. Це положення дозволяє обґрунтувати використання у якості інструмента моделювання рівняння типу «реакція-дифузія», де у якості реакційної частини використовуються праві частини точкових моделей, а коефіцієнти дифузії (рух-

лівість особин) вважаються постійними [4].

Популярним є аналіз взаємодії міграційних процесів з демографічними процесами. У такому випадку відповідним рівнянням буде рівняння вигляду [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f(u), \quad (1.1)$$

де  $u$  – щільність або численність популяції;

$D$  – коефіцієнт дифузії (рухливість особин);

$\xi$  – координата точки на площині;

$f(u)$  – функція, яка описує демографічні процеси, у загальному випадку це функція, яка у даній точці та у даний момент часу залежить від щільності.

Другим підходом до розв'язання цієї проблеми може бути припущення, що рухливість особин (коефіцієнт дифузії) не є сталою величиною, а залежить від щільності популяції (у найпростішому випадку не залежить від часу) [4].

### 1.3.2 Формальна постановка задачі

У скінченній області  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  розглядатимемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння [6]

$$-\Delta u = \lambda(1+u)^q, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.3)$$

Тут  $N \geq 2$ ,  $\lambda > 0$ .

Вважатимемо далі параметр  $q$  є додатним.

Задача (1.2) – (1.3) застосовується при дослідженні проблем, які пов'язані з міграцією популяцій у популяційній генетиці. Також вона використовується

при дослідженні проблем біології, фізики та інженерії [6].

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Метою атестаційної роботи є застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання еліптичної крайової задачі з ізотонною нелінійністю, яка розглядається у декількох плоских областях. Для досягнення мети нам потрібно:

- провести системний аналіз відповідної моделі системи;
- розглянути чисельні методи, якими можна отримати наближений розв'язок розглядуваної задачі, а саме – метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна;
- скласти алгоритм дослідження застосування обраного методу до розв'язання задачі;
- розробити програмний продукт згідно зі складеним алгоритмом;
- провести аналіз залежності чисельного розв'язку від параметрів та геометрії області.

## 2 ВИБІР ТА ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Основні теоретичні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах

Спочатку розглянемо деякі теоретичні відомості з теорії напівупорядкованих банахових просторів [7].

Нехай  $\mathcal{U}$  – дійсний банахів простір,  $\theta$  – нульовий елемент простору  $\mathcal{U}$ .

Означення 2.1. Замкнута опукла множина  $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$  називається конусом, якщо разом з кожною точкою  $u$  вона містить промінь, що проходить через  $u$ , та якщо з  $u, -u \in \mathcal{K}$  випливає, що  $u = \theta$ .

Отже, для конуса  $\mathcal{K}$  виконується:

а) якщо  $u \in \mathcal{K}$  і  $u \neq \theta$ , то  $\alpha u \in \mathcal{K}$  для будь-якого  $\alpha \geq 0$ ;

б) якщо  $u \in \mathcal{K}$  і  $u \neq \theta$ , то  $-u \notin \mathcal{K}$ .

У просторі  $C(\bar{\Omega})$  неперервних у області  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$  функцій прикладом конуса є множина невід'ємних функцій, тобто

$$\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}.$$

Виділення конуса  $\mathcal{K}$  у банаховому просторі  $\mathcal{U}$  призводить до того, що в  $\mathcal{U}$  можна ввести відношення часткового порядку.

Означення 2.2. Для  $u, v \in \mathcal{U}$  пишуть  $u \leq v$ , якщо  $v - u \in \mathcal{K}$ .

Напівупорядкованість, що вводиться конусом  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C(\bar{\Omega})$ , має простий зміст:

$$u \leq v := u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Означення 2.3. Елементи  $u \geq \theta$ , тобто елементи  $u \in \mathcal{K}$ , називаються додатними.

Означення 2.4. Конусним відрізком  $\langle v, w \rangle$  у напівупорядкованому за допомогою конуса  $\mathcal{K}$  просторі  $\mathcal{U}$  називатимемо множину вигляду

$$\langle v, w \rangle := \{u \in \mathcal{U} : v \leq u \leq w\}.$$

Отже, якщо  $u \in \langle v, w \rangle$ , то  $u - v \in \mathcal{K}$  і  $w - u \in \mathcal{K}$ .

Важливий клас конусів для застосувань теорії напівупорядкованих просторів у обчислювальній математиці складають нормальні конуси.

Означення 2.5. Конус  $\mathcal{K}$  називається нормальним, якщо існує таке число  $N(\mathcal{K}) > 0$ , що з  $\theta \leq u \leq w$  випливає  $\|u\| \leq N(\mathcal{K})\|w\|$ . У цьому випадку кажуть, що норма напівмонотонна. Якщо  $N(\mathcal{K}) = 1$ , то конус називають гострим і кажуть, що норма монотонна.

Нехай простір  $\mathcal{U}$  напівупорядкований деяким конусом  $\mathcal{K}$ . Наведемо означення основних типів операторів, які використовуватимемо надалі.

Означення 2.6. Оператор  $T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  називається додатнім, якщо він залишається інваріантним (перетворює в себе) конус  $\mathcal{K}$ , тобто якщо  $T(u) \in \mathcal{K}$  при будь-якому  $u \in \mathcal{K}$ .

Підклас додатних операторів складають так звані  $u_0$ -додатні оператори. Нехай фіксовано деякий ненульовий елемент  $u_0 \in \mathcal{K}$ . Позначимо через  $K(u_0)$  множину тих елементів  $u \in \mathcal{K}$ , для яких можна вказати такі  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ , що  $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$ .

Означення 2.7. Додатній оператор  $T$ , який переводить ненульові елементи конуса  $\mathcal{K}$  в  $K(u_0)$  називається  $u_0$ -додатнім оператором, тобто якщо для будь-якого ненульового  $u \in \mathcal{K}$  найдуться такі  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ , що  $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$ .

Найбільш поширені у застосуванні типи операторів, які діють у напівупорядкованих просторах, мають властивість монотонності.

Означення 2.8. Оператор  $T$ , що діє в  $\mathcal{U}$ , називається монотонним (ізо-

тонним), якщо з  $u, v \in \mathcal{U}$ ,  $u \geq v$  випливає  $T(u) \geq T(v)$ .

Конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  називається інваріантним для оператора  $T$ , що діє в  $\mathcal{U}$ , якщо оператор переводить цей конусний відрізок в себе, тобто  $T(\langle v_0, w_0 \rangle) \subset \langle v_0, w_0 \rangle$ . Для ізотонного оператора умови інваріантності конусного відрізка мають вигляд

$$T(v_0) \geq v_0, \quad T(w_0) \leq w_0. \quad (2.1)$$

Тепер розглянемо типи операторів, що діють в просторі з конусом, пов'язані з характером зростання їх значень уздовж променів, що лежать у конусі  $\mathcal{K}$ .

Означення 2.9. Оператор  $T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  називається увігнутим, якщо він  $u_0$ -додатній і для будь-яких  $u \in K(u_0)$  і  $\tau \in (0,1)$

$$T(\tau u) \geq \tau T(u), \quad (2.2)$$

причому в (2.2) неможлива рівність.

Означення 2.10. Увігнутий оператор  $T$  називається  $u_0$ -увігнутиим, якщо він  $u_0$ -додатній та для будь-яких  $u \in K(u_0)$  і  $\tau \in (0,1)$  існує таке  $\eta = \eta(u, \tau) > 0$

$$T(\tau u) \geq \tau(1 + \eta)T(u).$$

Отже, для  $u_0$ -увігнутого оператора  $T$  існує такий ненульовий елемент  $u_0 \in \mathcal{K}$ , що виконуються наступні умови:

а) для будь-яких  $v, w \in \mathcal{K}$  ( $v \neq \theta$ ,  $w \neq \theta$ ) справджуються нерівності

$$\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0, \quad (2.3)$$

де  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ ;

б) для всіх  $u \in K(u_0)$  таких, що  $\alpha_1 u_0 \leq u \leq \beta_1 u_0$  ( $\alpha_1 = \alpha_1(u) > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1(u) > 0$ ), виконуються нерівності

$$T(\tau u) \geq \tau(1 + \eta)T(u), \quad (2.4)$$

де  $\tau \in (0, 1)$ .

Нехай конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  є інваріантним для оператора  $T$ . Для рівняння  $u = T(u)$ , де  $T$  – ізотонний оператор, розглянемо ітераційний процес

$$v_{n+1} = T(v_n), \quad w_{n+1} = T(w_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

який починається в точці  $(v_0, w_0)$ .

Має місце така теорема [7].

**Теорема 2.1.** Нехай конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  є інваріантним для ізотонного оператора  $T$ , що діє у банаховому просторі  $\mathcal{U}$ , який напівупорядковано нормальним конусом  $\mathcal{K}$ . Якщо оператор  $T$  є неперервним і  $u_0$ -увігнутим, а  $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$ , то рівняння  $u = T(u)$  має єдиний розв'язок  $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (2.5):

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

## 2.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для рівняння

$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$  на основі використання функції Гріна

Розглянемо крайову задачу

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.8)$$

де  $\Omega$  – обмежена область з  $\mathbb{R}^2$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ );

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Вважатимемо, що

$$f(\mathbf{x}, u) \text{ неперервна і додатна при } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, u > 0. \quad (2.9)$$

Якщо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (2.6) – (2.8), то задача (2.6) – (2.8) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds. \quad (2.10)$$

Розглядатимемо рівняння (2.10) у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  функцій, неперервних у  $\bar{\Omega}$ . Норма у  $C(\bar{\Omega})$  вводиться за правилом  $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$ . У просторі  $C(\bar{\Omega})$  виділимо конус  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$  невід’ємних функцій. Конус  $\mathcal{K}_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть, гострим). За допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C(\bar{\Omega})$  введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } u, v \in C(\bar{\Omega}) \text{ } u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Наразі існування класичного розв’язку задачі (2.6) – (2.8), тобто такої фу-

нкції  $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , яка задовольняє рівняння (2.6) і умови (2.7), (2.8), ця функція також задовольняє і рівняння (2.10). Якщо ж класичного розв'язку немає, то інтегральне рівняння (2.10) можна взяти за основу означення узагальненого розв'язку задачі (2.6) – (2.8).

Означення 2.11. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (2.6) – (2.8) називатимемо функцію  $u^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв'язком інтегрального рівняння (2.10).

З рівнянням (2.10) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор  $T$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds. \quad (2.11)$$

З'ясуємо, які властивості має оператор  $T$  вигляду (2.11).

Функція Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  неперервна при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ , і має місце оцінка [7]

$$0 \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq k_0 \left| \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right| \text{ у } \mathbb{R}^2,$$

де  $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}} = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$  – відстань між точками  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{s}$ .

З цих оцінок та з умови (2.9) випливає, що оператор  $T$  вигляду (2.11) діє у просторі  $C(\bar{\Omega})$  і залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ , тобто  $T$  – додатний оператор.

Також оператор  $T$  вигляду (2.11) є  $u_0$ -додатним оператором [7], де функція  $u_0(\mathbf{x})$  належить  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$  та визначається рівністю

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds. \quad (2.12)$$

Конструктивне дослідження рівняння (2.10) (а отже, і задачі (2.6) – (2.8)) з можливістю побудови двобічних наближень до його додатного розв'язку мож-

ливе, якщо функція  $f(\mathbf{x}, u)$  має властивість монотонності.

Нехай функція  $f(\mathbf{x}, u)$  неперервна і додатна при  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $u > 0$ , а також монотонно зростає за  $u$ . Тоді інтегральний оператор  $T$  вигляду (2.11) буде ізотонним оператором. Оператор  $T$  є цілком неперервним [7].

Якщо для будь-якого додатного числа  $u$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$f(\mathbf{x}, \tau u) > \tau f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.13)$$

то ізотонний оператор  $T$  вигляду (2.11) буде увігнутим і навіть  $u_0$ -увігнутим з функцією  $u_0(\mathbf{x})$  вигляду (2.12) [7].

Має місце таке твердження [7].

Лема 2.1. Оператор  $T$  вигляду (2.11), де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (2.6) – (2.8), що розглядається у просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід’ємних функцій, має такі властивості:

- а) є додатним оператором;
- б) є  $u_0$ -додатним оператором, де функція  $u_0(\mathbf{x})$  визначається рівністю (2.12);
- в) є ізотонним оператором, якщо функція  $f(\mathbf{x}, u)$  неперервна і додатна для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $u > 0$ , та монотонно зростає за  $u$ ;
- г) якщо виконується нерівність (2.13), є увігнутим і навіть  $u_0$ -увігнутим оператором, де функція  $u_0(\mathbf{x})$  має вигляд (2.12).

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв’язку інтегрального рівняння (2.10) (а отже, і крайової задачі (2.6) – (2.8)).

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  умовами (2.1), які для оператора  $T$ , що визначається рівністю (2.11), набувають вигляду

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v_0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2.14)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w_0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2.15)$$

Ітераційний процес будуємо за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Через інваріантність конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$  та ізотонність оператора  $T$  можна зробити висновок про те, що послідовність  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  випливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Можливими є два випадки:  $v^* < w^*$  і  $v^* = w^*$ . У другому випадку  $u^* := v^* = w^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$  нерухома точка оператора  $T$ , а отже,  $u^*$  – єдиний на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язок розглядуваної крайової задачі.

Умови існування єдиного розв'язку задачі (2.6) – (2.8) та двобічної збіжності до нього послідовних наближень (2.16) – (2.18) містяться у наступній теоремі [7].

**Теорема 2.2.** Нехай  $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$  – інваріантний конусний відрізок для ізотонного оператора  $T$  вигляду (2.11) і має місце умова (2.13). Тоді ітераційний процес (2.16) – (2.18) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.6) – (2.8).

Як бачимо з (2.16) – (2.18), для монотонної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$  нижні  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та верхні  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  наближення утворюють дві незалежні послідовності і при обчислювальній організації ітераційного процесу їх формування можна

проводити з використанням технологій розпаралелювання обчислень.

На  $k$ -й ітерації за наближений розв'язок крайової задачі (2.6) – (2.8) приймаємо функцію

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (2.19)$$

Тоді ми матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (2.19):

$$\|u^* - u^{(k)}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \frac{1}{2} \max_{x \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})), \quad (2.20)$$

що є безумовною перевагою двобічного ітераційного процесу (2.16) – (2.18).

Отже, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$ .

### 2.3 Застосування методу двобічних наближень до знаходження розв'язків еліптичних крайових задач з ізотонними нелінійностями

У скінченній області  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  розглядаємо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння

$$-\Delta u = \lambda(1 + u)^q, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.21)$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.22)$$

Тут  $N \geq 2$ ,  $\lambda > 0$ .

Нехай параметр  $q$  є додатним.

Згідно з методом двобічних наближень, якщо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (2.21), (2.22), то ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(1 + u(\mathbf{s}))^q ds. \quad (2.23)$$

Розглядатимемо рівняння (2.23) у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  функцій, неперервних у  $\bar{\Omega}$ . Норма у  $C(\bar{\Omega})$  вводиться за правилом  $\|u\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$ . У просторі  $C(\bar{\Omega})$  виділимо конус  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$  невід’ємних функцій. За допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  вводимо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Розв’язком (узагальненим) крайової задачі (2.21), (2.22) називатимемо функцію  $u^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв’язком інтегрального рівняння (2.23) [7].

З рівнянням (2.23) пов’яжемо нелінійний інтегральний оператор  $T$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(1 + u(\mathbf{s}))^q ds. \quad (2.24)$$

Оператор (2.24) є ізотонним та цілком неперервним.

Оскільки функція  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(1 + u)^q$  має властивість монотонності, то конструктивне дослідження рівняння (2.23) (а отже, і задачі (2.21), (2.22)) з можливістю побудови двобічних наближень до його додатного розв'язку можливе [7].

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (2.23) (а отже, і крайової задачі (2.21), (2.22)).

У конусі  $\mathcal{K}_+$  умовами (2.1) виділімо інваріантний для оператора  $T$  конусний відрізок:

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(1 + v_0(\mathbf{s}))^q ds \geq v_0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2.25)$$

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(1 + w^0(\mathbf{s}))^q ds \leq w^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2.26)$$

Треба зазначити, що  $f(\mathbf{x}, 0) = \lambda > 0$ , а отже, конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ , де  $\beta > 0$ . Тоді умови (2.25), (2.26) набувають вигляду

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq 0 \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2.27)$$

$$\lambda(1 + \beta)^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2.28)$$

Нерівність (2.27) завжди виконується через додатність функції Гріна, а нерівність (2.28) можна записати у вигляді [8]

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \frac{\beta}{\lambda(1 + \beta)^q}. \quad (2.29)$$

Дослідимо оператор  $T$  на угнутість. Для цього складемо

$$T(\tau u) - \tau T(u) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [(1 + \tau u)^q - \tau(1 + u)^q] ds. \quad (2.30)$$

Щоб ця різниця була додатною, достатньо, щоб  $(1 + \tau u)^q - \tau(1 + u)^q > 0$  для всіх  $\tau \in (0, 1)$ ,  $u > 0$ , або, щоб

$$q < \frac{\ln \tau}{\ln \frac{1 + \tau u}{1 + u}}. \quad (2.31)$$

Якщо ввести у розгляд функцію  $\varphi(\tau) = \ln \tau \left( \ln \frac{1 + \tau u}{1 + u} \right)^{-1}$ ,  $u \in \langle 0, \beta \rangle$ , неважливо перевірити, що для всіх  $\tau \in (0, 1)$  маємо  $1 < \varphi(\tau) < +\infty$ .

Робимо висновок, що нерівність (2.31) виконується, якщо  $0 < q < 1$  [8].

Отже, задача (2.21), (2.22) матиме єдиний додатний розв'язок, якщо виконуватиметься умова (2.29) та  $0 < q < 1$ .

Ітераційний процес будемо за схемою

$$v^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [1 + v^{(n)}(\mathbf{s})]^q ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.32)$$

$$w^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [1 + w^{(n)}(\mathbf{s})]^q ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta, \quad (2.33)$$

при цьому

$$0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = \beta,$$

де  $u^*$  – точний розв'язок задачі (2.21), (2.22).

Тобто маємо двобічні наближення до розв'язку  $u^*$  задачі (2.21), (2.22) з  $0 < q < 1$ .

## 2.4 Алгоритм розв'язання задачі

Наведемо алгоритм розв'язання крайової задачі (2.21) – (2.22) методом двобічних наближень з використанням функції Гріна.

Крок 1. Обираємо точність  $\varepsilon > 0$  та вказуємо значення параметрів  $\lambda$  та  $q$  ( $\lambda > 0$ ,  $0 < q < 1$ ).

Крок 2. Згідно з геометрією області  $\Omega$  визначаємо вигляд функції Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ .

Крок 3. Будуємо інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  у вигляді  $\langle 0, \beta \rangle$ . Значення  $\beta$  обираємо як найменший розв'язок рівняння  $(1 + \beta)^p = \frac{\beta}{\lambda M}$ , де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ .

Крок 4. Перевіряємо умову збіжності (2.13) ітераційного процесу (2.32), (2.33) до єдиного на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.21) – (2.22).

Крок 5. Використовуючи ітераційну схему (2.32), (2.33), будуємо послідовності нижніх  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та верхніх  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  наближень. Ітераційний процес слід продовжувати доки виконується умова  $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) \geq 2\varepsilon$ .

Крок 6. Застосовуючи формулу (2.19) знаходимо наближений розв'язок задачі (2.21), (2.22).

Використовуючи умову  $\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$  можна отримати апостеріорну оцінку похибки для отриманого наближеного розв'язку.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Mathematica 10 як система символної математики

Сучасний світ характеризується великою кількістю різноманітних досліджень та обчислень. Наука все далі продовжує розвиватись та поповнювати свій арсенал новими відкриттями. У цьому їй допомагають різні програмні продукти та математичні пакети. Серед останніх стрімко виходить вперед саме математичний пакет Wolfram Mathematica. Він надає дуже потужний функціонал, який стосується не тільки математичних обчислень. Wolfram Mathematica застосовується навіть у машинному навчанні та у web-розробці. Також великою перевагою математичного пакету є можливість взаємодії з зовнішніми сховищами даних, наприклад, базами даних.

Однією з сильних сторін та причин широкого застосування Wolfram Mathematica є те, що для обчислень використовуються потужні високоефективні алгоритми та використовується методологія автоматичного підбору алгоритму для розрахунків. З точки зору саме математичних досліджень, ще однією важливою характеристикою програми є те, що вона має найбільше число математичних функцій.

Wolfram Mathematica має свою мову програмування, яка має назву Wolfram Language. За рахунок того, що назви усіх функцій складаються з повних англійських слів, мова є доволі простою для вивчення та зручною у використанні.

У багатьох випадках є необхідним візуальне зображення результатів розрахунків. Для цього Wolfram Mathematica надає також багато можливостей. Зокрема, побудова 3D графіку функцій. Користувач при цьому має змогу корегувати загальне представлення графіків.

Треба також зазначити, що розробники Wolfram Mathematica подбали про те, щоб вивчення усіх можливостей програми було найбільш доступним та вичерпним. Тому вони створили вбудований Help, який містить дуже багато прикладів та різноманітних туторіалів [9].

### 3.2 Опис програми

Для обчислювального експерименту та графічного представлення результатів розрахунків був застосований математичний пакет Wolfram Mathematica 10. Код програми міститься у файлі з розширенням \*.nb.

У першому блоці задаються точність розрахунків, значення параметрів  $\lambda$  та  $q$ , функція Гріна, права частина рівняння вихідної задачі та обчислюється значення параметру  $\beta$  згідно з умовою (2.29).

Наступний блок «Побудова конусного відрізка» містить відповідно задання конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ . Далі реалізований ітераційний процес (2.32), (2.33), де на кожній ітерації обчислюється значення похибки та у кінці роботи циклу виводиться кількість зроблених ітерацій.

У блоці «Знаходження наближеного розв'язку» наведено обчислення наближеного розв'язку відповідно до формули (2.19).

Також програма містить два блока з графічним представленням результатів розрахунків – «Побудова графіків верхніх та нижніх наближень» та «Побудова графіків поверхні наближено розв'язку та його ліній рівня».

Код програми наведено у додатку А.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обчислювальний експеримент було проведено для задачі

$$-\Delta u = \lambda(1+u)^q, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.2)$$

Тут  $N \geq 2$ ,  $\lambda > 0$ .

Для обчислювального експерименту було обрано декілька значень параметрів  $q$  та  $\lambda$ . Областями геометрії, у яких розглядалася задача, були коло та прямокутник.

Нехай  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  – круг одиничного радіусу. Тоді функція Гріна [7] має вигляд

$$G(r, \varphi, \rho, \phi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \phi) + 1}{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \phi) + \rho^2},$$

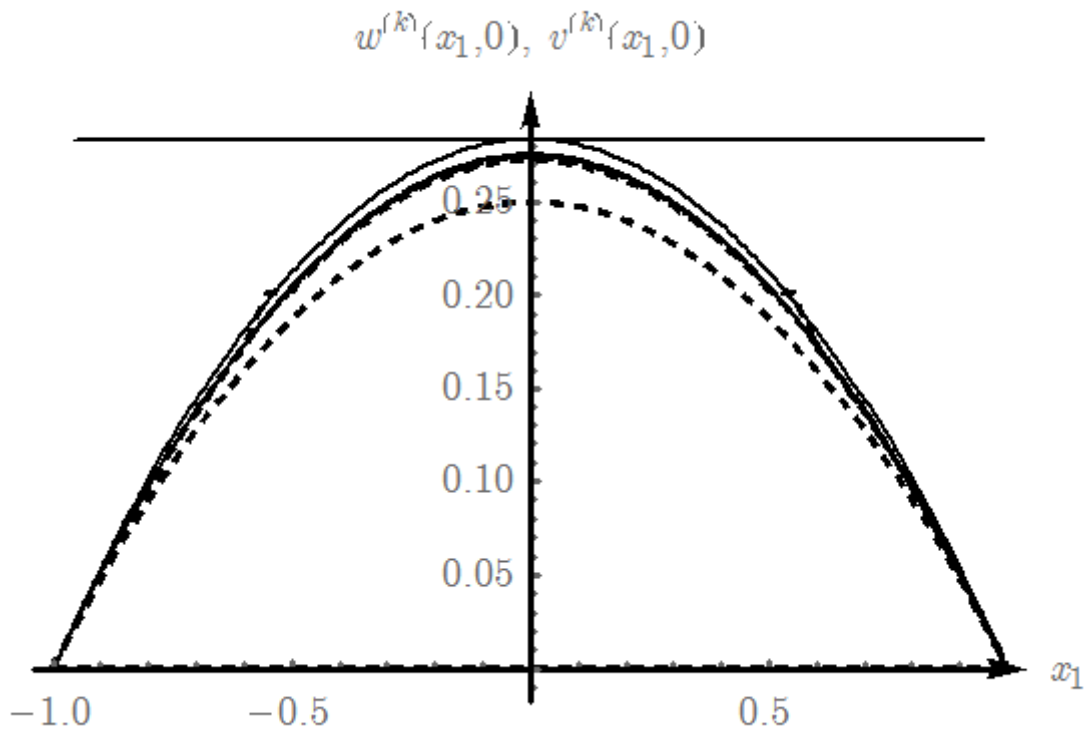
де  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $s_1 = \rho \cos \phi$ ,  $s_2 = \rho \sin \phi$ .

Розглянемо випадок  $\lambda = 1$ ,  $q = 0,5$ . Обрану точність у  $10^{-4}$  було досягнуто за чотири ітерації. У таблиці 4.1 наведено значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації. Бачимо, що один знак після коми у наближеному розв'язку встановлюється приблизно за одну ітерацію. Конусний відрізок мав вигляд  $\langle 0, \beta \rangle$ , де  $\beta = 0,283196$ . Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень (штрихована лінія) наведено на рис. 4.1. Значення наближеного розв'язку було отримано за формулою

$$u^{(4)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(4)}(\mathbf{x}) + v^{(4)}(\mathbf{x})}{2}.$$

Таблиця 4.1 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу

$k$	0	1	2	3	4
$\varepsilon_k$	$0,14 \cdot 10^0$	$0,17 \cdot 10^{-1}$	$0,14 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$0,08 \cdot 10^{-4}$

Рисунок 4.1 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.1), (4.2) у перерізі  $x_2 = 0$ 

Поверхню отриманого наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$  наведено на рис. 4.2, а його лінії рівня – на рис. 4.3. У таблиці 4.2 наведено результати розрахунків для різних значень  $\lambda$  та  $q$ .

Нехай тепер  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$  – квадрат. Тоді функція Гріна має вигляд [7]

$$G(x_1, x_2, s_1, s_2) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x_1 \sin \pi m x_2 \sin \pi n s_1 \sin \pi m s_2}{\pi^2 (n^2 + m^2)}.$$

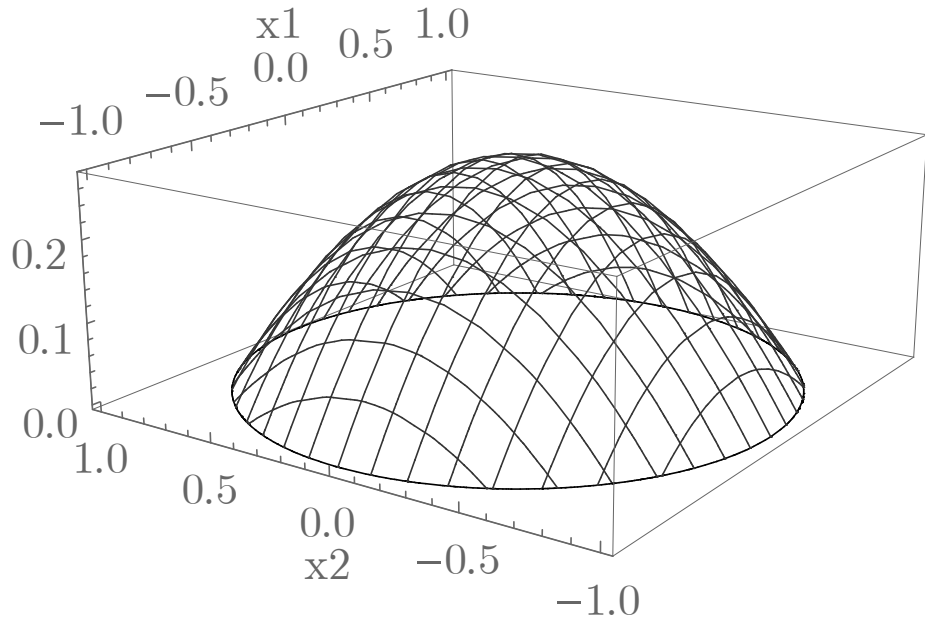


Рисунок 4.2 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$

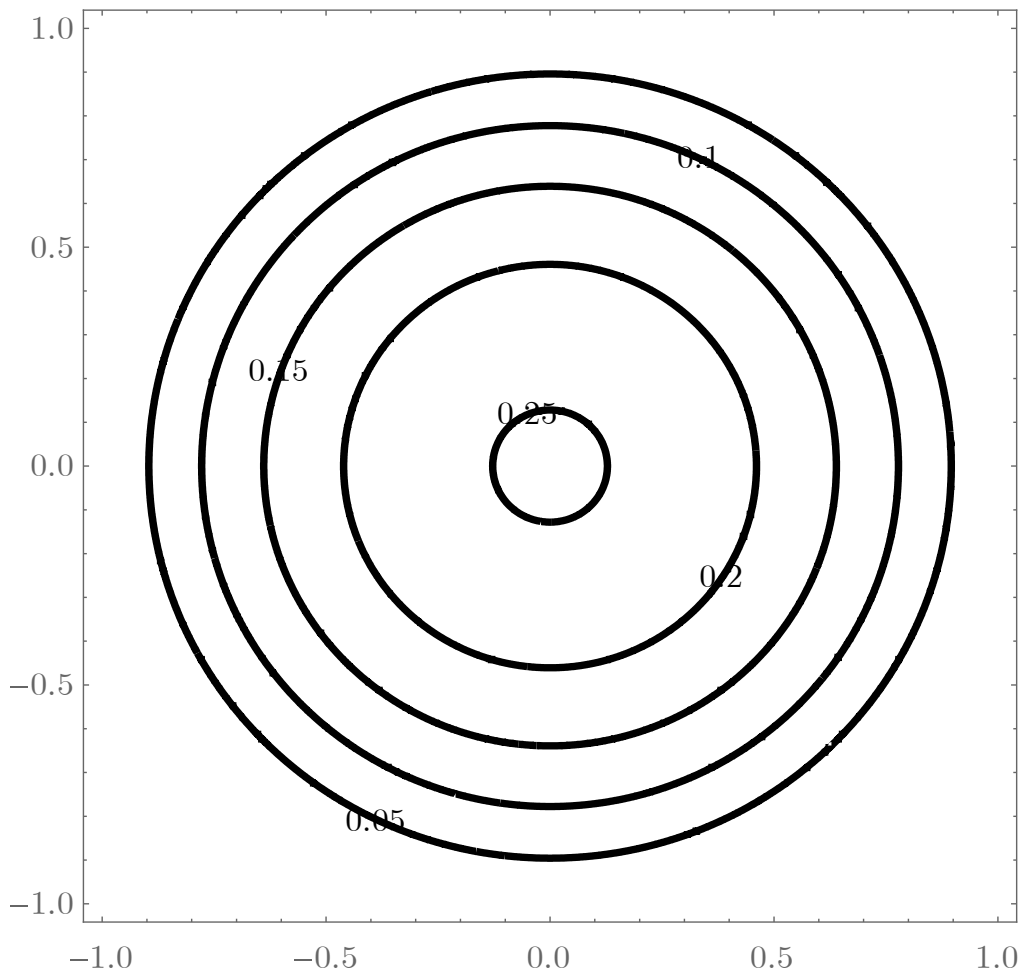


Рисунок 4.3 – Графік ліній рівня наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$

Таблиця 4.2 – Дані про значення  $\lambda$ ,  $q$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій та норму наближеного розв'язку для задачі (4.1), (4.2)

$\lambda$	$q$	$\beta$	Кількість ітерацій	$\ u\ $
1	0.1	0.25576	2	0.25435
1	0.2	0.26191	2	0.25896
1	0.3	0.26849	3	0.26379
1	0.4	0.27556	3	0.26887
1	0.5	0.28320	4	0.27428
1	0.6	0.29147	4	0.27999
1	0.7	0.30048	4	0.28604
1	0.8	0.31035	4	0.29249
1	0.9	0.32123	5	0.29941
2	0.1	0.52143	3	0.51644
2	0.2	0.54549	3	0.53438
2	0.3	0.57275	4	0.55417
2	0.4	0.60402	4	0.57604
2	0.5	0.64039	5	0.60048
2	0.6	0.68342	6	0.62798
2	0.7	0.73546	6	0.65926
2	0.8	0.80028	7	0.69535
2	0.9	0.88432	8	0.73764

Результати розрахунків наведено для значень параметрів  $\lambda=1$ ,  $q=0.5$ . Обрану точність у  $10^{-4}$  було досягнуто за дві ітерації. Конусний відрізок мав вигляд  $\langle 0, \beta \rangle$ , де  $\beta=0,07642$ . У таблиці 4.3 наведено значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{x \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації. У таблиці 4.4 наведено результати обчислювального експерименту для різних значень параметрів  $\lambda$ ,  $q$

задачі (4.1), (4.2).

Таблиця 4.3 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу

$k$	0	1	2
$\varepsilon_k$	$0,38 \cdot 10^{-1}$	$0,13 \cdot 10^{-2}$	$0,37 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 4.4 – Дані про значення  $\lambda$ ,  $q$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій та норму наближеного розв'язку для задачі (4.1), (4.2)

$\lambda$	$q$	$\beta$	Кількість ітерацій	$\ u\ $
1	0.1	0.07397	2	0.07384
1	0.2	0.07472	2	0.07445
1	0.3	0.07528	2	0.07486
1	0.4	0.07584	2	0.07527
1	0.5	0.07642	2	0.07569
1	0.6	0.07701	2	0.07612
1	0.7	0.07755	2	0.07649
1	0.8	0.07823	2	0.07699
1	0.9	0.07886	2	0.07747
2	0.1	0.14938	2	0.14887
2	0.2	0.15153	2	0.15046
2	0.3	0.15377	2	0.15209
2	0.4	0.15611	3	0.15384
2	0.5	0.15856	3	0.15560
2	0.6	0.16113	3	0.15743
2	0.7	0.16382	3	0.15931
2	0.8	0.16664	3	0.16126
2	0.9	0.16962	4	0.16331

Графік верхніх та нижніх наближень, графік поверхні наближеного розв'язку та його лінії рівня зображені відповідно на рисунках 4.4 – 4.6.

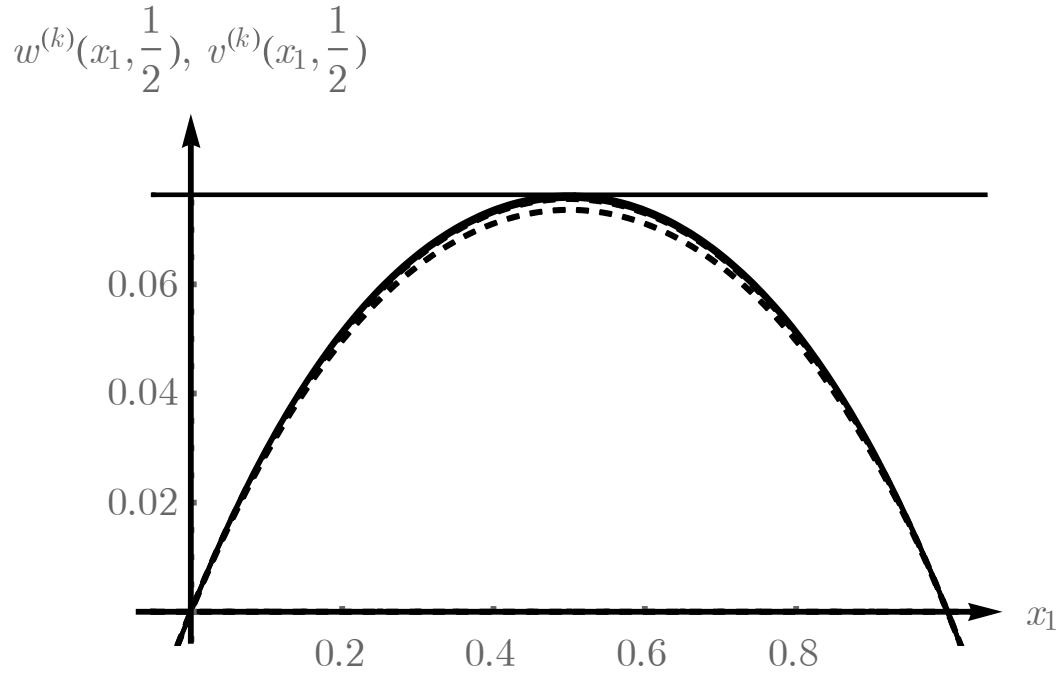


Рисунок 4.4 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень

до розв'язку задачі (4.1), (4.2) у перерізі  $x_2 = \frac{1}{2}$

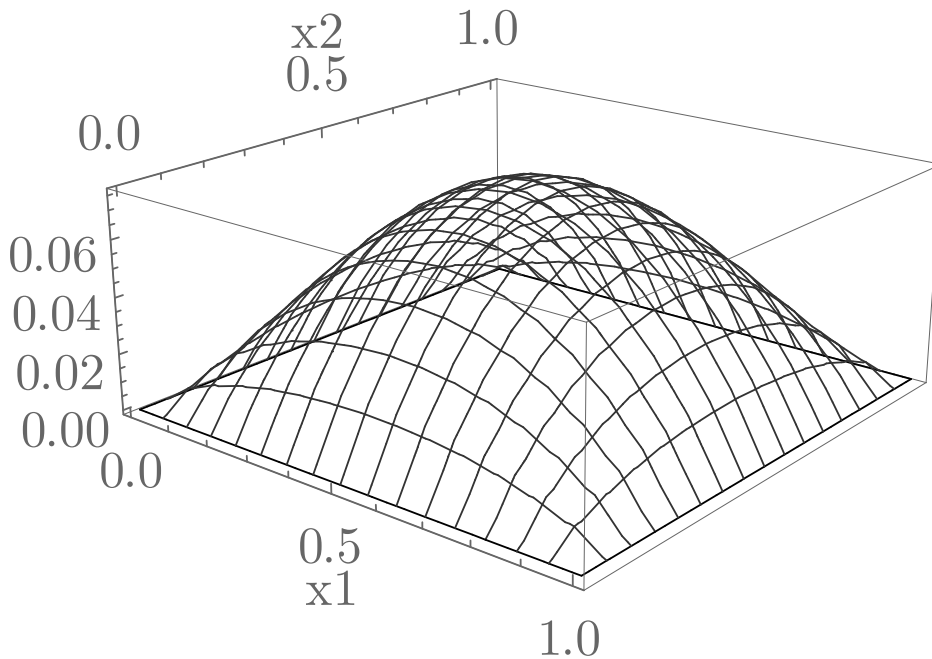


Рисунок 4.5 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$

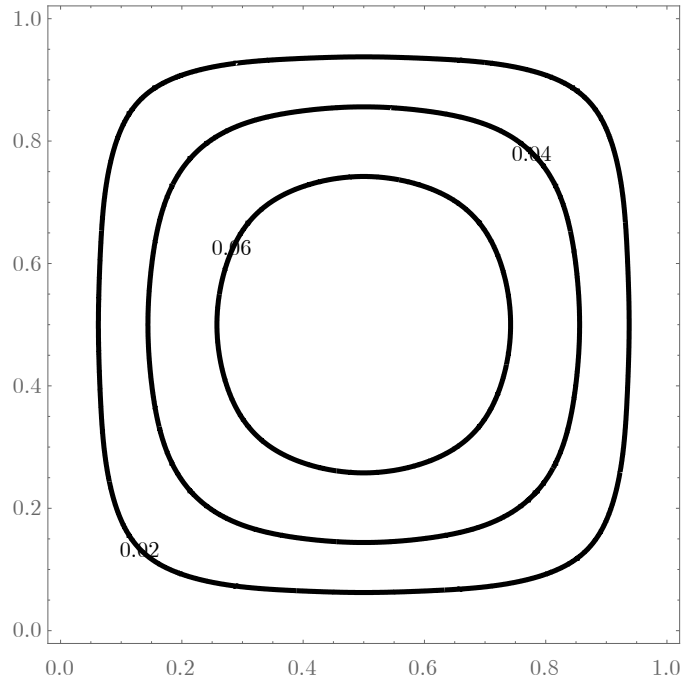
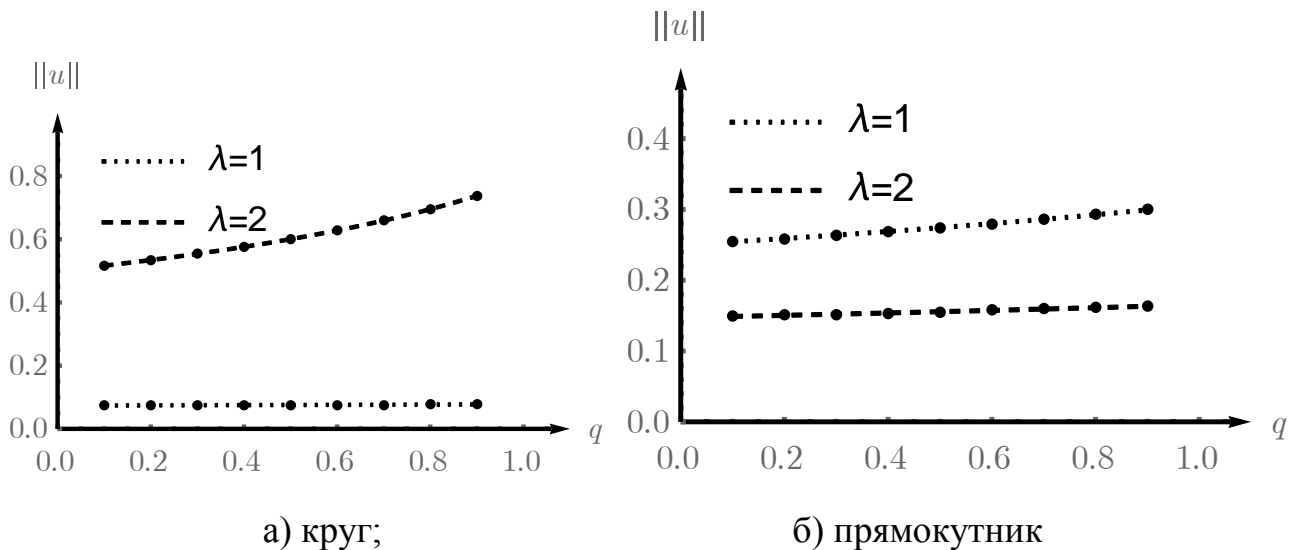


Рисунок 4.6 – Графік ліній рівня наближеного розв’язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$

На рисунку 4.7 наведено графіки залежності норми наближеного розв’язку  $u^*(\mathbf{x})$  від значень вихідних параметрів  $\lambda$  та  $q$ , побудова яких базуються на даних, які наведені у таблицях 4.2, 4.4.



а) круг;

б) прямокутник

Рисунок 4.7 – Графік залежності норми наближеного розв’язку  $u^*(\mathbf{x})$  від значень вихідних параметрів  $\lambda$  та  $q$

## 5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

У атестаційній роботі було розглянуто застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання крайових задач з ізотонними нелінійностями. Розглядалася задача, яка застосовується при математичному моделюванні процесів міграції популяції у популяційній генетиці [6]. Процес міграції відноситься до демографічних процесів. Розв'язання багатьох демографічних задач потребує застосування системи методів, серед яких головне місце займають статистичні та математичні методи [10]. Вони допомагають виявити різні закономірності зміни популяції та дослідити показники її руху. Тому результати розрахунків атестаційної роботи можуть бути застосовані при математичному моделюванні демографічних процесів, складовою яких є міграція.

Результати роботи також роблять свій внесок до теоретичних відомостей з дисциплін «Чисельні методи» та «Рівняння математичної фізики», які викладаються у закладах вищої освіти, та можуть бути застосовані у якості прикладів або стати об'єктом для подальшого дослідження.

## ВИСНОВКИ

У ході виконання атестаційної роботи було знайдено наближений розв'язок крайової задачі з ізотонними нелінійностями, яка має практичне застосування у математичному моделюванні міграційних процесів. Попередньо було проведено системний аналіз відповідної моделі системи «Дослідження процесів міграції популяції». За допомогою методу аналізу ієрархій було виявлено, що найкращим методом для розв'язання вихідної крайової задачі буде метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

Методом функцій Гріна вихідна крайова задача була зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна з ізотонною нелінійністю. Це рівняння було досліджено методами нелінійного функціонального аналізу і з'ясовано умови, за виконання яких воно, а отже, і вихідна крайова задача, має єдиний додатний розв'язок, до якого двобічно збігаються послідовні наближення.

Обчислювальний експеримент було проведено для декількох значень вихідних параметрів задачі та для декількох областей, у яких вона розглядалася. У результаті експерименту було отримано наближений розв'язок, побудовано графік його поверхні та ліній рівня. Також отримано криві залежності норми розв'язку від параметрів задачі.

Результати роботи можуть бути використані при дослідженні методом математичного моделювання демографічних процесів, складовою яких є міграція. також результати роботи можуть бути розповсюджені на крайові задачі з іншими типами нелінійностей. Проте варто зауважити, що обмеженість використання застосованого метода пов'язана з тим, що має бути відомою функція Гріна відповідного оператора.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс : учеб. пос. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.
2. Сидоров М. В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250-259.
3. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. Москва : Физматлит, 2001. 320 с.
4. Белотелов Н. В., Лобанов А. И. Популяционные модели с нелинейной диффузией // Матем. моделирование. 1997. Т. 9, № 12. С. 43-56.
5. Математическая психология: Школа В. Ю. Крылова / Под ред. А. Л. Журавлева, Т. Н. Савченко, Г. М. Головиной. Москва : Изд-во «Институт психологии РАН», 2010. 512 с.
6. Afrouzi G. A, Khademloo S. Some numerical results on a convex nonlinear elliptic problem // Applied Mathematicies and Computation. 2006. P. 465–471
7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва : Физматгиз, 1962. 394 с.
8. Колосова С., Границя Ю., Юхименко В. Про побудову послідовних наближень для однієї задачі про вибір моделі міграції в популяційній генетиці // 7-ма Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології ICT-2018». 2018. С. 105-109
9. Wolfram Language&System. Documentation Center. URL : <https://reference.wolfram.com/language/> (дата звернення: 02.12.2020).
10. Википедия – свободная энциклопедия. URL : <https://ru.wikipedia.org/wiki/Демография> (дата звернення: 02.12.2020).