

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Н. Вернигора

Харьков

Вопрос о температурном напряженном состоянии материалов и особенно металлов принадлежит к числу фундаментальных проблем прочности. Появление сверхзвуковых самолетов и ракет поставило перед конструкторами новые задачи, связанные с температурными напряжениями и свойствами материалов в этих условиях. При температурах, превосходящих некоторый предел, в деталях машин и механизмов кроме того наблюдается явление ползучести, которое, в свою очередь, существенным образом сказывается на величине напряжений.

Обычный метод исследования температурных напряжений в упругих средах состоит в интегрировании дифференциальных уравнений с дополнительными температурными членами, что эквивалентно решению о напряженном состоянии при действии некоторой объемной нагрузки, пропорциональной γT .

Аналогично могут быть получены уравнения для определения температурных напряжений и в средах, не подчиняющихся закону Гука. Исходными для них являются уравнения механики сплошной среды:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \Big|_T + \frac{\partial P_{ik}}{\partial T} \Big|_{u_{lm}} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \rho f_i. \quad (1)$$

Для сплошной среды, у которой $P_{ik} = P_{ik}(u_{lm}, T)$,

$$dP_{ik} = \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial u_{lm}} \right)_T du_{lm} + \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial T} \right)_{u_{lm}} dT.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial T} \right)_{u_{lm}} \equiv \beta_{ik} = - \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial u_{lm}} \right)_T \left(\frac{du_{lm}}{dT} \right)_{ik}, \quad (1')$$

где $\left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial u_{lm}} \right)_T$ — компоненты модулей упругости при упругой задаче, а ком-

поненты тензора $\frac{du_{lm}}{dT} = \alpha_{lm}$ имеют простой физический смысл, а именно: диагональные компоненты тензора — изменение относительного удлинения в направлении осей; недиагональные — изменения углов сдвига между направлениями осей при фиксированном напряжении и изменении температуры на 1° . Таким образом, β_{ik} сводятся к известным модулям.

При наличии пластических деформаций можно в компонентах тензора напряжений выделить упругую часть:

$$P_{ik} = \Pi_{ik} - 2G\Omega u_{ik}^0, \quad (2)$$

где Ω — функция от инварианта тензора деформаций.

Используя соотношения (1) и (2), можно получить обобщение уравнений теории пластических деформаций в смещениях на случай неоднородного температурного поля

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial x_k} - \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial u_{lm}} - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial u_{lm}} \right] \frac{du_{lm}}{dT} \right\} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \rho f_i.$$

Однако наличие высоких температур проявляется не только в возникновении температурных напряжений, но и в появлении ползучести материала.

Некоторые авторы в своих работах при рассмотрении температурных задач в области ползучести учитывают напряжения, связанные с изменением температурного поля, добавляем в уравнение движения слагаемого $E\alpha T$ аналогично чисто упругому состоянию, причем α считается тем же, что и в упругой области. Ошибочность этого предположения ясна хотя бы из того, что α в упругой и пластической областях значительно отличаются друг от друга.

При учете ползучести материала мы будем придерживаться теории малых упруго-пластических деформаций, выдвинутой Н. М. Беляевым и несколько усовершенствованной Н. Н. Малинным. По этой теории ползучесть рассматривается как пластическое течение, но с учетом зависимости от времени, т. е.

$$P_{ik} = \Pi_{ik} - 2G\Omega(Inv, T, t)u_{ik}^0. \quad (3)$$

При этом в качестве параметра входит температура; Ω — функция, имеющая различный вид для нагружения и разгружения и зависящая от инварианта тензора деформаций, температуры и времени. Уравнение нелинейно благодаря наличию функции Ω .

Теория малых упруго-пластических деформаций наиболее хорошо применяется на участке второй стадии ползучести, т. е. на участке постоянной скорости пластической деформации.

Для определения напряжений при ползучести исходными являются уравнения (1), (1'), справедливые для любой сплошной среды.

$$\left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial T} \right)_{u_{lm}, T} \equiv \beta_{ik} = - \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial u_{lm}} \right)_{T, t} \left(\frac{du_{lm}}{dT} \right)_{P_{ik}} - \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial t} \right)_{u_{lm}, T} \left(\frac{1}{dt} \right).$$

Подставив это значение в (1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \Big|_T - \left[\left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial u_{lm}} \right)_{T, t} \left(\frac{du_{lm}}{dT} \right)_{P_{ik}} + \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial t} \right)_{u_{lm}, T} \frac{1}{dt} \right] \frac{\partial T}{\partial x_k} + \rho f_i$$

и учитывая, что

$$P_{ik} = \Pi_{ik} - 2G\Omega(Inv, T, t)u_{ik}^0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = & \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial x_k} - \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial u_{lm}} - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial u_{lm}} \right] \frac{du_{lm}}{dT} - \right. \\ & \left. - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial t} \frac{1}{dt} \right\} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \rho f_i, \end{aligned} \quad (II)$$

где Π_{ik} означает упругую часть в P_{ik} .

В случае изотропной среды

$$\frac{du_{lm}}{dT} = \sigma_{lm} = \delta_{lm}\alpha^*$$

II

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial x_k} - \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial u_{il}} - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial u_{il}} \right] \alpha^* - \right. \\ \left. - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial t} \frac{1}{\frac{dT}{dt}} \right\} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \rho f_i. \quad (III)$$

$\frac{dT}{dt}$ и $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ определяются из уравнения для температурного поля, которое может быть получено из первого начала термодинамики и для анизотропной среды имеет вид

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa_{kl} \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) + Q; \quad (4)$$

для изотропной среды

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + Q. \quad (5)$$

Температурное поле определяется из уравнения (4) или (5) независимо от уравнений (I), (I') для $\vec{u}$, что упрощает решение задачи.

Ползучесть рассматривается нами как пластическое течение с учетом временной зависимости, поэтому к уравнениям (II) и (III) может быть применен метод упругих решений А. А. Ильюшина.

В качестве первого приближения берется решение упругой температурной задачи, т. е. в уравнении (III) сумма нелинейных членов полагается равной нулю. Первое приближение дает существенное отклонение в напряжениях для упругой задачи, так как в уравнение (3) подставляется Ω как функция от инвариантов, вычисленных по первому приближению.

Второе приближение строится следующим образом. В уравнении (III) уже учитываются нелинейные члены, зависящие от Ωu_{ik}^0 , в которые подставляется упругое решение, вычисленное по первому приближению. Таким образом, справа получается дополнительная объемная сила

$$2G \left\{ - \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)^*}{\partial x_k} + \left[\frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)^*}{\partial u_{lm}} \frac{du_{lm}}{dT} + \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)^*}{\partial t} \frac{1}{\frac{dT}{dt}} \right] \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\}. \quad (a)$$

Уравнение (III) линеаризуется. Справа стоит известная функция, полученная подстановкой вместо $\vec{u}$ его значения из упругой задачи.

При решении задачи методом упругих решений граничные условия тоже линеаризуются

$$F_i^{\text{нов}} = \Pi_{ik} N_k - 2G (\Omega u_{ik}^0)^* N_k,$$

откуда

$$\Pi_{ik} N_k = F_i^{\text{нов}} + 2G (\Omega u_{ik}^0)^* N_k, \quad (b)$$

т. е. к поверхностным силам добавляется сила, полученная подстановкой в Ωu_{ik}^0 упругого решения:

$$2G (\Omega u_{ik}^0)^* N_k. \quad (c)$$

Итак, во втором приближении опять решается линейное уравнение с объемными силами (a) и граничными условиями (b), т. е. решается упругая задача с дополнительными объемными силами (a) и поверхност-

ными силами (с). n -е приближение получается как решение упругой задачи с объемными силами (а) и поверхностными силами (с), определяющимися ($n - 1$ -м приближением).

Сходимость этих решений доказывается аналогично сходимости решений пластической задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. К теории малых упруго-пластических деформаций. ППМ, т. X, в 3, 1946.
 2. Л. М. Качанов. Теории ползучести. Физматгиз, 1960.
 3. Н. Н. Малинин. Основы расчетов на ползучесть. Машгиз, 1948.
 4. В. И. Панферов. Общий метод решения краевых задач теории упруго-пластических деформаций при постоянном нагружении А. А. Ильюшина. Вестник МГУ, № 2, 1952.
 5. Ю. И. Работнов. Ползучесть элементов конструкций. Физматгиз, 1966.
-