

ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ И НАЛИЧИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Н. Н. Вернигора

Х а р ь к о в

Вопрос о температурном напряженном состоянии имеет существенное значение для многих отраслей техники и в особенности для машин и механизмов, работающих в условиях высоких температур. Вследствие высоких температур возникает напряжение, вызванное температурным полем. Помимо этого при температурах, превосходящих некоторый предел, в деталях машин и механизмов наблюдается явление ползучести, которое существенным образом сказывается на величине напряжений.

В настоящее время явление ползучести приобрело весьма важное практическое значение для работы, например, пружин и диафрагм в приборах и автоматических установках (авиаприборы, автоматические телефонные станции и т. п.). В автоматических приборах явление ползучести вызывает или смещение нуля или отказ работы автоматов. В практике также встречались затруднения, например, при конструировании приборов автоматических телефонных станций, так как нейзильберовые пружины автоматов при повторных нагрузках давали остаточные деформации.

Мы получили уравнение для расчета температурных напряжений при ползучести из уравнения движения сплошной среды. Данная работа ставит своей целью доказать теорему взаимности при наличии ползучести материала и определить при помощи этой теоремы напряжения или деформации.

Рассмотрим случай сплошной среды, не подчиняющейся закону Гука, т. е. среды, удовлетворяющей уравнению

$$P_{ik}^0 = 2G [1 - \Omega u_{ik}^0],$$

$$P_{ii} = K u_{ii},$$

или

$$P_{ik} = \Pi_{ik} - 2G \Omega u_{ik}^0, \quad (1)$$

где Π_{ik} — напряжения, соответствующие упругому состоянию;

Ω — функция от инвариантов тензора деформаций, температуры, а в случае ползучести — и времени.

Мы придерживаемся теории малых упруго-пластических деформаций Н. М. Беляева, согласно которой ползучесть рассматривается как пластическое течение, но с учетом зависимости от времени.

Уравнение состояния среды с учетом температурного поля имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i = 2G \frac{\partial}{\partial x_k} (\Omega u_{ik}^0) + f_i^*. \quad (2)$$

Здесь f_i^* — силы, вызванные наличием температурного поля.

Для случая упругих деформаций мы имеем право записать:

$$\Pi_{ik}^I u_{ik}^{II} = \Pi_{ik}^{II} u_{ik}^I, \quad (3)$$

где Π_{ik}^I , u_{ik}^I — компоненты тензоров напряжения и деформаций, соответствующих первому типу нагрузки;

Π_{ik}^{II} , u_{ik}^{II} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, соответствующих второму типу нагрузки.

Проинтегрируем равенство (3) по объему τ :

$$\int_{\tau} \Pi_{ik}^I \frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_k} d\tau = \int_{\tau} \Pi_{ik}^{II} \frac{\partial u_i^I}{\partial x_k} d\tau,$$

или

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik}^I u_i^{II}) - u_i^{II} \frac{\partial \Pi_{ik}^I}{\partial x_k} \right] d\tau = \int_{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik}^{II} u_i^I) - u_i^I \frac{\partial \Pi_{ik}^{II}}{\partial x_k} \right] d\tau.$$

Применяя к первым членам обеих частей уравнения формулу Гаусса — Остроградского и подставляя во вторые члены вместо $\frac{\partial \Pi_{ik}^I}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \Pi_{ik}^{II}}{\partial x_k}$ их значения из уравнения состояния, получим

$$\begin{aligned} & \oint \Pi_{ik}^I N_k u_i^{II} ds - \int_{\tau} u_i^{II} \left[2G \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathcal{Q} u_{ik}^0)^I + (f_i^* - \rho f_i)^I \right] d\tau = \\ & = \oint \Pi_{ik}^{II} N_k u_i^I ds - \int_{\tau} u_i^I \left[2G \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathcal{Q} u_{ik}^0)^{II} + (f_i^* - \rho f_i)^{II} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Из граничных условий

$$f_i^{\text{пов}} = P_{ik} N_k = (\Pi_{ik} - 2G \mathcal{Q} u_{ik}^0) N_k$$

определим

$$\Pi_{ik} N_k = f_i^{\text{пов}} + 2G \mathcal{Q} u_{ik}^0 N_k.$$

Подставив это значение в уравнение (4), получим теорему взаимности для среды, не подчиняющейся закону Гука:

$$\begin{aligned} & \oint [f_i^I \text{пов} + 2G (\mathcal{Q} u_{ik}^0)^I N_k] u_i^{II} ds - \int_{\tau} u_i^{II} \left[2G \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathcal{Q} u_{ik}^0)^I + \right. \\ & \left. + (f_i^* - \rho f_i)^I \right] d\tau = \oint [f_i^{II} \text{пов} + 2G (\mathcal{Q} u_{ik}^0)^{II} N_k] u_i^I ds - \\ & - \int_{\tau} u_i^I \left[2G \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathcal{Q} u_{ik}^0)^{II} + (f_i^* - \rho f_i)^{II} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Это уравнение является точным, так как оно получено из общих уравнений (1) пластических или подверженных ползучести сред без каких-либо предположений.

В случае пластической среды $\mathcal{Q}$ является функцией от инвариантов и температуры и

$$f_i^* = \left[\left(\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial u_{ee}} - 2G \frac{\partial (\mathcal{Q} u_{ik}^0)}{\partial u_{ee}} \right) \alpha^* \right] \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

В средах, находящихся под действием ползучести, Ω зависит от инвариантов, температуры и времени и

$$f_i^* = \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial u_{ii}} - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial u_{ii}} \right] \alpha^* - 2G \frac{\partial (\Omega u_{ik}^0)}{\partial t} \frac{1}{dT} \right\} \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

Применить уравнения (5) к конкретным задачам довольно трудно, так как в объемные интегралы входят величины, подлежащие определению, т. е. Ωu_{ik}^0 . Данные величины нужно знать в каждой точке тела, а это исключает смысл постановки задачи. Однако применение уравнения (5) становится эффективным, если использовать метод упругих решений А. А. Ильюшина. По этому методу мы можем в объемные интегралы вместо Ωu_{ik}^0 подставить их значения в соответствующем приближении. В качестве первого приближения берется решение упругой задачи. Сходимость этих решений доказывается аналогично сходимости решений пластической задачи, доказанной В. И. Панферовым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Б е л я е в. Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах. «Изв. АН СССР, ОТН», № 7, 1943.
2. А. А. И л ь ю ш и н. К теории малых упруго-пластических деформаций ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
3. Л. М. К а ч а н о в. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
4. В. И. П а н ф е р о в. Общий метод решения краевых задач теории упруго-пластических деформаций при постоянном нагружении А. А. Ильюшина. Вестник МГУ, № 2, Изд-во МГУ, 1952.