

**КРАЙОВА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ПЛИТИ З ЕЛІПТИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ**

Кошкін А.О.

e-mail: andrii.koshkin@nure.ua

Науковий керівник – д-р техн. наук, проф. Стрельнікова О.О.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

This paper is devoted to the linear viscoelasticity problem for an infinite anisotropic plate with elliptic inclusion. Using the small parameter method, the time-dependent problem is transformed into a sequence of elasticity problems solved via complex potentials and the generalized least squares method. Numerical investigations for various materials demonstrate that the most significant redistribution of the stress state occurs during the initial stage of the viscoelastic process and eventually reaches a stationary state. The boundary conditions are satisfied using a discrete approach, ensuring high computational accuracy. The results offer a robust mathematical framework for predicting the long-term structural integrity of composite plates with localized inhomogeneities.

Розглянемо нескінчену в'язкопружну анізотропну плиту з еліптичним отвором L_1 . При знаходженні значень досліджуваних величин у часі можна скористатися принципом Вольтерри [1], тобто розв'язати задачу без урахування властивостей в'язкопружності, а потім у цьому розв'язку замінити пружні сталі часовими операторами та знайти дію цих операторів у часі. Однак для багатозв'язних областей такі розв'язки задач теорії пружності отримувати неможливо. Тому безпосереднє застосування принципу Вольтерри до аналізу напружено-деформованого стану тіл є неможливим.

Використаємо метод малого параметра, за який візьмемо зміну у часі коефіцієнтів Пуассона ν_{12} . Запишемо його у вигляді $\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda$, де ν_{12}^0 – миттєве пружне значення коефіцієнта ν_{12} , λ – малий параметр.

Враховуючи це, розв'язання задачі в'язкопружності зводиться до знаходження похідних комплексних потенціалів наближень $W'_{jk}(z_k)$ із відповідних граничних умов. Ці функції комплексних змінних $z_k = x + \mu_k y$, де μ_k – корені відповідного характеристичного рівняння, визначені в областях S_k , що отримуються із заданої області S вказаними афінними перетвореннями. Після використання конформних відображень отримаємо наступний вигляд комплексних потенціалів:

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jk1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (1)$$

де Γ_{jk} визначаються із системи рівнянь, яка залежить від μ_k , коефіцієнтів деформації матеріалу та згинальних моментів на нескінченності;

a_{jk1n} – невідомі;

ζ_{k1} – змінні, які визначаються із співвідношень

$$z_k = R_{k1} \left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}} \right), \quad R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{2R_{k1}}. \quad (2)$$

Аналогічно для включення розкладемо комплексні потенціали $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$ по поліномам Фабера і після перетворень отримаємо:

$$W_{jk}^{(1)}(z_k^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn}^{(1)} \left(z_k^{(1)} / R_k^{(1)} \right)^n, \quad (3)$$

де $R_k^{(1)}$ обчислюються відповідно до формул (2); $a_{jkn}^{(1)}$ – невідомі.

Похідні комплексних потенціалів наближень повинні задовольняти граничні умови в точках контакту з включенням. Ці умови мають вигляд

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(g_{0k1i} W_k'(z_k) - g_{0ki}^{(1)} W_k^{(1)}(z_k^{(1)}) \right) = f_{j1i}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (4)$$

$$g_{0k11} = p_{0k} / \mu_k, \quad g_{0k1}^{(1)} = p_{0k}^{(1)} / \mu_k^{(1)}, \quad g_{0k12} = q_{0k}, \quad g_{0k2}^{(1)} = q_{0k}^{(1)},$$

$$g_{0k13} = 1, \quad g_{0k3}^{(1)} = 1, \quad g_{0k14} = \mu_k, \quad g_{0k4}^{(1)} = \mu_k^{(1)},$$

$$f_{j11} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[\frac{p_{j-i,k}}{\mu_k} W_{ik}'(z_k) - \frac{p_{j-i,k}^{(1)}}{\mu_k^{(1)}} W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right],$$

$$f_{j12} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[q_{j-i,k} W_{ik}'(z_k) - q_{j-i,k}^{(1)} W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right],$$

$$f_{j13} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[W_{ik}'(z_k) - W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right],$$

$$f_{j14} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[\mu_k W_{ik}'(z_k) - \mu_k^{(1)} W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right].$$

Після визначення похідних комплексних потенціалів самі потенціали обчислюються за формулами

$$W_k'(z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j W_{jk}'(z_k). \quad (5)$$

Замінімо параметр λ часовими операторами

$$\lambda = D_1 \cdot \Re_{\alpha}^* (-\beta_1^* - \delta_1^*) + D_2 \cdot \Re_{\alpha}^* (-\beta_2^*), \quad \text{де} \quad D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{12}^0 \right],$$

$$D_2 = \frac{\delta_2^* E_1^0}{4 E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}, \quad E_i^0 - \text{миттєві пружні значення модулів Юнга } E_i, \quad \delta_i^*,$$

β_i^* – реологічні сталі матеріалу плити, пов'язані зі зміною E_i в часі [2]. Після цього піднесемо до степеня:

$$\lambda^j = \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\Re_{\alpha}^{*k} (-\beta_2^*) - \Re_{\alpha}^{*(j-k)} (-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \quad (6)$$

Обчислюючи λ^j за формулою (6) та підставляючи їх у вирази (5), знайдемо функції $W'_k(z_k)$ та їхні похідні, а отже – згинальні моменти та перерізувальні сили в будь-який момент часу. Для визначення невідомих сталих a_{jk1n} , $a_{jkn}^{(1)}$ функцій (1) і (3) методом найменших квадратів задовольнимо граничні умови в диференціальній формі. Для цього на контурі контакту плити з вклученнями виберемо набір точок $t_{1m}(x_{1m}, y_{1m})$ ($m = \overline{1, M}$) і задовольнимо в них умови, що диференційовано за дугою контуру

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_{0k1i} \delta_k \varphi'_{k1n}(t_{k1m}) a_{jk1n} - g_{0ki}^{(1)} \delta_k^{(1)} \varphi'_{kn}(t_{km}^{(1)}) a_{jkn}^{(1)} \right] = \\ = \frac{df_{j1i}(t_m)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0kli} \delta_k \Gamma_{jk} \left(i = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M} \right), \quad (7)$$

де

$$\delta_k = \frac{dz_k}{ds}, \quad \delta_k^{(1)} = \frac{dz_k^{(1)}}{ds}, \\ t_{k1m} = x_{1m} + \mu_k y_{1m}, \quad t_{km}^{(1)} = x_{1m} + \mu_k^{(1)} y_{1m}, \\ \varphi'_{k1n} = -\frac{n}{\zeta_{k1}^{n-1} R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}, \quad \varphi'_{kn}^{(1)} = \frac{n (z_k^{(1)})^{n-1}}{(R_k^{(1)})^n}.$$

Були проведені чисельні дослідження значень величин для плити з алюмінію [3] та епоксиду [4]. Сталі деформації для матеріалу вклучення обирались так: $a_{ij}^{(1)} = \lambda^{(1)} a_{ij}$, де $\lambda^{(1)}$ – параметр відносної жорсткості. Отримані результати показали, що із плином часу значення моментів у плиті змінюються. При цьому великі зміни відбуваються лише у перші 50 годин після прикладання навантаження, а через 200 годин вони практично не змінюються, тобто в плиті встановлюється стаціонарний стан.

Найбільш висока концентрація моментів спостерігається в плиті з абсолютно м'яким вклученням (отвором) та абсолютно жорстким вклученням. Зі збільшенням жорсткості вклучення моменти спершу спадають, а потім зростають. Найбільші зміни моментів у часі спостерігаються для абсолютно жорсткого вклучення, найменші – у випадку отвору.

Список використаних джерел:

1. Volterra V. Lecons sur the les fonctions de lignes. Paris: Qauthier Villaed, 1913. 230 p.
2. Rabotnov I. N. Creep problems in structural members. Elsevier, 1969. 822 p.
3. Savin G. N. Stress concentration around holes. New York : Pergamon Press, 1961. 430 p.
4. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел. Київ : Наук. думка, 1980. 159 с.