УДК 62.506.2

С. Ф. КАЦАЛАП

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ, ИНВАРИАНТНЫХ К НЕКОТОРЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ СИГНАЛА

При решении задач распознавания образов анализаторы биологических систем способны отождествлять сигналы, которые отличаются такими преобразованиями как сдвиг, поворот, масштабные изменения, линейное растяжение (сжатие) по ортогональным направлениям и т. д. Из-за больших трудностей при экспериментальном изучении поведения нейронных структур анализатора пока не удается выяснить алгоритмы таких преобразований. Естественно, что это обстоятельство порождает теоретические направления соответствующих исследований.

В результате разработано инвариантное описание сигнала с помощью интегральных моментов [1], предложены более сложные интегральные операторы, нормализующие изображения [2, 3], показано, что от сложного преобразования сигнала можно перейти к более простому, используя преобразование системы координат [4]. Основным недостатком интегральных преобразований при решении естественных задач распознавания является то, что с их помощью трудно отождествить два сигнала, отличающихся только некоторой частью. Биологические же системы могут опознать образ иногда даже по небольшой его части. Целесообразно найти такие операторы, которые учитывали бы и это свойство естественных анализаторов.

Первая такая попытка представлена в работе [5], в которой предложено описание сигнала с помощью нелинейных дифференциальных операторов, инвариантных к различным преобразованиям сигнала. В настоящей работе уточняются возможности такого описания, предлагается анализ полученных операторов для одномерных сигналов, а также для сводимых к ним двумерным сигналам, соответствующим двуградационным изображениям.

Будем иметь дело только с непрерывными и много раз дифференцируемыми сигналами, заданными на некоторых областях. Представим такой сигнал в виде

$$y+b=f(x+a), \tag{1}$$

где a, b — параметры, определяющие преобразования сдвига по координатным осям.

Найдем дифференциальное уравнение, соответствующее сигналу (1), начальные условия которого однозначно связаны с параметрами a и b. Для этого необходимо выполнить следующие операции:

1) дифференцируем сигнал

$$y'=f'(x+a), \tag{2}$$

2) находим функцию, обратную относительно аргумента:

$$x+a=f'^{*}(y') \tag{3}$$

3) дифференцируя полученное выражение, имеем

$$y'' f'^{*\prime}(y') - 1 = 0. \quad (4)$$

Таким образом, (1) является общим решением дифференциального уравнения (4). Если рассматривать левую часть (4) как оператор, то при входном сигнале (1) он будет принимать нулевое значение. При воздействии на его вход другими сигналами выходные сигналы принимают отличные от нуля значения. Оператор (4) «запоминает» (1) независимо от преобразования сдвига по координатным осям.

Предположим, что некоторая система реализует оператор (4). Необходимо разработать алгоритм определения сигнала (1). Определяем реакцию системы на некоторый произвольный сигнал, а затем по входному и выходному сигналам находим решение дифференциального уравнения (4).

Оператор (4) показывает, что для его анализа можно использовать любой входной сигнал, кроме $y' = \mathrm{const}$. Очевидно, что наиболее удобным является входной сигнал $y' = x$, тогда (4) принимает вид

$$f'^{*\prime}(x) - 1 = p(x), \quad (5)$$

где $p(x)$ — реакция системы.

Из (5) определим $f(x)$:

$$f = \int [\int (p+1)\, dx]^* \, dx. \quad (6)$$

Рассмотрим аналогичную задачу для сигнала с тремя параметрами

$$y + b = cf(x+a). \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение, начальные условия которого соответствуют параметрам b и c, а решение — уравнению (7), можно представить в следующем виде [5]:

$$\frac{y'}{y''} = \frac{f'}{f''}(x+a). \quad (8)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение третьего порядка, независимое от параметра a, необходимо преобразовать сигнал (8) аналогично преобразованиям (2) и (3) для сигнала (1). В результате их получим уравнение

$$\left[\frac{(y'')^2 - y'''y'}{(y'')^2}\right]\left(\frac{f'}{f''}\right)^{*\prime}\left(\frac{y'}{y''}\right) - 1 = 0. \quad (9)$$

Таким образом, (7) является решением дифференциального уравнения (9), начальные условия которого определяются из параметров a, b, c. Следовательно, (9) «запоминает» (7) независимо от указанных параметров. Если рассматривать структуру, реализующую левую часть (9), то для экспериментального ее исследования можно воспользоваться любым входным сигналом, кроме $\frac{y'}{y''} = \mathrm{const}$. Лучше всего использовать сигнал $\frac{y'}{y''} = x$, при котором дифференциальное уравнение (9) принимает вид

$$\left(\frac{f'}{f''}\right)^{*\prime}(x)-1=p(x), \tag{10}$$

откуда можно определить $f(x)$:

$$f=\int e^{\int\frac{dx}{[\int(p+1)dx]^*}}dx. \tag{11}$$

Рассмотрим аналогичную задачу для сигнала с четырьмя параметрами

$$y+b=cf(kx+a), \tag{12}$$

где k, e определяют линейное растяжение (сжатие) сигнала по направлению координатных осей.

Представим этот сигнал в виде дифференциального уравнения независимо от параметров b, c:

$$k\frac{y'}{y^n}=\frac{f'}{f''}(kx+a). \tag{13}$$

Определив обратную относительно аргумента функцию для (13) и продифференцировав ее после несложных преобразований, можно получить дифференциальное уравнение, независимое и от параметра a:

$$\frac{1}{\left(\frac{y'}{y''}\right)'}=\left(\frac{f'}{f''}\right)^{*\prime}\left(k\frac{y'}{y''}\right). \tag{14}$$

Из (14) определяем функцию, обратную относительно аргумента:

$$k\frac{y'}{y''}=\left(\frac{f'}{f''}\right)^{*\prime *}\left(\frac{1}{\left(\frac{y'}{y''}\right)'}\right). \tag{15}$$

Решая (15) относительно k и дифференцируя полученное выражение, можно определить искомое дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{y''}{y'}\left(\frac{f'}{f''}\right)^{*\prime *}\left(\frac{1}{\left(\frac{y'}{y''}\right)'}\right)\right]'=0. \tag{16}$$

Оператор левой части (16) принимает нулевое значение при воздействии на его вход сигналом (12), при других воздействиях выходной сигнал принимает отличное от нуля значение. Таким образом, (16) «запоминает» (12) независимо от его параметров a, b, c и k. Для исследования системы, реализующей (16), можно воспользоваться любым входным сигналом, кроме $\frac{1}{\left(\frac{y'}{y''}\right)'}=\text{const}$. Лучше всего применять сигнал $\frac{1}{\left(\frac{y'}{y''}\right)'} = x$, тогда (16) принимает вид

$$p(x) = \left[\frac{1}{\ln x} \left(\frac{f'}{f''} \right)^{*'*} (x) \right]'. \tag{17}$$

Решая (17) относительно f, имеем

$$f = \int e^{\int \frac{dx}{[\int (\ln x \int p dx)^* dx]^*}} dx. \tag{18}$$

Рассмотрим аналогичную задачу для сигнала

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha + a = f(x\sin\alpha + y\cos\alpha + b), \tag{19}$$

где α — параметр, определяющий преобразование поворота сигнала в плоскости.

Дифференцируя (19), получаем

$$f'(x\sin\alpha + y\cos\alpha + b) = \frac{\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sin\alpha + y'\cos\alpha}. \tag{20}$$

Обратная функция относительно аргумента принимает вид

$$f'^*\left(\frac{\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sin\alpha + y'\cos\alpha}\right) = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \tag{21}$$

Дифференцируя (21), после несложных преобразований, имеем

$$f'^{*'}\left(\frac{\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sin\alpha + y'\cos\alpha}\right) = -\frac{(\sin\alpha + y'\cos\alpha)^3}{y''}. \tag{22}$$

Обозначим
$$\frac{\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sin\alpha + y'\cos\alpha} = u, \tag{23}$$

тогда

$$\sin\alpha + y'\cos\alpha = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}}}{(u^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \tag{24}$$

Подставляя (23) и (24) в (22), получаем

$$(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}} f'^{*'}(u) = f_1(u) = -\frac{[1 + (y')^2]}{y''}. \tag{25}$$

Обратная функция относительно аргумента имеет вид

$$u = \frac{\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sin\alpha + y'\cos\alpha} = f_1^*\left(\frac{-[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\right). \tag{26}$$

Решая (26) относительно α, имеем

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1 - y' f_1^*}{y' + f_1^*}. \tag{27}$$

Дифференцируя (27), получаем

$$\frac{\left[f_1^*\left(-\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\right)\right]'}{1+\left[f_1^*\left(-\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\right)\right]^2}+\frac{y''}{1+(y')^2}=0. \quad (28)$$

Таким образом, (19) является решением дифференциального уравнения (28), оператор которого при воздействии входным сигналом (19) принимает нулевое значение независимо от параметров a, b и α. При воздействии другими сигналами реакция на выходе оператора принимает отличное от нуля значение. Для исследования системы, реализующей этот оператор, можно воспользоваться любым сигналом, кроме $\frac{[1+(y')^{\frac{3}{2}}}{y''}=\text{const}$. Наиболее простые вычисления получаются при входном сигнале $-\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}=x$, при котором (28) принимает следующий вид:

$$\frac{f_1^{*\prime}(x)}{1+(f_1^*)^2(x)}-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=p(x). \quad (29)$$

Решая (29) относительно f_1, имеем

$$f_1=\left\{\operatorname{tg}\left[\int\left(p+\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)dx\right]\right\}^*. \quad (30)$$

Учитывая (29), определим $f(x)$:

$$f(x)=\int\left[\int\frac{f_1(x)\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right]^* dx. \quad (31)$$

Рассмотрим аналогичную задачу для сигнала

$$cx\cos\alpha-cy\sin\alpha+a=f(cx\sin\alpha+cy\cos\alpha+b), \quad (32)$$

где c — параметр, определяющий масштабные преобразования сигнала.

При этом сигнале (27) принимает следующий вид:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1-y'f_1^*\left(-\frac{c[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\right)}{y'+f_1^*\left(-\frac{c[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\right)}. \quad (33)$$

Дифференцируя (33), решим полученное уравнение относительно c. Продифференцировав окончательный результат, получаем

$$\left\{\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}f_2^*\left(-\frac{[1+(y')^2]^{\frac{1}{2}}}{\left\{\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\right\}'}\right)\right\}'=0, \quad (34)$$

где

$$f_2^*(x) = \frac{x f_1^*(x)}{1+(f_1^*)^2(x)}. \quad (35)$$

Таким образом, (32) является решением дифференциального уравнения (34), поэтому оператор (34) принимает нулевое значение при входном сигнале (32). При воздействиях другими сигналами реакция оператора принимает отличное от нуля значение. Оператор (34) «запоминает» (32) независимо от параметров a, b, c и α. Систему, реализующую оператор (34), можно исследовать аналогично предыдущим системам и получить алгоритм определения (32) по входному и выходному сигналам.

Неоднозначность обратных преобразований при составлении дифференциальных уравнений может привести к тому, что некоторые решения этих уравнений будут «непохожи» на исходную функцию. Поэтому во многих задачах целесообразно определять параметры входного сигнала, используя дифференциальные операторы, например (15), (27) и другие, им аналогичные. Параметры можно также определять по начальным условиям дифференциальных уравнений. Аналогичную методику можно применить для исследования систем, инвариантных к другим преобразованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минг Куэй Ху. Математическая модель зрительного восприятия. — В сб.: Проблемы бионики. Бионические прототипы и синтетические системы. М., «Мир», 1965, с. 308—318.
2. Автоматическая нормализация при комбинированных изображениях. — В сб.: Проблемы бионики. Вып. II. Харьков, 1974, с. 75—80. Авт.: Е. П. Путятин, Б. К. Лопатченко, В. Б. Левиков, О. М. Абрамов.
3. Путятин Е. П., Шульгин И. В., Юрченко В. П. Построение инвариантов смещения и поворота зрительных картин. — В сб.: Биологическая, медицинская кибернетика и бионика. Вып. 3. Ин-т кибернетики АН УССР. Киев, 1970, с. 51—64.
4. Дейч С. Модели нервной системы. М., «Мир», 1970. 326 с.
5. Кацалап С. Ф. Математические исследования адаптивной фильтрации сигналов. — В сб.: Проблемы бионики. Вып. 15, Харьков, 1975, с. 66—71.

Поступила 23 ноября 1974 г.