



Л.Г. Ситник¹, С.Ю. Шабанов-Кушнарченко²

²ХНУРЕ, г. Харьков, Украина, sergabaev@mail.ru

СИСТЕМА ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ, ГРАФОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЯ, ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ, ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Целью данной статьи является разработка методов решения систем логических уравнений и интерпретация решений на языке теории графов.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$A = \bigcup_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}.$$

Итак, исходя из определения, логический определитель задается в виде ДНФ функции алгебры логики с n^2 переменными [4]. Это определение отличается от обычного определения алгебраическо-

[illegible]
$$\text{где } A = \|a_{ij}\|, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}.$$
$$\begin{cases} x_1 = a_{12}x_2 \vee b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1, \end{cases}$$

Однако нетрудно убедиться, что система (1) всегда совместна и все ее решения (векторы $\bar{X}$) будут состоять, вообще говоря, из трех групп компонент. Компоненты первой группы (одни и те же при фиксированном векторе $\bar{B}$) во всех решени-

ях будут принимать единичные значения. Вторая группа компонент такова, что (при том же B) во всех решениях они будут сохранять нулевые значения. Наконец, компоненты третьей группы могут принимать нулевые значения, единичные или как нулевые, так и единичные значения, но не произвольно, о чем речь будет идти в последующих параграфах. Компоненты этой группы будем называть неоднозначными.

Из всех возможных решений системы (1) выделим два, именуя их 0-решением и I-решением. Первое характеризуется тем, что всем неоднозначным переменным присваиваются нулевые значения, а во втором, наоборот, присваиваются единичные значения. Получить эти решения можно методом подстановок, используя два правила. Правило правого поглощения состоит в том, что выражение вида $x = ax \vee b$ заменяется на $x=b$, а правило правого исключения – в том, что выражение вида $x = ax \vee b$ позволяет заменить на $x = a \vee b$.

Использование только правила правого поглощения приводит к 0-решению. В рассматриваемом примере это будет $x_1=b_1$, $x_2=a_{21}b_1$. Наоборот, используя только правило правого исключения, приходим к I-решению. В рассматриваемом примере это будет:

$$x_1 = a_{12}a_{21} \vee b_1, x_2 = a_{12}a_{21} \vee a_{21}b_1.$$

Используя подстановки в (1) сначала значений вектора B , а затем последовательно определяемых значений некоторых переменных, в конечном итоге можно прийти к конкретному 0-решению. Нас же будут интересовать 0-решения и 1-решения в виде их алгебраических выражений как функций от значений коэффициентов a_{ij} и вектора B . Для этого потребуется исследование системы (1) при $b_i=0$, $i=1, n$, которую мы будем называть дизъюнктивной однородной.

Далее будем пользоваться обозначениями:

$\tilde{X}$ – частное решение системы (1) при фиксированном векторе B ,

X^0 – 0-решение системы (1) при том же B ,

X^1 – I-решение системы (1) при том же B ,

$\tilde{X}^0$ – частное решение однородной системы,

X_0^1 – I-решение однородной системы.

Матрицу A сопоставим булев определитель (B -определитель) $|A|$, вычисляемый по той же схеме, что и при решении алгебраических линейных систем уравнений, но вместо операций сложения и умножения будем использовать операции дизъюнкции и конъюнкции соответственно, не приписывая при этом, как и в перманенте, знаков получаемым членам. Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \vee a_{21}a_{12}.$$

В общем виде B – определитель находится так:

$$|A| = \bigcup_{i,j,\dots,q} a_{1i}a_{2j}\dots a_{nq}. \quad (2)$$

В этом выражении «суммирование» производится по всем перестановкам $i, j, \dots, q$ индексов столбцов $1, 2, \dots, n$ матрицы A . Дополнением или адьюнктом элемента a_{ij} матрицы A будем называть определитель $|A_{ij}|$ матрицы A_{ij} , получаемой из матрицы A путем вычеркивания i -ой строки и j -го столбца. В матрице A все элементы главной диагонали заменим на единицы. Полученную матрицу будем обозначать $A^{(1)}$. Соответственно, адьюнкт элемента $a_{ij}^{(1)}$ матрицы $A^{(1)}$ будем обозначать через $|A_{ij}^{(1)}|$.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Система дизъюнктивных уравнений (1) имеет единственное 0-решение X^0 :

$$x_i^0 = \bigcup_{j=1}^n b_j |A_{ji}^{(1)}| = |A_i^{(1)}|, i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Доказательство. Покажем, что формула (3) дает решение системы (1), например, для первого ее уравнения. Очевидно, что при $b_1=1$ из (1) следует и $x_1=1$. Это же следует и из (3). Поэтому проверить (3) достаточно при $b_1=0$. Тогда, подставив (3) в систему (1), получим:

$$x_1^0 = \bigcup_{j=1}^n a_{1j} \left(\bigcup_{i=1}^n b_i |A_{ji}^{(1)}| \right) = \bigcup_{i=1}^n b_i \left(\bigcup_{j=1}^n a_{ij} |A_{ji}^{(1)}| \right).$$

Но в силу пятого свойства булева определителя

$$\bigcup_{j=1}^n a_{ij} |A_{ji}^{(1)}| = |A_{i1}^{(1)}|,$$

откуда и получим ожидаемое равенство $x_1^0 = x_1^0$.

То, что (3) есть 0 – решение, показано ниже. Единственность 0-решения вытекает из его определения. Решение (3) является частным, ибо из приведенного доказательства не следует, что других решений нет.

Из (3) следует метод решения дизъюнктивной системы уравнений почти по правилу Крамера: для нахождения i -ой компоненты 0-решения в матрицу $A^{(1)}$, полученную из матрицы A , следует подставить вместо i -го столбца вектор B и вычислить определитель образовавшейся матрицы $A_i^{(1)}$, определитель $|A_i^{(1)}|$ в дальнейшем будем воспринимать либо как формулу для вычисления компоненты x_i^0 , либо как ее значение.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$x_1^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, x_2^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

и

$$x_3^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, x_4^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

0-решением будет вектор $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Графовая интерпретация систем логических уравнений

Сопоставим каждой переменной x_i системы (1) вершину полного ориентированного графа G_n , наделив ее тем же именем, а всем коэффициентам a_{ij} сопоставим дуги с именами a_{ij} , заходящие в x_i из x_j . Независимым переменным b_i также сопоставим вершины-истоки с теми же именами, соединив их с вершинами x_i графа G_n , исходящими из b_i дугами с единичными значениями. Граф G , получаемый из построенного исключением всех дуг a_{ij} , соответствующих нулевым значениям соответствующих коэффициентов a_{ij} , назовем графом, интерпретирующим систему (1).

Согласно (3) вектор X^0 представим столбцом формул вида $x_i^0 = F_i(A^{(1)}, B), i = \overline{1, n}$, выражающих его компоненты x_i^0 через имена компонент вектора B и имена элементов матрицы $A^{(1)}$. Интерпретируем формулы F_i и G .

Сначала дадим интерпретацию определителя $|A^{(1)}|$ на G_n . Будем рассматривать члены этого определителя, зафиксировав в (2) первые индексы коэффициентов в порядке $1, 2, \dots, n$. Тогда вторые индексы суть все перестановки на $1, 2, \dots, n$. А это значит, что каждый член определителя будет представлен одним или несколькими циклами в перестановке, быть может, включающей единичные циклы, соответствующие единицам главной диагонали в матрице $A^{(1)}$. Лишь один член определителя (назовем его диагональным) будет представлен только единичными циклами.

Для каждого члена α , содержащего в индексах более одного неединичного цикла, найдется член β , содержащий кроме единичных лишь один из этих циклов. Будем говорить, что член β покрывает (в смысле $\beta \vee \alpha = \beta$) член α . Тогда можно считать, что $|A^{(1)}|$ представим одним диагональным членом и членами, содержащими в индексах по одному неединичному циклу. Хотя диагональный член покрывает все остальные, в дальнейших рассуждениях нам будет удобно пользоваться именно таким представлением $|A^{(1)}|$.

Каждому неединичному циклу, содержащемуся в индексах какого-либо члена $|A^{(1)}|$, в графе G_n соответствует замкнутый непересекающийся путь (также именуемый циклом), быть может, содержащий дуги с нулевыми значениями, а каждому единичному циклу — петля. Объединение всех таких циклов и петель и есть интерпретация $|A^{(1)}|$ на G_n .

Воспользуемся построенной конструкцией (объединением циклов и петель) и трактовкой $|A^{(1)}|$ на G_n для интерпретации $|A_i^{(1)}|$ на G . Рассуж-

дения проведем для $i=1$ и распространим их на все остальные значения индексов i . Заменяем, как это и требуется по определению $|A_1^{(1)}|$, первый столбец в матрице $A^{(1)}$ на вектор B . B — определитель полученной матрицы $A_1^{(1)}$, будет отличаться от $|A^{(1)}|$ тем, что в составляющих его членах коэффициенты a_{j1} заменятся на b_j . При этом диагональный член можно будет представить как b_1 , который покроет все члены, не содержащие $b_j, j \neq 1$, а поэтому их можно исключить из рассмотрения. На графе G_n рассмотренным изменениям в $|A^{(1)}|$ соответствуют, во-первых, исключение всех дуг и петель, исходящих из вершины x_1 (исключен 1-й столбец), во-вторых, добавление к G_n вершин-истоков $b_j, j = \overline{1, n}$ (добавлен столбец B) связываемые единичными дугами, соответственно с вершинами x_j , и в-третьих, исключение всех замкнутых путей (циклов), не проходящих через вершину x_1 в силу покрытия соответствующих членов диагональных членов компонентой b_1 вектора B . А это значит, что все упоминавшиеся при интерпретации $|A^{(1)}|$ замкнутые пути на G_n , проходящие через вершину x_1 , преобразуются в разомкнутые пути, исходящие из вершин b_j и заканчивающиеся вершиной x_1 . Исключив из этого множества разомкнутых путей те, которые содержат хотя бы одну дугу с нулевым значением, или начинаются истоком с нулевым значением, получим интерпретацию F_1 на G , а множество истоков, вошедших в объединение оставшихся путей, обозначим как B_1 .

Аналогичные построения проведем и для остальных значений индекса i . Так как $F_i = |A_i^{(1)}|$, то решение системы (1) можно представить в виде

$$x_i^0 = \bigcup_{b_j \in B_i} b_j, B_i \subset B, i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где B_i — множество единичных истоков, из которых пути в x_i на графе G , B — множество всех истоков и $x_i^0 = 0$, если $B_i = \emptyset$.

Таким образом, интерпретацией F_i на G является его подграф, состоящий из всех ненулевых путей, ведущих от ненулевых истоков в вершину x_i . Объединение всех таких подграфов для $i = \overline{1, n}$ образует подграф G^0 , интерпретирующий решение (3) на графе G .

Если с ненулевыми истоками связать окраску в единичный цвет, то решение (3) можно трактовать как окрашенную часть графа G , в котором эту окраску принимают все пути (вместе с вершинами), исходящие из окрашенных истоков и заканчивающиеся в вершинах без исходящих дуг. Это значит, что выделенное подмножество окрашенных вершин при заданном B будет окрашено в единичный цвет независимо от того, как будут окрашиваться остальные вершины, и во всех остальных решениях $\tilde{x}$. А это значит, что (3) есть 0-решение по определению.

Изложенное позволяет сформулировать следующее

Свойство 1. Среди всех решений системы (1) 0-решение содержит максимальное число нулевых компонент.

Это свойство эквивалентно определению 0-решения.

3. Общее решение дизъюнктивной системы

Ранее уже отмечалось, что система (1) может иметь несколько частных решений $\tilde{X}$. В силу свойства 1 различие в частных решениях будет определяться компонентами вектора, принявшими в 0-решении нулевые значения.

Для получения общего решения системы дизъюнктивных уравнений построим специальный алгоритм, позволяющий получить любое частное решение. Одновременно такой алгоритм позволяет выявить и структуру общего решения системы (1). Для этого воспользуемся графовой интерпретацией системы (1). Для выявления структуры общего решения можно поступить двояко. Первый путь состоит в исключении из интерпретирующего графа G подграфа G^0 , интерпретирующего 0-решение, с последующим исследованием оставшейся части графа. Второй путь состоит в исключении из G только вершин-истоков b_i , $i = \overline{1, n}$ вместе с исходящими дугами с последующим изучением оставшегося графа G_0 , соответствующего однородной системе (1). Пойдем по второму пути.

Если первопричиной присвоения единичных значений переменным в 0-решении были истоки с ненулевыми значениями, то таковых нет в графе G_0 . Поэтому источниками «единиц» в любом решении однородной системы могут быть только петли или замкнутые пути в графе G_0 . Действительно, наличие петли в вершине x_i означает, что i -е уравнение в однородной системе (1) имеет вид $x_i = x_i \vee f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, из которого следует, что в нем и во всех остальных уравнениях можно положить $x_i = 1$, и это не приведет к противоречию ни в i -ом уравнении, ни во всех остальных. Единичные значения можно присвоить всем вершинам (переменным) какого-либо замкнутого пути в графе G_0 , и это также не приведет к противоречиям ни в одном из уравнений. Заметим, что в замкнутом пути либо всем переменным следует присвоить единичные значения, либо ни одной.

Пересекающиеся замкнутые пути (включая петли) образуют одну из сильносвязанных компонент в графе G_0 , а это значит, что все вершины этой компоненты в смысле решения однородной системы образуют некоторый класс эквивалентности (назовем его K -классом). Такие вершины можно стянуть в одну, наделив ее петлей, дабы иметь возможность непротиворечиво наделять ее единичным значением. Заменив все указанные сильносвязанные компоненты графа G_0 на вершинах

с петлями, получим ациклический и, быть может, несвязный так называемый конденсированный граф G_c . Все вершины графа G_c , имеющие петли, назовем свободными в G_c . Вершины, вошедшие в соответствующие K -классы, будем также называть свободными, но в G . Этим вершинам независимым образом можно присваивать единичные значения, и это не будет приводить к противоречиям в однородной системе (1).

В графе G_c все или некоторые вершины могут находиться в отношении следования (частичного порядка), причем, если какая-либо из вершин примет единичное значение, то и все ее последователи также должны принять единичные значения. А так как единичные значения (окраску) можно присваивать независимо любым свободным его вершинам, то всякой начальной окраске свободных вершин будет соответствовать окрашивание некоторого подграфа в G_c . Присвоив единичные значения всем переменным, сопоставленным окрашенным вершинам, «раскрыв» K -классы, при условии, что все остальные переменные наделены нулевыми значениями, сформируем вектор $\tilde{X}_0$, соответствующий частному решению однородной системы.

Множество найденных таким путем всех частных решений однородной системы, включая нулевое, составляет ее общее решение. Других решений однородная система не имеет.

Действительно, найденные частные решения можно различать по единичным компонентам или, что одно и то же, по окрашенной части графа G_0 , интерпретирующей $\tilde{X}_0$. Отличительной чертой этих решений является наличие у любой окрашенной вершины петли или заходящей дуги из уже окрашенной вершины. В силу свободы присвоения единичных значений вершинам с петлями в графе G_c , перечислены все варианты таких решений. Если же имеются другие решения однородной системы, то они должны содержать либо изолированную вершину без петли и наделенную единичным значением, либо вершину с единичным значением, но связанную заходящими дугами только с вершинами, наделенными нулевыми значениями. Но то и другое противоречит однородной системе (1).

Очевидно, что объединение 0-решения системы (1) и любого частного решения однородной системы (1) будет решением неоднородной системы (1). Интерпретация 0-решения и решения однородной системы (1) на графе G_0 , а также аналогично строящаяся интерпретация любого частного решения $\tilde{X}$ на G позволяет сформулировать общее для них.

Свойство 2. Если $\tilde{X}$ — решение системы (1), то любая вершина (компонента вектора $\tilde{X}$), принявшая единичное значение, должна:

1 — либо иметь петлю;

2 — либо находиться в замкнутом пути, где всем вершинам присвоены единичные значения;

3 — либо быть связанной заходящим путем с вершиной, которая уже наделена единичным значением в силу 1 или 2;

4 — либо быть связанной заходящим путем с какой-либо вершиной-исток, наделенной единичным значением.

Верно и обратное.

Установленные свойства позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2. Любое частное решение системы (1) может быть представлено покомпонентной дизъюнкцией ее 0-решений и одного из решений соответствующей однородной системы (1).

Если в формулировке теоремы 2 упоминаемое 0-решение заменить на любое другое фиксированное частное решение системы (1), то аналогичное утверждение не будет верным. В этом состоит одно из отличий систем логических уравнений от линейных алгебраических систем.

Доказательство. Пусть X — решение неоднородной системы (1), не совпадающее с 0-решением. Тогда оно должно отличаться от 0-решения хотя бы одной единичной компонентой (вершиной) вне подграфа G^0 . Обозначим множество всех таких вершин через W . Это множество удовлетворяет свойству 2, так как вершины из W связаны с G^0 только исходящими дугами, а поэтому в W отсутствуют вершины, связанные с вершинами-истоками. Применяя к вершинам из W свойство 2 (сначала прямое утверждение для неоднородной системы, а затем обратное — для однородной системы), получим, что W порождает конкретное решение однородной системы $\tilde{X}$. Это решение строится из W добавлением к нему вершин из подграфа G^0 , связанных с ним заходящими путями, которые также наделяются единичными значениями. В силу свойства 2 в 0-решении и в решении $\tilde{X}$ все вершины подграфа G^0 имеют единичные значения, а поэтому

$$\tilde{X} = X^0 \vee \tilde{X}_0.$$

Теорема доказана.

Пример 1 (продолжение)

Интерпретирующий граф G_0 представлен на рис. 1, в котором x_1 и пара (x_3, x_4) — свободные переменные. У x_1 и у пары (x_3, x_4) последователем является x_2 . Следовательно, частными решениями однородной системы будут

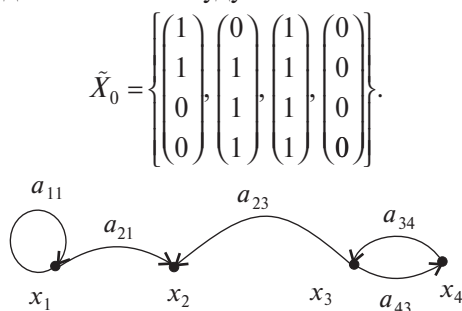


Рис. 1. Интерпретирующий граф из примера 1

Рассмотрим алгебраический способ отыскания всех частных решений однородной системы.

Переменная x_l входит в состав свободных, если через соответствующую ей вершину в графе G_0 проходит петля или замкнутый путь. Установить этот факт можно следующим образом. Заменив l -й столбец в матрице $A^{(1)}$ на l -й столбец из матрицы A , в результате получим матрицу $\hat{A}_l^1$, которой воспользуемся для вычисления x_l по формуле, аналогичной (3):

$$x_l = \bigcup_{j=1}^n a_{jl} |A_{jl}^{(1)}| = |\hat{A}_l^1|, l = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Вектор x_l^1 с компонентами $|\hat{A}_l^1|$ из (5) назовем вектором автоединиц. Тогда лишь при $|\hat{A}_l^1| = 1$ переменная x_l свободна.

Справедливость такого утверждения подтверждается тем же методом, который был использован при интерпретации 0-решения на графе G . Действительно, (2.9) интерпретируется на графе G так же, как и 0-решение, но вместо вектора B здесь выступает l -й столбец матрицы A . То есть, единичное значение определителя $|\hat{A}_l^1|$ указывает на существование хотя бы одного единичного пути от введенных вместо B (ненулевых) вершин-истоков $a_{jl}, j = \overline{1, n}$ в вершину x_l , или, что то же, на наличие петли или цикла в графе G_0 , проходящих через x_l .

Исходя из этого, формулу (5) можно использовать вместо (3) при $b_j = 0, j \neq l$ и $b_l = |\hat{A}_l^1|$ для нахождения того частного решения $X_0^{(l)}$ однородной системы, которое связано с присвоением единичных значений всем переменным из K -класса, куда входит x_l :

$$x_{0i}^{(l)} = |\hat{A}_i^1| |A_{li}^{(1)}|, i = \overline{1, n}.$$

Такое решение можно найти при всех $l = \overline{1, n}$, включая и случаи с $|\hat{A}_l^1| = 0$. Назовем такие решения базисными, принимая всегда допустимое нулевое решение также за базисное. Тогда любое частное решение однородной системы $\tilde{X}_0$ представимо покомпонентной дизъюнкцией любых наборов базисных решений.

Пример 1 (продолжение). Вычислим базисные решения. Сначала по (5) определим свободные переменные:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad x_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Таковыми оказались x_1, x_3 и x_4 . Вычислим базисное решение:

$$x_{0_1}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, x_{0_2}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$x_{0_3}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, x_{0_5}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

а это совпадает с первым частным решением, найденным выше. Аналогично находятся и остальные два, а нулевое приписывается.

4. Частное 1-решение дизъюнктивной системы

Особое место занимает 1-решение однородной системы (1), так как позволяет легко найти все те компоненты вектора $\tilde{X}$, которые могут принимать неоднозначные значения. Один из способов построения 1-решения однородной системы состоит в определении и суммировании всех базисных решений.

Теорема 3. Однородная система, соответствующая системе дизъюнктивных уравнений (1), имеет единственное 1-решение X_0^1 :

$$x_{0_i}^1 = \bigcup_{l=1}^n |\hat{A}_l^1| |A_{li}^{(1)}|, i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Доказательство. Единственность 1-решения очевидна, а единственность (5) как формулы определяется с точностью до эквивалентных форм представления булевых функций.

Следствие 1. Интерпретирующий систему (1) граф G ацикличен, если, и только если, $x_0^1 = 0$.

Следствие 2. Если интерпретирующий систему (1) граф ацикличен, то она имеет единственное решение, совпадающее с 0-решением (1-решением).

Для выявления ацикличности графа достаточно исследовать A матрицу по (5). Поэтому имеет место следствие 3.

Следствие 3. Интерпретирующий систему (1) граф G ацикличен, если и только если все компоненты вектора автоединиц нулевые:

$$|\hat{A}_l^1| = 0, l = \overline{1, n}.$$

В соответствии с теоремой 2 1-решение неоднородной системы (1) может быть найдено как $X^1 = X^0 \vee X_0^1$.

Пример 2. Найдем 1-решение однородной системы, матрица A которой взята из примера 1.

Вычислим вектор автоединиц X_l^1 , используя (5):

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, x_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

и воспользуемся им для вычисления X_0^1 по (5):

$$x_{0_1}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, x_{0_2}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$x_{0_3}^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, x_{0_5}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то есть 1-решением будет:

$$X_0^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выводы

В статье развит и обоснован метод решения квадратных дизъюнктивных систем логических уравнений с помощью аппарата логических определителей. Формулы для нахождения корней подобны известным формулам Крамера для решения систем линейных уравнений. Выделены особые типы частных решений, и найден общий вид представления решения для системы дизъюнктивных уравнений. Предложена графовая интерпретация указанных решений. Разработанный в статье метод можно распространить на системы конъюнктивного и смешанного типов. Единственным ограничением при этом будет требование квадратности главной матрицы системы логических уравнений.

Список литературы: 1. Бондаренко М.Ф., Коноплянко З.Д., Четвериков Г.Г. Основы теории синтеза надшвидкодійних структур мовних систем штучного інтелекту: Монографія. — К.: ІЗМН, 1997. — 264 с. 2. Закревский А.Д. Матричный аппарат логического синтеза дискретных устройств / ДАН БССР, 1977. — Т. 21, № 11. — С. 991-994. 3. Чистов В.П. Аналитические решения логических уравнений // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, № 2, 1994. — С. 219-224. 4. Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнарченко Ю.П. Теория интеллекта. Учебник. — Х.: Изд-во СМІТ, 2006. — 571 с.

Поступила в редколлегию 15.04.2008