УДК 621.391

Ф. А. ДОМНИН, канд. техн. наук, *А. И. ПОВОРОЗНЮК*

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Одним из наиболее распространенных классов квазипериодических функций, порождающих повышенный интерес, является класс биологических сигналов, периодичность которых определяется сердечным ритмом. Это такие сигналы как давление и кровотоки в различных участках гемодинамической системы, сигналы электрокардиограммы, реограммы и другие. При совместном анализе таких сигналов в исследовательской практике возникает необходимость в их аналитическом представлении. В данной работе рассматривается способ интерполяции, позволяющий установить структуру интерполяционного полинома между двумя квазипериодическими сигналами, в качестве которых рассматриваются синхронно снятые сигналы реограммы и артериального давления.

Постановка задачи заключается в следующем: даны два квазипериодических процесса $x(t)$ — реограмма и $y(t)$ — артериальное давление. Необходимо построить интерполяционный полином $L(x) = f(X)$, с заданной точностью воспроизводящий процесс $y(t)$ в зависимости от параметра $x(t)$. В общем случае решение поставленной задачи требует построения интерполяционных полиномов большой степени и является крайне трудоемкой [1]. В данной работе рассмотрен способ построения интерполяционного полинома, основанный на рассмотрении исходных процессов в пределах одного периода. Наличие корреляции между такими сигналами дает основание строить зависимость $y = f(x)$, заданную множеством экспериментальных точек. При построении такой зависимости может быть принято равномерное квантование во времени сигналов $x(t)$ и $y(t)$ в соответствии с общеизвестными правилами. Обычно между процессами $x(t)$ и $y(t)$ имеются фазовые сдвиги, поэтому получаемая функция $y = f(x)$ является неоднозначной. Для устранения многозначности сигнал $x(t)$ в пределах периода представляется в виде монотонной функции $X(t)$.

$$X(t) = X_0 + \int_0^T \operatorname{sign}(\dot{x})\,\dot{x}dt; \quad \operatorname{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{x} > 0; \\ 0 & \text{при } \dot{x} = 0; \\ -1 & \text{при } \dot{x} < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где X_0 — значение процесса $x(t)$ в момент начала отсчета периода; T — длительность периода (длительность периода сердечного цикла).

С учетом квантования по времени значение $X(t)$ определяется так:

$$X(t) = X_0 + \sum_{i=0}^{n} \operatorname{sign}(\Delta X_i) \Delta X_i; \quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad n = 2Tf_c. \tag{2}$$

Как видно из уравнений (1), (2), их решение требует определения начала и конца периода процесса $x(t)$. Учитывая существенную нелинейность кривой артериального давления $y(t)$ в момент открытия аортального клапана (излом характеристики), для повышения точности аппроксимации начало периода отсчитывается с этого момента времени. Для выделения точек начала и конца периода может быть использован регулярно повторяющийся в каждый период один из признаков реограммы — минимум реограммы в точке A (см. рисунок). При этом обеспечивается однозначность определения начала и конца периода. Используя полученную монотонную функцию $X(t)$ и избавляясь от времени как от промежуточного параметра, получаем искомую однозначную зависимость $y = f(X)$, которая и используется при построении интерполяционного полинома.

Аппроксимация функции $y = f(X)$ производится полиномом вида

$$L(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n. \tag{3}$$

Рассмотрим способ построения интерполяционного полинома, обеспечивающий получение минимального его порядка при заданной точности интерполяции. Пусть известны значения x_0, $x_1, \ldots, x_n$, при которых $y_i - L_i = 0$. Используя известные значения $(y_i, x_i)_{i=1,2,\ldots}$, выполним процедуру понижения порядка исходного полинома путем переноса на каждом i-том шаге системы координат с точки (y_{i-1}, x_{i-1}) в точку (y_i, x_i) с последующим делением y_i на значения x_i. При этом образуется новая функция $y = f_i(X)$, для аппроксимации которой требуется полином степени не выше $(n - i)$. Рассмотренная процедура продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге для дополнительно определенных функций мы получим $y = f_i(X) = \mathrm{const}$. Получаемое при этом значение i определяет степень интерполирующего полинома. Для пояснения изложенного выполним несколько промежуточных преобразований с исходным полиномом (3).

Перенесем начало координат в одну из экспериментальных точек $A_0(y_0, x_0)$ зависимости $y = f(X)$. Получим

$$L(X_1) = y_1 = b_1 X_1 + b_2 X_1^2 + \ldots + b_n X_1^n, \tag{4}$$

где $y_1 = y - y_0$; $X_1 = X - x_0$.

Выражение (4) делится без остатка на аргумент X_1. Выполнив деление ординат множества экспериментальных точек на значение их абсцисс в новой системе координат, получаем

$$y = f_1(X_1) = \frac{y_1}{X_1} = b_1 + b_2X_1 + b_3X_1^2 + \ldots + b_nX_1^{n-1}.$$

Данная функция имеет степень на единицу меньше, чем исходная $y = f(X)$. В точке A_0 значение частного $y = f_1(X)$ является неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, поэтому данная и аналогичные ей точки исключаются из дальнейших расчетов. Далее процедура вычисления повторяется, т. е. переносится начало координат в точку $A_1(y_1, x_1)$; находим значения $y_2 = f_1(X_1) - y_1$ и $X_2 = X - x_1$ и выполняем деление

$$y = f_2(X_2) = \frac{y_2}{X_2} = c_1 + c_2X_2 + c_3X_2^2 + \ldots + c_{n-1}X_2^{n-2}.$$

С каждым шагом степень аппроксимирующего полинома L, точно проходящего через точки $A_0, A_1, \ldots$, увеличивается на единицу. Процесс вычисления представляется следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{y - y_0}{X - y_0} - y_1}{X - x_1} - y_2}{\cdots\cdots\cdots} - y_{i-1}}{X - x_{i-2}}}{X - x_{i-1}} = y_i = \text{const}; \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Преобразовав выражение (5) для i-го шага, получим

$$L_i = y_0 + (X - x_0)(y_1 + (X - x_1)(\ldots)(y_{i-1} + (X - x_{i-1})\,y_i\underbrace{)\ldots)}_{i}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, найдем коэффициенты полинома. Увеличение степени полинома продолжается до тех пор, пока на всем множестве экспериментальных точек не выполнится условие

$$|y - L_i| \leqslant \varepsilon,$$

где ε — точность аппроксимации.

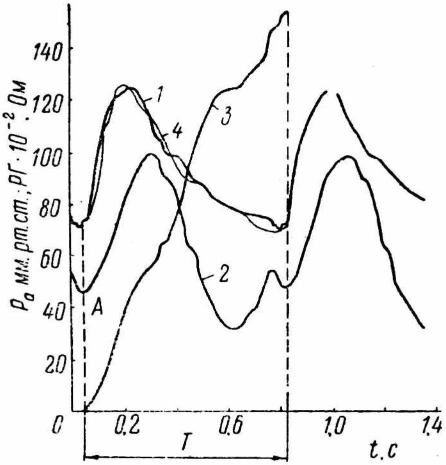
При переносе системы координат из i-й точки в $(i+1)$-ю для уменьшения погрешностей вычислений надо брать точку, для которой

$$r = (x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 = \max, \tag{6}$$

где y_i, y_{i+1} — значения функции $y_i = f_i(X)$ на i-м шаге.

Полученный данным методом интерполирующий полином имеет степень, значительно меньшую числа экспериментальных точек. Исходная функция аппроксимируется полиномом 5-й степени

$$L(X) = ((((((X - 43) \cdot 0,7 \cdot 10^{-2} - 0,256) \cdot 0,1 (X - 124) - 1,258) \cdot 10^{-2} (X - 155) + 1,85) \cdot 10^{-3} (X - 75) - 0,3) (X - 15) + 21,33) \cdot 0,1X + 73$$



с погрешностью $\varepsilon \leqslant 3\%$.

На рисунке представлены графики: *1* — артериального давления $y(t)$, *2* — реограмма $x(t)$, *3* — монотонная функция $X(t)$, *4* — аппроксимация исходной функции выражением (6).

Изложенный способ построения интерполяционного полинома легко реализуется с помощью ЭВМ.

Список литературы: **1**. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. М., Наука, 1972. 544 с. **2**. *Касерес Ц., Дрейфус Л.* Вычислительная система и автоматическая диагностика заболеваний сердца. М., Мир, 1974. 389 с.

Поступила 7 марта 1979 г.