УДК 519.85

ОЦЕНКИ МИНИМУМА ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

ГРЕБЕННИК И.В., ЛАПКО Д.А.

Исследуются задачи оптимизации функций на евклидовых комбинаторных множествах, отображенных в пространство R^n, при наличии дополнительных ограничений. Предлагается способ формирования оценок минимума функции цели на основе решения вспомогательных задач. Приводятся примеры, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Введение. Многие задачи геометрического проектирования, управления и др. описываются комбинаторными оптимизационными моделями [1-3]. Решению задач комбинаторной оптимизации посвящены многие публикации[3-8].

Один из распространенных подходов к решению таких задач связан с использованием различных схем ветвления с оценками [3-4]. Однако в большинстве случаев эти подходы применялись в задачах без дополнительных ограничений на переменные.

Высокая вычислительная сложность методов комбинаторной оптимизации, различие комбинаторных свойств множеств, составляющих области допустимых решений, являются причинами отсутствия единого подхода к решению задач комбинаторной оптимизации. В связи с этим актуальной является проблема разработки методов оптимизации различных классов функций на комбинаторных множествах.

Целью настоящей работы является построение и исследование оценок минимума функций на различных комбинаторных множествах с дополнительными ограничениями на переменные и применение этих оценок в задачах комбинаторной оптимизации.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу условной оптимизации следующего вида:

$$\bar{\varphi}(x) \to \min , \tag{1}$$

$$g_i(x) \le 0, \quad i \in J_s , \tag{2}$$

$$h_j(x) = 0, \quad j \in J_t , \tag{3}$$

$$x \in E \subset R^n , \tag{4}$$

где $J_r = \{1, 2, ..., r\}$ — множество индексов; $E \in R^n$ — евклидово комбинаторное множество [1], порождённое действительными числами $a_1 \le a_2 \le ... \le a_s$. Элементами множества E являются векторы $x \in R^n$, координаты которых принимают значения упорядоченных наборов из $\{a_1, a_2,..., a_s\}$. При этом элементы множества E отличаются между собой как значениями своих координат, так и порядком их следования. Примерами евклидовых комбинаторных множеств служат множества перестановок, размещений с повторениями и без, сочетаний и др. Евклидовы комбинаторные множества являются вершинами (а в ряде случаев и внутренними точками) комбинаторных многогранников. Исследованию этих множеств и задач оптимизации на них посвящены многие работы, например [2-4].

Сложность задачи оптимизации (1)-(4) и отсутствие эффективных методов её решения приводят к необходимости дальнейших исследований её свойств. Для разработки подходов к решению этой задачи попытаемся получить оценки минимума функции $\bar{\varphi}(x)$ на множестве E с учётом ограничений (2)-(3). С этой целью рассмотрим некоторые случаи задачи (1)-(4).

Задача 1.

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \to \min , \tag{5}$$

$$Cx \le d , \tag{6}$$

$$x \in E \subset R^n , \tag{7}$$

где $\alpha_i \in R, \quad i \in J_n$, $C = [C_{ij}]_{m \times n}$ — матрица, элементами которой являются действительные числа, $d \in R^n$.

Решению задачи оптимизации линейной функции с линейными ограничениями на евклидовых комбинаторных множествах вида (5)-(7) посвящён ряд работ, в частности [5-8]. В результате применения предлагаемых в них методов покрытия , отсечения и других удаётся, часто за приемлемое время, получить точное решение задачи.

Результаты решения задачи 1 могут быть использованы при получении оценки минимума функции цели $\bar{\varphi}(x)$ в задаче (1)-(4).

Задача 2.

$$\bar{\varphi}(x) \to \min , \tag{8}$$

$$Cx \le d , \tag{9}$$

$$x \in E \subset R^n , \tag{10}$$

где $\bar{\varphi}(x)$ — действительная функция, заданная в точках евклидового комбинаторного множества $E \in R^n$, матрица C и вектор d определяются так же, как и в задаче 1.

Построим выпуклое продолжение $\varphi(x)$ функции $\bar{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq \mathrm{conv}E$, где $\mathrm{conv}E$ — выпуклая оболочка множества E. В некоторых случаях выпуклое продолжение может быть построено с сохранением выражения $\bar{\varphi}(x)$. В то же время для некоторых классов евклидовых комбинаторных множеств удаётся построить выпуклое (сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$) продолжение $X \supseteq \mathrm{conv}E$ на множество для произвольных $\bar{\varphi}(x)$. В работе [9] доказывается существование такого продолжения для множеств E, совпадающих с вершинами своей выпуклой оболочки, т.е. удовлетворяющих условию

$$E = \text{vert conv}E\ . \tag{11}$$

Условию (11) удовлетворяют евклидовы комбинаторные множества перестановок, сочетаний, размещений без повторений из n элементов по n-1, размещений с повторениями из 2 элементов по n и др. Евклидовы множества размещений с повторениями и без повторений произвольного вида путём декомпозиции могут быть разбиты на множества, удовлетворяющие условию (11). Конструктивные методы для построения выпуклых и сильно выпуклых продолжений функций, заданных на классах множеств, удовлетворяющих условию (11), приводятся в работах [4,10,11].

В результате построения выпуклого (сильно выпуклого с параметром $\rho > 0$) продолжения $\varphi(x)$ в точках множества E выполняется условие $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) \quad \forall x \in E$. Перейдём от задачи (8)-(10) к эквивалентной ей задаче оптимизации:

$$\varphi(x) \to \min\ , \tag{12}$$

$$Cx \le d\ , \tag{13}$$

$$x \in E \subset R^n\ . \tag{14}$$

Оценим минимум выпуклой (сильно выпуклой с параметром $\rho > 0$) на $X \supseteq \text{conv}E$ функции $\varphi(x)$ на множестве

$$P = \{x \mid x \in E \subset R^n, Cx \le d\}\cdot \tag{15}$$

Для этого используем оценки минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах без дополнительных ограничений на переменные, полученные в работах [3,4,12,13].

Исследования этих оценок в целях повышения их эффективности проведены в [14].

Приведём выражения для оценок, исследованных в указанных работах. Учтём при этом, что из соотношения (15) следует включение $\text{conv}\ P \subseteq \text{conv}\ E \subseteq X$.

Пусть $\bar{\varphi}(x)$ — функция цели задачи (8)-(10), а $\varphi(x)$ - её выпуклое дифференцируемое продолжение на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq \text{conv}E$. Тогда для любого $x \in X$

$$\min_{y\in E} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y\in E}(\nabla\varphi(x), y)\ . \tag{16}$$

Если $\varphi(x)$ — сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение функции $\bar{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq \text{conv}E$, то

$$\min_{y\in E} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(y^0) + \rho\cdot \min_{y\in E} \| y - y^0 \|^2\ . \tag{17}$$

В случае, если $\varphi(x)$ — сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ дифференцируемое продолжение $\bar{\varphi}(x)$ на $X \supseteq \text{conv}E$, то

$$\min_{y\in E} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho} \| \nabla\varphi(x) \|^2 +$$

$$+ \rho\cdot \min_{y\in E} \| y - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x) \|^2 . \tag{18}$$

Для получения числовых значений оценок (16)-(18) необходимо в их правых частях решить задачи об отыскании минимума линейной функции вида $l(y) = (\nabla\varphi(x), y)$ и квадратичной функции вида $g(y) = \| y - C \|^2$, $C \in R^n$, на множестве E.

Решение таких задач на различных множествах E без дополнительных ограничений на переменные проводилось в [3,4,12].

В рассматриваемом случае необходимо получить оценки минимума $\bar{\varphi}(x)$ при наличии дополнительных линейных ограничений на переменные, т.е. на множестве P вида (15). Тогда оценки (16)-(18) примут следующий вид:

$$\min_{y\in P} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y\in P}(\nabla\varphi(x), y)\ , \tag{19}$$

$$\min_{y\in P} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(y^0) + \rho\cdot \min_{y\in P} \| y - y^0 \|^2\ , \tag{20}$$

$$\min_{y\in P} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho} \| \nabla\varphi(x) \|^2 +$$

$$+ \rho\cdot \min_{y\in P} \| y - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x) \|^2 . \tag{21}$$

Задача об определении минимума $(\nabla\varphi(x), y)$ на множестве P в соотношении (19), очевидно, представляет собой задачу оптимизации вида (5)-(7). Решая её одним из методов, предложенных в работах [5-8], можно получить числовое значение оценки (19) и, следовательно, оценить минимум функции цели задачи 2 с учётом линейных ограничений на переменные.

Задачи оптимизации в правых частях соотношений (20) и (21) связаны с определением минимума функции $g(y) = \| y - C \|^2$ на множестве P. Решение таких задач является более сложным, чем определение минимума линейной функции на P, и должно проводиться с учётом особенностей конкретных множеств E. Для определения минимума функции $g(y) = \| y - C \|^2$ на множестве P или хотя бы его оценки можно использовать результаты решения такой задачи на множествах E, приведенные в [4,12,13]. Опишем решение этой задачи для случая, когда E представляет собой евклидово комбинаторное множество E_{nk} перестановок из n элементов, k из которых различны, порождённое числами $a_1 \le a_2 \le ... \le a_s$. Согласно [12], на множестве E_{nk}

$$g(y)=\| y-C \|^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} y_i^2-2\sum_{i=1}^{n} C_i y_i+\sum_{i=1}^{n} C_i^2=\sum_{i=1}^{n} a_i^2+\sum_{i=1}^{n} C_i^2-2\sum_{i=1}^{n} C_i y_i;$$

$$C\in R^n.$$

Тогда $\min\limits_{y\in P} g(y)=\min\limits_{y\in P}(\sum_{i=1}^{n} a_i^2+\sum_{i=1}^{n} C_i^2-2\sum_{i=1}^{n} C_i y_i)=$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2+\sum_{i=1}^{n} C_i^2+\min_{y\in P}(-2\sum_{i=1}^{n} C_i y_i). \qquad (22)$$

Задача оптимизации в правой части (22) представляет собой задачу оптимизации линейной функции на E_{nk} с линейными ограничениями, т. е. задачу вида (5)-(7). Её решение в правых частях соотношений (20) и (21) при $C=y^0$ и $C=x+\frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)$ соответственно позволяет получить оценки минимума функции цели задачи 2.

Отметим, что подобный подход к получению значений оценок (20) и (21) можно применить и в случае, когда минимум функции $g(y)=\| y-C \|^2$ удаётся лишь оценить. Так, для комбинаторных множеств размещений E_n^k можно построить оценку минимума $g(y)$ на E_n^k [4]. Такая оценка сводится к определению минимума линейной функции на множестве E_n^k. Оценку $g(y)$ на множестве P для множества размещений E_n^k в этом случае можно получить путём решения задачи вида (5)-(7). Поскольку минимум $g(y)$ на P будет только оценен, а не определён точно, то соответствующие оценки минимума $\bar{\varphi}(x)$ вида (20) и (21) будут более слабыми.

Рассмотрим возможность усилить оценки минимума функции цели задачи (8)-(10). Применим для этого подход, изложенный в [14]. Введём обозначения для правых частей оценок (19)-(21):

$$\bar{e}_1(x)=\varphi(x)-(\nabla\varphi(x),x)+\min_{y\in P}(\nabla\varphi(x),y), \qquad (23)$$

$$\bar{e}_2(x)=\varphi(y^0)+\rho\cdot\min_{y\in P}\| y-y^0 \|^2, \qquad (24)$$

$$\bar{e}_3(x)=\varphi(x)-\frac{1}{4\rho}\| \nabla\varphi(x) \|^2+$$

$$+\rho\cdot\min_{y\in P}\| y-x+\frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x) \|^2. \qquad (25)$$

Отметим, что оценки (19)-(21) справедливы для любого $x\in X\supseteq \mathrm{conv}E$. Кроме того, конструктивные методы построения выпуклых продолжений функций, заданных на множестве E, на выпуклые замкнутые множества позволяют получить сильно выпуклые продолжения с заданным параметром $\rho>0$. Поскольку оценки (19)-(21) − это оценки минимума функции снизу, то естественно стремиться к получению возможно более точных, а значит, возможно больших по величине оценок. Используя введенные обозначения (23)-(25), рассмотрим следующие задачи оптимизации[14]:

$$\bar{e}_1(x)\to\max,\quad x\in X, \qquad (26)$$

$$\bar{e}_2(\rho)\to\max,\quad \rho>\rho_0, \qquad (27)$$

$$\bar{e}_3(x,\rho)\to\max,\quad x\in X,\rho>\rho_0. \qquad (28)$$

Сложность зависимостей в поставленных задачах на позволяет получить их решения аналитически. Однако их можно решить численно с использованием известных методов недифференцируемой оптимизации. Результатом их решения станут эффективные в смысле выбора x и ρ значения оценок минимума функций цели в задачах типа (8)-(10).

Отметим, что получение эффективных в указанном смысле оценок представляет собой трудоёмкую в вычислительном отношении задачу. Каждый шаг любого из численных методов решения задач (26)-(28), связанный с вычислением выражений (23)-(25) в новой точке x или с новым значением ρ, требует решения задачи оптимизации функции вида $l(y)=(\nabla\varphi(x),y)$ или $g(y)=\| y-C \|^2$ на множестве P. Это обстоятельство делает возможным вычисление эффективных оценок минимума функции цели в задаче (8)-(10) только на верхних уровнях дерева решений или при сравнительно небольшой размерности задачи.

Проиллюстрируем изложенный выше подход к построению оценок минимума в задачах условной оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах результатами вычислительных экспериментов.

Рассмотрим задачу оптимизации квадратичной функции вида $\varphi(x)=(C_1x,x)+Bx\to\min$, где

$$C_1=\begin{bmatrix}10 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 30 & 4.5 & 5\\ 3 & 4 & 6 & 7\\ 4 & 5 & 7 & 20\end{bmatrix},$$

B =[100, -10, 1, 100], x принимает значения перестановок без повторений на множестве Y={1, 2, 3, 4}, при ограничениях вида $C_2x\le d$, где

$$C_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -5 & 1 & 5\\ 1.2 & 3 & -3.6 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

d =[20 36 2.2 60 3 3].

В результате полного перебора были найдены следующие допустимые значения x:

Допустимые вершины	Значение целевой функции
3 4 2 1	1220
2 4 3 1	**1125**
3 4 1 2	1373
1 4 3 2	1203
2 4 1 3	1455
1 4 2 3	1380

Приведём значения оценок e_1 и e_3 для различных значений точки x_0, в которой рассчитывались оценки:

x_0	Оценка e_1	Оценка e_3
2 4 3 1	1117	1122.41
3 1 2 4	762	816
Допустимые точки		
2 3 1 2	1069	1085
1 3 1 2	1051	1070
2 4 1 3	1073	1094
Недопустимые точки		
4 3 1 2	1045	1072.57
1 1 1 1	746.5	784.40
4 4 4 4	799	836.9
1 4 4 1	1117	1122.41

Ниже приведены результаты расчёта оценки e_2 для различных значений параметра ρ:

ρ	$e_2(\rho)$
1	-138.43
10	30.14
100	264.65
1000	334.57
10000	343.23
100000	344.08

Выводы

1. Эксперименты подтверждают, что значения оценок существенным образом зависят от выбора точки x_0, но требуют значительных затрат машинного времени

2. Использование этих оценок без оптимизации по x_0 возможно в методах типа ветвей и границ, а с оптимизацией – для однократной оценки приближенного решения, полученного другим методом, из-за высоких вычислительных затрат на получение оптимизированной оценки.

3. Результаты экспериментов соответствуют теории в том, что точка x_0, в которой вычисляется оценка, может быть недопустимой в смысле линейных ограничений задачи, т.е. может и не принадлежать области P.

Литература: 1. *Стоян Ю.Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. Х., 1980. 22с. (Препринт АН УССР/Ин-т пробл. машиностроения, 85). **2.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268с. **3.** *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: ІСДО, 1993. 188 с. **4.** *Яковлев С.В., Гребенник И.В.* О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах // Изв. вузов. Математика. 1991. №11. С.74-86. **5.** *Яковлев С.В., Валуйская О.А.* О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учётом линейных ограничений // Доп. НАНУ. 1999, №11. С.103-107. **6.** *Гребенник И.В.* Решение некоторых задач условной оптимизации линейных функций на перестановочном многограннике // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №1. С. 55-59. **7.** *Гребенник И.В.* Оптимизация линейной функции на перестановочном многограннике с линейными ограничениями // В кн. Материалы 6-й международной конференции «Теория и техника передачи, приёма и обработки информации». Х., 2000. С. 257-259. **8.** *Ємець О.О., Ємець Є.М.* Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової оптимізації // Доповіді НАН України. 2000. №9. С.105-109. **9.** *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функции на вершинах выпуклых многогранников //ЖВМ и МФ. 1994. Т.34, №7. С.1112-1119. **10.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А.. Валуйская О.А.* Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере // Кибернетика и системный анализ. 1998. №2. С.27-36. **11.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике// ДАН УССР, Сер А. 1988. №5. С.68-70. **12.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике //ДАН УССР, Сер. А. 1988. №3. С.238-240. **13.** *Емец О.А.* Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нём // ДАН УССР. 1991. № 4. С.69-72. **14.** *Гребенник И.В., Лапко Д.А.* Исследование оценок минимума выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №1. С. 109-113.

Поступила в редколлегию 29.05.2003

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Новожилова М.В.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Научные интересы: комбинаторная оптимизация, вычислительные методы, математическое моделирование. Увлечение: волейбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

Лапко Дмитрий Александрович, студент 5-го курса ХНУРЭ. Научные интересы: комбинаторная оптимизация, вычислительные методы, математическое моделирование. Увлечение: классическая гитара. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.