УДК 62.506.2

Е. П. ПУТЯТИН, канд. техн. наук, *М. С. ТРЕПЕТИН*,
И. В. ШУЛЬГИН, канд. техн. наук, *Б. В. ПИЛЬЩИКОВ*

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ МОНОКУЛЯРНОГО ЗРЕНИЯ

Продолжим начатое в [1, 2] математическое описание закономерностей преобразования воспринимаемых объектов в зрительные образы, в частности физического пространства в поле зрения человека при монокулярном восприятии.

Математическая модель строится на основе психологического, формулированного в виде аксиомы луча феномена. Он заключается в том, что точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства зрения M, которые лежат на одном луче, проходящем через центр глаза a_0, в некотором смысле отождествляются — видятся испытуемым слитно. Эксперименты с высокой степенью точности подтверждают указанное свойство зрения.

Преобразование, осуществляемое зрительной системой испытуемого, можно представить в виде [2]

$$Y = F(a_1, a_2) = \mathrm{L}(\omega_1, \omega_2), \tag{1}$$

где $\omega_1 = f(a_1)$, $\omega_2 = f(a_2)$, f — некоторая функция, преобразующая точки a_1 и a_2 пространства зрения в элементы ω_1 и ω_2 множества Ω. Элементы ω_1, ω_2 можно интерпретировать как субъективные образы точек a_1, a_2 (точки зрительного ощущения). При совпадении точек зрительного ощущения $f(a_1) = f(a_2)$ и $F(a_1, a_2) = 1$. В противном случае при $f(a_1) \neq f(a_2)$ имеет место равенство $F(a_1, a_2) = 0$.

Рассмотрим конкретный вид отображения.

Пусть для всякого $a \in M$ однозначно определено вещественное число $\|a\|$, являющееся длиной радиуса-вектора точки a (норма в евклидовом пространстве) [4, с. 68]. Введем отношение $\rho(M)$, согласно которому для всех $a_1 a_2 \in M$ произведение $(a_1 a_2) \in \rho(M)$ в том и только том случае, если

$$\frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{a_2}{\|a_2\|}.$$

Очевидно, что $\rho(M)$ — отношение эквивалентности.

Покажем, что классами эквивалентности отношения $\rho(M)$ являются совокупности точек, лежащих на одних и тех же лучах, т. е. $\rho = \rho(M)$. Действительно, пусть a_1, a_2 лежат на луче l_1, $a_1 = (t_1 a_x, t_1 a_y, t_1 a_z)$, $a_2 = (t_2 a_x, t_2 a_y, t_2 a_z)$, где a_x, a_y, a_z — направляющие косинусы луча l_1. При этом $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$. Тогда $a_1/\|a_1\| = (a_x, a_y, a_z)$ и $a_2/\|a_2\| = (a_x, a_y, a_z)$, $a_1/\|a_1\| = a_2/\|a_2\|$. Значит, $(a_1, a_2) \in \rho(M)$.

Для любых двух точек прямой l_1 выполнено условие $a_1/t_1 = a_0 = a_2/t_2$, откуда $a_1 = (t_1/t_2)\, a_2 = t^1 a_2$. С другой стороны, если a_1 и a_2 не лежат на одном луче, то $a_1 \neq t^1 a_2$ ни для одного $t >$

Пусть $a_1, a_2 \in M$ не лежат на одном луче. Если бы $a_1/\|a_1\| = a_2/\|a_2\|$, то $a_1 = a_2(\|a_1\|/\|a_2\|) = t^1 a_2$, т. е. a_1 и a_2 вопреки предложению принадлежали бы одному лучу. Следовательно, $a_1/\|a_1\| \neq a_2/\|a_2\|$ и $(a_1, a_2) \in \rho(M)$.

Таким образом, доказано, что если a_1 и a_2 лежат на одном луче, то $(a_1, a_2) \in \rho(M)$. С другой стороны, если точки a_1, a_2 не лежат на одном луче, то, по доказанному, $(a_1 a_2) \notin \rho(M)$.

Теорема*. *Пусть $M \subset R^3$ — некоторое замкнутое выпуклое множество. Пусть также выполнены условия:* 1) $a_0 = (0, 0, 0) \in M$; 2) *для всякого $a \in M$ существует $r \geqslant \varepsilon$ такое, что $\frac{a}{\|a\|} r \in M$. Тогда фактор-пространство $\overline{M} = M/\rho(M)$ гомеоморфно замкнутому кругу евклидовой плоскости.*

Доказательство. 1. Пусть конус K определен условием $K\{a/a \in R^3$ и существует $t > 0$, такое, что $\tilde{t}a \in M\} \cup \{0\}$.

Покажем, что K — замкнутый конус. Пусть $\{a_i\}$ — произвольная сходящаяся последовательность в K. Тогда в R^3 существует $\lim a_i = a$. Покажем, что $a \in K$. Это очевидно, если $a = 0$. Пусть $a \neq 0$. Тогда $\frac{a_i}{\|a_i\|} r \in M$, $i = 1, 2, \ldots$ в силу определения K. При этом из $a_i \to a$ следует $\frac{a_i}{\|a_i\|} \to \frac{a}{\|a\|} r$. Так как M замкнуто, $\frac{a}{\|a\|} r \in M$. В результате $ta \in \tilde{M}$ при $t = \frac{r}{\|a\|}$. Следовательно, $\tilde{a} \in K$.

Пусть S_r — сфера радиуса r. Покажем, что

$$S_r \cap M = S_r \cap K.$$

Вследствие $M \subset K$ величина $S_r \cap M \subset S_r \cap K$. Напротив, пусть $a \in S_r \cap K$. Поскольку $O \in K$, существует $t > 0$ такое, что $ta \in$ Тогда в силу условия 2) теоремы имеем $(a/\|a\|)\, r \in M$. Но $a \in$ т. е. $\|a\| = r$. Поэтому $a \in M$ и, следовательно, $a \in S_r \cap M$. Справедливость выражения (2) доказана.

Из определения конуса вытекает, что $k \neq R^3$. Поэтому из (2) следует, что $S_r \cap M$ гомеоморфно замкнутой области евклидовой плоскости.

Покажем, что фактор-пространство $\overline{M} = M/\rho(M)$ взаимно-однозначно соответствует точкам множества $S_r \cap M$.

Пусть I — отображение, ставящее в соответствие любому $a \in$ его класс эквивалентности, т. е. $\mathrm{I}a = \bar{a} \in \overline{M}$. Поставим в соответствие элементу $\bar{a}$ точку $(a/\|a\|)\, r \in S_r \cap M$. Обозначим соответствующее отображение буквой γ, т. е. $\gamma\bar{a} = (a/\|a\|)\, r$. Определение корректно (так как не зависит от способа выбора a в факторклассе $\bar{a}$).

---

* При формулировке и доказательстве использованы элементы топологии

Отображение γ сюръективно. Действительно, пусть $a \in S_r \cap M$. Тогда $\gamma\bar{a} = (a/\|a\|)\,r = a$, поскольку $\|a\| = r$.

Отображение γ инъективно. Действительно, пусть $a \in S_r \cap M$. Тогда по определению γ будем иметь $(a/\|a\|)\,r = b$ и $(a/\|a\|) = b/r$. Но $b \in S_r \cap M$ и, значит, $\|b\| = r$. Следовательно, $a/\|a\| = b/\|b\|$, т. е. $(a, b) \in \rho(M)$. Отсюда вытекает, что a и b лежат на одном луче и $\bar{a} = \bar{b}$. Теперь, если $\bar{a} \neq \bar{b}$, то $\gamma\bar{a} \neq \gamma\bar{b}$ (в противном случае, как указано выше, из $\gamma\bar{a} = \gamma\bar{b} = c$ следует $\bar{a} = \bar{b} = c$). Таким образом, γ инъективно. Но, как известно, сюръективное и инъективное отображения являются биективными. На основании этого можно отождествлять множества $\overline{M}$ и $S_r \cap M$. Легко видеть, что при этом множества, открытые в $\overline{M}$ (как в фактор-пространстве), совпадают с открытыми множествами в $S_r \cap M$ [5]. Таким образом, $S_r \cap M$ гомеоморфно пространству $\overline{M}$. Из ранее сказанного следует, что $\overline{M}$ гомеоморфно замкнутой области евклидовой плоскости. Теорема доказана.

Будем считать пространство зрения M замкнутым в R^3. Остальные условия теоремы, очевидно, выполнены. Поэтому множество M гомеоморфно замкнутой области Ω евклидовой плоскости. Пусть φ — некоторый гомеоморфизм $S_r \cap M$ на Ω. Кроме того, в процессе доказательства теоремы были построены гомеоморфизм γ множества $\overline{M}$ на $S_r \cap M$ и сюръективное отображение I из M на $\overline{M}$.

Покажем, что произведение $\varphi\gamma\mathrm{I}$ является искомым отображением по условию (1). Для этого установим, что если $f = \varphi\gamma\mathrm{I}$, то для точек $a_1 a_2 \in M$, лежащих на одном луче, $f(a_1) = f(a_2)$, а для точек, не лежащих на одном луче, $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Пусть $a_1 a_2 \in M$ лежат на одном луче. Тогда, согласно доказанному выше, $(a_1, a_2) \in \rho(M)$ и, значит, $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$. Отсюда $f(a_1) = \varphi\gamma\mathrm{I}(a_1) = \varphi\gamma(\bar{a}_1) = \varphi\gamma(\bar{a}_2) = \varphi\gamma\mathrm{I}(a_2) = f(a_2)$. Напротив, пусть a_1 и a_2 не лежат на одном луче. Тогда $(a_1, a_2) \notin \rho(M)$ и, следовательно, $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$. Отсюда ввиду биективности $\tilde{\gamma}$ имеем

$$f(a_1) = \varphi\gamma\mathrm{I}(a_1) = \varphi\gamma(\bar{a}_1) \neq \varphi\gamma(a_2) = \varphi\gamma\mathrm{I}(a_2) = f(a_2),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, можно считать, что отображение f является суперпозицией трех отображений: I — сюръекции $\tilde{M}$ на $\overline{M}$, γ — биекции $\overline{M}$ на $S_r \cap M$, φ — гомеоморфизма $S_r \cap M$ на Ω, где Ω — замкнутая область евклидовой плоскости.

Найденное разложение является, по существу, каноническим.

Множество Ω точек плоскости станем называть полем зрения. Из сказанного вытекает, что f преобразует множество точек пространства зрения в множество точек поля зрения. Следовательно, f реализует некоторое непрерывное преобразование вида

$$(x, y, z) \to (\xi(x, y, z),\ \eta(x, y, z)), \tag{3}$$

т. е. $f(x, y, z) = (\xi, \eta)$, где $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$.

Из аксиомы луча и свойства отображения I следует

$$f(tx, ty, tz) = \varphi\gamma \mathrm{I}(tx, ty, tz) = \varphi\gamma \mathrm{I}(x, y, z) = f(x, y, z) = \\ = [\xi(x, y, z), \ \eta(x, y, z)].$$

С другой стороны, $f(tx, ty, tz) = [\xi(tx, ty, tz), \ \eta(tx, ty, tz)]$. Сопоставляя последнее и предыдущее равенства, получаем

$$\xi(tx, ty, tz) = \xi(x, y, z);$$
$$\eta(tx, ty, tz) = \eta(x, y, z).$$

Соотношения (4) являются функциональными уравнениям и некоторые из их решений можно использовать для построения

Условие (4) характеризует лишь отображение I. Свойство бие тивного отображения γ выражается в том, что точки $a_1(x_1, y_1, z_1)$ $a_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на разных лучах, переходят в разные точ Ω и при этом

$$[\xi(x_1, y_1, z_1), \ \eta(x_1, y_1, z_1)] \neq [\xi(x_2, y_2, z_2), \ \eta(x_2, y_2, z_2)].$$

Наконец, отображение φ требует непрерывности функций ξ и в области M.

Примерами функций ξ, η являются

$$\xi = \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z}; \quad \eta = \frac{\alpha_1' x + \alpha_2' y + \alpha_3' z}{\beta_1' x + \beta_2' y + \beta_3' z},$$

где α_i, α_i', β_i, β_i' $(i = 1, 2, 3)$ — некоторые постоянные коэфф циенты.

Выбор коэффициентов β_i, β_i' определяется тем, что плоско $P_1 : \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0$ и $P_2 : \beta_1' x + \beta_2' y + \beta_3' z = 0$ проходят конуса K, натянутого на M. В частности, P_1 и P_2 могут совпада

Последнему требованию всегда можно удовлетворить ввиду то что максимальный угол между образующими конуса пространст монокулярного зрения меньше угла π [6, с. 158, рис. 90].

Покажем, что функции (1), (2), (6) удовлетворяют всем тре ваниям, предъявляемым к отображению F. Действительно, функц ξ, η непрерывны в M вследствие выбора плоскостей P_1, P_2. Кро того, очевидно, что ξ, η удовлетворяют условиям (4). Остае показать, что условию (6) также можно удовлетворить выбором п ходящих коэффициентов α_i, β_i, α_i', β_i' $(i = 1, 2, 2)$.

Будем исходить из того, что для некоторых различных то $a_1, a_2 \in M$, не лежащих на одном луче, значения функций ξ, совпадают:

$$\xi(a_1) = \xi(a_2), \ \eta(a_1) = \eta(a_2).$$

Выясним, каким условиям должны удовлетворять коэффициен α_i, β_i, α_i', β_i', чтобы равенства (7) имели место. Сначала прове это для α_i, β_i.

Пусть $a_1 = a_1(x_1, y_1, z_1)$ и $a_2 = a_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1}{\beta_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1} = \frac{\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3}{\beta_1 x_2 + \beta_2 y_2 + \beta_3 x_2}.$$

Освободившись от знаменателей, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1)(x_1y_1 - y_1x_2) + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(x_1z_2 - x_2z_1) + \\ + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(y_1z_1 - y_2z_1) = 0.$$

Последнее выражение есть не что иное, как

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 \\ \beta_2\beta_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_3 \\ \beta_1\beta_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 \\ \beta_1\beta_2 \end{vmatrix} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Условие (8) означает равенство нулю смешанного произведения соответствующих векторов. Аналогичное соотношение имеет место и для коэффициентов α_1', β_1':

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2'\alpha_3' \\ \beta_2'\beta_3' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_1'\alpha_3' \\ \beta_1'\beta_3' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_1'\alpha_2' \\ \beta_1'\beta_2' \end{vmatrix} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Пусть $\bar{r}$ — вектор, координатами которого являются элементы верхней строки определителя (8), а $\bar{r}'$ — вектор, соответствующий верхней строке определителя (9).

Тогда из условий (8), (9) следует, что векторы $a_2(x_2, y_2, z_2)$, $a_1(x_1, y_1, z_1)$ компланарны векторам $\bar{r}'$, $\bar{r}$. Следовательно, для выполнения (5) необходимо и достаточно, чтобы плоскости, содержащие векторы $\bar{r}$ и $\bar{r}'$, проходили вне пространства зрения M.

Легко показать, что вектор $\bar{r}$ лежит в плоскости $P_1: \beta_1x + \beta_2y + \beta_3z = 0$, а вектор $\bar{r}'$ — в плоскости $P_2: \beta_1'x + \beta_2'y + \beta_3'z = 0$, так как

$$\beta_1\begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 \\ \beta_2\beta_3 \end{vmatrix} - \beta_2\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_3 \\ \beta_1\beta_3 \end{vmatrix} + \beta_3\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 \\ \beta_1\beta_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\beta_1'\begin{vmatrix} \alpha_2'\alpha_3' \\ \beta_2'\beta_3' \end{vmatrix} - \beta_2'\begin{vmatrix} \alpha_1'\alpha_3' \\ \beta_1'\beta_3' \end{vmatrix} + \beta_3'\begin{vmatrix} \alpha_1'\alpha_2' \\ \beta_1'\beta_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Однако плоскости P_1, P_2 в силу непрерывности функций ξ, η проходят вне пространства зрения. Если P_1 и P_2 совпадают, то условия (8), (9) выполняются одновременно.

Следовательно, требуемые функции ξ, η всегда могут быть построены выбором соответствующих коэффициентов α_i, β_i, α_i', β_i', $i = 1, 2, 3$.

Другим примером ξ, η являются функции широты и долготы, описываемые формулами

$$\xi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} + \pi R(z < 0), \tag{10}$$

$$\eta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \pi R(x < 0),$$

где $R(t<0)$ — предикат, равный единице, если $t<0$, и равнь нулю в противном случае.

В силу своей простоты эти формулы используются в медици ской практике при построении и анализе карт поля зрения [(Формулы

$$\xi = \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{z}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, x, \quad \eta = \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{z}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, y, \qquad (1$$

где $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} + \pi R(z<0)$, приведены в р боте [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульгин И. В., Пильщиков Б. В. Математическое описан преобразования органом зрения человека физического пространст в субъективное поле зрения при монокулярном восприятии. В сб Проблемы бионики. Вып. 8. Харьков, 1972, с.29—31.
2. Шульгин И. В., Лопатченко Б. К., Пильщиков Б. Математическое моделирование монокулярного зрительного восприяти В сб.: Проблемы бионики. Вып. 9. Харьков, 1972, с. 43—46.
3. Шульгин И. В. Математические модели преобразования информаци в поле зрения человека и их технические приложения. Автореф. ка дис. Харьков, 1972.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционально анализа. М., «Наука», 1965. 300с.
5. Куратовский К. Топология. М., «Мир», 1966. 276 с.
6. Авербах М. И. Офтальмологические очерки. М., Медгиз, 1949. 340