ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Вовченко П.А.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: platon.vovchenko@nure.ua

The problem of mathematical modeling of many stationary processes leads to the need for finding on $[0,1]$ positive solution of the boundary-value problem for equation $-u''=f(x,u)$. When using two-sided iterative methods, two iterative sequences (upper and lower solutions) are constructed, which on both sides coincide with the exact solution of the problem, which allows at each step of the iterative process to have an a posteriori estimate of the error. The effectiveness of the developed method is demonstrated by the computational experiment.

При математичному моделюванні різних процесів, зокрема, у хімічній кінетиці, теорії горіння та вибуху тощо, приходять до необхідності чисельного аналізу крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь еліптичного типу [1]. Ці крайові задачі зазвичай мають вигляд

$$-\Delta u = f(\mathbf{x},u),\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

де Δ – оператор Лапласа, Ω – область, у якій відбувається розглядуваний процес.

У ряді випадків уявлення про процес можна отримати з аналізу відповідних (1), (2) одновимірних задач. Наприклад, для знаходження розподілу температури при реакції у нескінченній посудині з плоскопаралельними стінками, а також при спрощеному розгляді реакції горіння у циліндричній посудині приходять до крайової задачі

$$-u''=\lambda e^{u},\ x\in(0;\,1), \tag{3}$$

$$u(0)=u(1)=0, \tag{4}$$

а при розгляді процесів реакції-дифузії – до задачі

$$-u''=\lambda e^{\frac{u}{1+\alpha u}},\ x\in(0;\,1), \tag{5}$$

$$u(0)=u(1)=0. \tag{6}$$

Точні розв’язки крайових задач для напівлінійних диференціальних рівнянь відомі лише у поодиноких випадках, тому актуальною є розробка чисельних методів розв’язання задач такого класу. Робота присвячена дослідженню можливості побудови двобічних наближень до додатного розв’язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з експоненціальними нелінійностями. Метод двобічних наближень є зручним інструментом як при дослідженні питань існування та єдиності розв’язків операторних рівнянь, так і для фактичного їх знаходження. При цьому, якщо права частина диференціального рівняння містить параметри, то застосування методу двобічних наближень дозволяє накласти на них умови, які є достатніми для додатної розв’язності задачі. Двобічні наближення дозволяють побудувати дві послідовності функцій, які є верхніми та нижніми оцінками розв’язку на кожній ітерації, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв’язку [2].

Якщо $G(x,s)$ – функція Гріна диференціального оператора $-u''$ за перших крайових умов, то кожна з крайових задач (3), (4) і (5), (6) еквівалентна інтегральному рівняю Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(u(s)) ds \,, \tag{7}$$

де $f(u) = \lambda e^u$ для задачі (3), (4) і $f(u) = \lambda e^{\frac{u}{1+\alpha u}}$ для задачі (5), (6).

Рівняння (7) розглядатимемо як операторне рівняння $u = T(u)$ на конусі K_+ невід’ємних у $C[0,1]$ функцій. Якщо функція $f(u)$ дозволяє діагональне подання $f(u) = \hat{f}(u,u)$, де функція $\hat{f}(v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w, то оператор T буде гетеротонним, для якого оператор $\hat{T}(v,w)(x) = \int_0^1 G(x, s) \hat{f}(v(s), w(s)) ds$ буде супровідним. Так, для задачі (3), (4) можна обрати $\hat{f}(v,w) = \lambda e^v$, а для задачі (5), (6) – $\hat{f}(v,w) = \lambda e^{\frac{v}{1+\alpha w}}$.

Для розглядуваних гетеротонних операторів сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $<0, \beta>$, де $\beta > 0$ для обох задач знаходиться з умови $\beta e^{-\beta} \ge \lambda \max\limits_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x, s) ds$. Тоді ітераційний процес

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}) \,,\ w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}) \,,\ k = 0, 1, 2, ...,$$
$$v^{(0)} = 0 \,,\ w^{(0)} = \beta \,,$$

двобічно збігається до єдиного на конусному відрізку $<0, \beta>$ додатного розв’язку u^* розглядуваної крайової задачі.

Двобічна збіжність розуміється у сенсі виконання нерівностей

$$v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 \,.$$

Список використаних джерел:

1. Ananthaswamy V., Rajendran L. Analytical Solutions of Some Two-Point Non-Linear Elliptic Boundary Value Problems // Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 3, No 9. – pp. 1044 – 1058.

2. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.