УДК 621.385

М.В. ВОЛОВЕНКО, В.М. ЗІНЬКІВСЬКИЙ, О.М. НІКІТЕНКО, канд. техн. наук

СТІЙКІСТЬ ТА ПЕРІОДИЧНИЙ РУХ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ „МАГНЕТРОННИЙ ДІОД З ДИСИПАЦІЄЮ"

У попередній роботі [1] було розглянуто поведінку динамічної системи „магнетронний діод", визначено точки рівноваги і доведено існування періодичного руху в такій системі.

Як відомо, під час роботи магнетронних систем високочастотне електричне поле автоматично призводить до сортування електронів, причому ці електрони віддають частину кінетичної енергії руху до енергії електромагнітного поля або електромагнітних коливань. Таким чином у динамічній системі „магнетронний діод" відбувається дисипація енергії.

Метою цієї статті є дослідження поведінки найпростішої динамічної системи „магнетронний діод з дисипацією".

Згідно класичній електродинаміці кожна заряджена частинка, що рухається прискорено, випромінює енергію.

Випромінювання енергії, зазвичай, відбивається на русі частинки. Припущення про те, що у магнітному полі "швидкість частинки не змінюється", є лише наближено вірним. Частинка, що рухається за круговою траєкторією, випромінює енергію у вигляді електромагнітних хвиль через те, що зміна напрямку швидкості означає, що рух є прискореним.

Сила, яка обумовлює випромінювання, має бути записана таким виразом

$$F_r = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{x},$$

де e – заряд електрона; ε_0 – діелектрична стала; c – швидкість світла у вакуумі.

Якщо заряджена частинка (електрон) здійснює під дією поля рух, який є наближено гармонічним з частотою ω, то для сили F_r маємо вираз [2]

$$F_r = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega^2\dot{x}.$$

Якщо електрон рухається у порожнечі прямолінійно й рівномірно, то, як відомо, він не випромінює. Якщо ж він рухається у середовищі, то можливим є випромінювання – так зване випромінювання Вавилова – Черенкова. Випромінювання є можливим й тоді, коли заряджена частинка пролітає у порожнечі поблизу періодичної структури. У цьому випадку хвиля струму збуджує цілу низку просторових гармонік [3].

У звичайних електронних приладах (клістронах, магнетронах, лампах з біжною хвилею тощо) випромінювання та формування згустків відбувається одночасно, згустки формуються під дією власного випромінювання, в результаті чого випромінювання підсилюється й формування продовжується аж до його обмеження нелінійними ефектами.

Випромінювання відбувається й тоді, коли заряджена частинка пролітає повз яке-небудь тіло або осідає на ньому – це так зване перехідне випромінювання. Найпростіший випадок перехідного випромінювання – випромінювання за рівномірного та прямолінійного руху частинки у порожньому напівпросторі.

Спонтанне та індуційоване випромінювання – це основні поняття квантової теорії випромінювання, без яких не можна обійтися під час вивчення квантової електроніки; у класичній електроніці, що оперує з рухом електронів у вакуумі до відносно недавнього часу таке трактування фактично не застосовувалося, оскільки змістовних та нових результатів воно не надавало [3 – 5].

В системі електронів-осциляторів, що заповнюють об'єм V, кулонівське поле кожного електрону надає нам поле просторового заряду, яке у вакуумній електроніці враховується тільки тоді, коли воно явно і сильно впливає на фазування.

Суттєво, що дефазуючі поля визначаються не парними взаємодіями (тобто зіткненнями, якими у вакуумній електроніці можна знехтувати), а усередненим розподілом зарядів та струмів в об'ємі [6].

Відомо, що надвипромінювання (кооперативне або когерентне спонтанне випромінювання) відбувається через розвиток в системі дисипативної нестійкості, яка виникає для процесів з від'ємною енергією коливань за наявності втрат. Особливість полягає в тому, що дисипація існує через втрати енергії на випромінювання.

Аналогом когерентного спонтанного випромінювання в класичній електроніці є випромінювання в ансамблях класичних електронів-осциляторів різноманітної природи.

Припускається, що ефекти когерентності (кооперативні ефекти) виникають для збуджених осциляторів через їх взаємодію завдяки полю власного випромінювання. Подібні явища спостерігаються в об'ємах, лінійні розміри яких є малими у порівнянні з довжиною хвилі випромінювання, що має місце в системах зі схрещеними полями [6].

Схематичний вигляд простору взаємодії динамічної системи, яку тут розглядаємо, наведено на рис. 1.

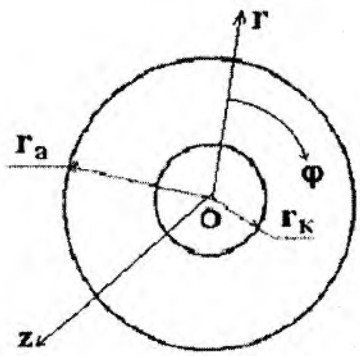


Рис. 1

При врахуванні дисипації в системах зі схрещеними полями, яку обумовлено випромінюванням електронів через їх прискорений рух, рівняння руху заряджених частинок в циліндричних координатах (r, φ, z) матимуть вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 r}{dt^2} - \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 r + \alpha\dfrac{dr}{dt} = \eta\dfrac{\partial U}{\partial r} - \eta r\dfrac{d\varphi}{dt}B_z \\ r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} = \eta\dfrac{dr}{dt}B_z \end{cases}$$

з початковими умовами

$$r(0) = r_k; \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = 0;$$

$$\varphi(0) = \varphi_0; \quad \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

де $\alpha = \dfrac{e\eta\omega_H}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$ – коефіцієнт дисипації; $\eta = \dfrac{e}{m}$; m – маса електрона; $U = \dfrac{U_a}{\ln s_a}\ln\dfrac{r}{r_k}$; $s_a = \dfrac{r_a}{r_k}$;

U_a – анодна напруга; B_z – магнітна індукція.

З метою узагальнення рівняння руху перейдемо до безрозмірного радіусу $s = \dfrac{r}{r_k}$, тоді рівняння руху та початкові умови матимуть вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2} - \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 s + \alpha\dfrac{ds}{dt} = \eta\dfrac{\partial U}{\partial s} - \omega_H s\dfrac{d\varphi}{dt} \\ s\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_H\dfrac{ds}{dt} \end{cases},$$

$$s(0) = 1; \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = 0;$$

$$\varphi(0) = \varphi_0; \quad \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

де $\omega_H = \eta B_z$.

З другого рівняння цієї системи отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_H}{2}\left(1 - \frac{1}{s^2}\right).$$

Підставляючи отриманий вираз у перше рівняння, отримаємо

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha\frac{ds}{dt} = \frac{\eta}{r_k^2}\frac{U_a}{\ln s_a}\frac{1}{s} - \frac{\omega_H^2}{4}s + \frac{\omega_H^2}{4}\frac{1}{s^3}.$$

Позначимо $a = \dfrac{\omega_H}{2}$, $b = \dfrac{\eta}{r_k^2}\dfrac{U_a}{\ln s_a}$, тоді з отриманого рівняння остаточно матимемо рівняння динамічної системи

$$\begin{aligned} &\frac{d^2s}{d\tau^2} + \alpha\frac{ds}{d\tau} + a^2 s = \frac{b}{s} + \frac{a^2}{s^3}, \\ &\frac{d\varphi}{d\tau} = a\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Проаналізуємо стійкість динамічної системи, яку описано рівняннями (1).

Для аналізу стійкості нелінійної динамічної (1) запишемо перше рівняння у вигляді системи рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = \xi \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -\alpha\xi - a^2 s + \dfrac{b}{s} + \dfrac{a^2}{s^3} \end{cases}. \tag{2}$$

Точкою рівноваги системи (2) буде

$$\xi_0 = 0, \; s_0 = \frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}}{\sqrt{2}a},$$

тобто така ж як і в динамічній системі „магнетронний діод” без дисипації.

Щоб з'ясувати поведінку системи (2) в околі точки рівноваги необхідно визначити її тип, для чого побудуємо характеристичну матрицю

$$[A] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\left(a^2 + \dfrac{b}{s_0^2} + \dfrac{3a^2}{s_0^4}\right) & -\lambda - \alpha \end{bmatrix}.$$

Тоді характеристичне рівняння матиме вигляд $\det[A] = 0$, звідки

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + a^2 + \frac{b}{s_0^2} + \frac{3a^2}{s_0^4} = 0.$$

Корені цього рівняння будуть

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \left(a^2 + \frac{b}{s_0^2} + \frac{3a^2}{s_0^4}\right)}.$$

Таким чином, тип точки рівноваги залежать від знаку виразу під радикалом.

За умови

$$\alpha^2 > 4\left(a^2 + \frac{b}{s_0^2} + \frac{3a^2}{s_0^4}\right) \tag{3}$$

точкою рівноваги є стійкий вузол, фазовий портрет такого стану динамічної системи „магнетронний діод з дисипацією” зображено на рис. 2, *а*.

За умови

$$\alpha^2 < 4\left(a^2 + \frac{b}{s_0^2} + \frac{3a^2}{s_0^4}\right) \tag{4}$$

точкою рівноваги є стійкий фокус, фазовий портрет такого стану динамічної системи „магнетронний діод з дисипацією” зображено на рис. 2, *б*.

Для динамічної системи (1) „магнетронний діод з дисипацією” за аналогією з динамічною системою „магнетронний діод” маємо таку траєкторію руху у радіальному напрямку

$$s(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(A_0 + A_1\cos\omega t + A_2\cos 3\omega t - s_0\right) + s_0, \tag{5}$$

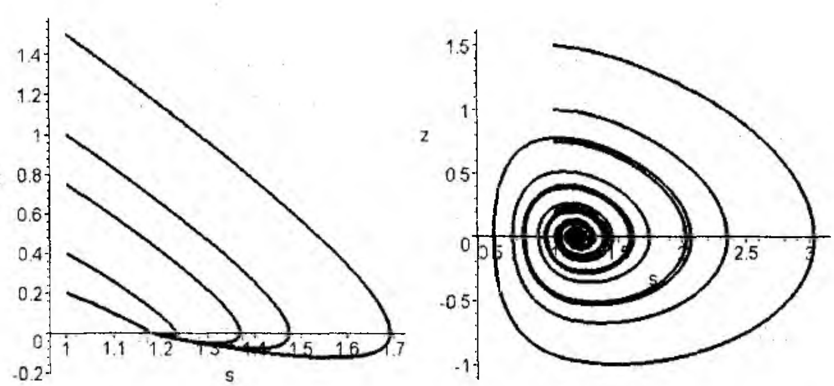
що графічно зображено на рис. 3.

На рис. 3, *а* наведено траєкторію зарядженої частинки у радіальному напрямку за коефіцієнта дисипації, який відповідає умові (3).

На рис. 3, *б* наведено траєкторію зарядженої частинки у радіальному напрямку за коефіцієнта дисипації, який відповідає умові (4).

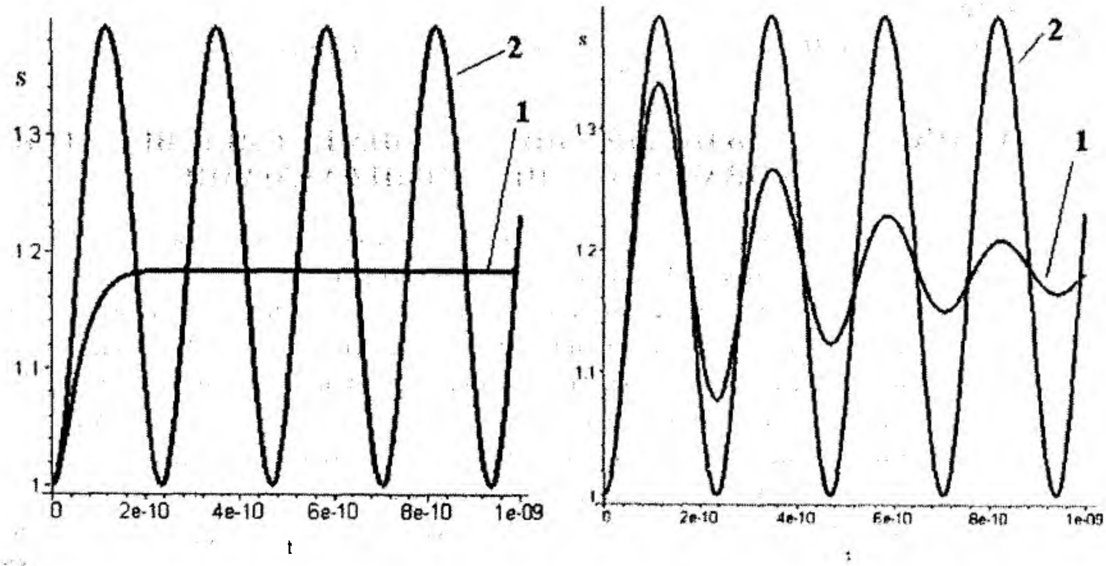
Для порівняння цих траєкторій руху з траєкторіями руху динамічної системи „магнетронний діод” [1] на рис. 3, *а*, *б* наведено траєкторію руху цієї динамічної системи, яку зображено у вигляді періодичної функції.

Як випливає з (5) та рис. 3, заряджена частинка в динамічній системі „магнетронний діод з дисипацією” прямує до радіусу s_0. Таким чином, рух зарядженої частинки в такій системі перетворюється на обертальний з радіусом обертання $s_0 = \frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}}{\sqrt{2}a}$ і частотою обертання $\omega = \frac{\omega_H}{2}\left(1 - \frac{1}{s_0^2}\right)$.



а *б*

Рис. 2



а *б*

Рис. 3

Порівняння траєкторії руху заряджених частинок у динамічній системі „магнетронний діод з дисипацією" (1) та „магнетронний діод" (2) наведено на рис. 3.

На рис. 3,*а* наведено криву періодичного руху для динамічної системи „магнетронний діод" і криву, яка відповідає сильній дисипації [7] динамічній системі „магнетронний діод з дисипацією". З цього рисунку випливає, що за наявності такого виду динамічної системи, не розпочинаючи періодичного руху, заряджена частинка набуває орбітального руху навкруг катоду з радіусом s_0 та частотою обертання ω, який не є періодичним по жодній координаті.

На рис. 3, *б* як і на рис. 3, *а* наведено криву періодичного руху для динамічної системи „магнетронний діод" і криву коливань, які затухають і відповідає коливальному рухові у радіальному напрямку в динамічній системі „магнетронний діод з дисипацією".

Така поведінка динамічної системи „магнетронний діод з дисипацією" описується виразом (5) і, як випливає з цього виразу, за $t \to \infty$ поведінка руху вздовж радіальної координати поступово переходячи в обертальний рух, як це мало місце у попередньому випадку.

Таким чином рух зарядженої частинки в динамічній системі „магнетронний діод з дисипацією" стає або обертальним за сильної дисипації з радіусом обертання s_0 та круговою швидкістю обертання ω, або має вигляд коливань, що затухають, на відміну від періодичного руху в динамічній системі „магнетронний діод". В подальшому доцільно дослідити поведінку нелінійної динамічної системи „магнетрон".

Список літератури. 1. *Воловенко М.В., Нікітенко О.М.* Стійкість та періодичний рух нелінійної динамічної системи „магнетронний діод" // Радіотехніка Всеукраїнський міжвідомчий науково–технічний збірник, вип. 150, 2007, С. 60 – 63 2. *Шимони К.* Физическая электроника. М.: Энергия, 1977. 608 с. 3. *Вайнштейн Л.А.. Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 400 с. 4. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. 8-я школа-семинар инженеров. Саратов: Саратов. ун-тет, 1989. 206 с. 5. *Нікітенко О.М., Воловенко М.В.* Рух заряджених частинок у системах зі схрещеними полями за наявності дисипації // Теоретична радіотехніка / Львів. нац. ун-тет ім. І. Франка. 2002. Вип. 56. С. 47 – 53. 6. *Мчедлова Е.С., Трубецков Д.И.* Особенности излучения в цепочках связаных объемов, содержащих электроны-осцилляторы // ЖТФ. 1994. Т. 64. № 10. С. 158 – 167. 7. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем : Пер. с нем. М.: Мир, 1982. 304 с.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Надійшла до редколегії 29.10.2009