УДК 621.391

Е. М. ЗАНИМОНСКИЙ, А. Ф. КОСТИН, В. Д. НАГОРНЫЙ

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Преобразование Гильберта является одним из важных интегральных преобразований. Оно широко используется при моделировании фильтров, изучении аналитических сигналов, синтезе систем с одной боковой полосой и во многих других задачах. При анализе дискретных данных применяют, как правило, дискретное преобразование Гильберта (ДПГ) [1]:

$$\text{ДПГ}\,(b\,(p)) = g\,(k) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k_{\text{чет}}} \dfrac{b\,(p)}{k-p}, & p \text{ — нечетный} \\ \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k_{\text{неч}}} \dfrac{b\,(p)}{k-p}, & p \text{ — четный} \end{cases} \quad (1)$$

Несмотря на некоторую разреженность матрицы ДПГ, для его вычисления все же требуется $O(n^2)$ операций, что существенно ограничивает применение данного преобразования к векторам большой размерности в связи с малой оперативностью счета и его высокой стоимостью. Для исключения же нежелательных краевых эффектов и других явлений, связанных с конечностью выборки, как раз необходимо обрабатывать входной вектор достаточно большой длины. Поэтому желательно иметь алгоритм, который бы аналогично быстрому преобразованию Фурье выполнял преобразование Гильберта с затратой $O(n \log_2 n)$ операций.

Запись ДПГ в виде (1) традиционна, однако в дальнейшем она будет несколько неудобна. Воспользуемся для упрощения записи теоретико-числовой операцией взятия модуля числа. Эта операция, как известно, отображает кольцо целых чисел в кольцо вычетов по заданному модулю. В результате выполнения $a = b \bmod c$ a получит значение остатка от деления b на c. Таким образом, выражение $(k-p) \bmod 2$ будет равно нулю, если оба k и p одновременно либо четны, либо нечетны, и будет равно единице, если у k и p разная четность, т. е. в случаях, предусмотренных (1). Теперь ДПГ можно записать как

$$g(k) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{n} \frac{b(p)}{k-p} (k-p) \bmod 2.$$

Матрица этого преобразования

$$A_{k,p} = \left\| \frac{2}{\pi} \frac{(k-p) \bmod 2}{k-p} \right\|$$

имеет теплицеву структуру, т. е. у нее равны элементы диагоналей, параллельных главной:

$$(a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}) \leftrightarrow (i_1 - j_1 = i_2 - j_2).$$

Так как теплицева матрица полностью задается первым столбцом и первой строкой, то ее элементы часто обозначаются одним индексом, равным разности индексов строки и столбца $a_{ij} = a_{i-j}$.

Опираясь на свойства теплицевых матриц, подробно описанные в работе [2], можно построить алгоритм ДПГ с числом операций $O(n \log_2 n)$.

Всякая теплицева матрица может быть представлена в виде суммы циркулянта и косоциркулянта $A = L + M$. Последние представляют собой специальные типы матриц. У циркулянтной матрицы каждая последующая строка получается при циклическом сдвиге предыдущей вправо на одну позицию, у косоциркулянтной — вытесняемый элемент при переносе инвертируется: $l_i = l_{n-i}$; $m_i = -m_{n-i}$. Первые столбцы циркулянта и косоциркулянта (которыми они полностью задаются) определяются соответственно

$$x_i = \frac{a_i + a_{-n+i}}{2}; \quad y_i = \frac{a_i - a_{-n+i}}{2}.$$

В нашем случае будет иметь

$$x_i = \frac{(i-n)\, i \bmod 2 + i\,(i-n) \bmod 2}{\pi i\,(i-n)};$$

$$y_i = \frac{(i-n)\, i \bmod 2 - i\,(i-n) \bmod 2}{\pi i\,(i-n)},$$

Циркулянт и косоциркулянт, в свою очередь, могут быть представлены с помощью матрицы преобразования Фурье

$$L = n^{-1}F_n^* \operatorname{diag}(F_n x)F_n; \quad M = n^{-1}D^{-1} F_n^* \operatorname{diag}(F_n D_y) F_n D,$$

где x, y — первые столбцы матриц L и M; F_n — матрица преобразования Фурье,

$$F_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_n^{0\cdot 0} & \varepsilon_n^{0\cdot 1} & \ldots & \varepsilon_n^{0\cdot(n-1)} \\ \varepsilon_n^{1\cdot 0} & \varepsilon_n^{1\cdot 1} & \ldots & \varepsilon_n^{(1\cdot(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_n^{(n-1)\cdot 0} & \varepsilon_n^{(n-1)\cdot 1} & \ldots & \varepsilon_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_n = \exp\left\{i\frac{2\pi}{n}\right\},$$

D — матрица, имеющая вид

$$D = \begin{pmatrix} \psi_0 & & & 0 \\ & \psi^1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \psi^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \psi^n = -1.$$

Соответствующие теоремы доказаны в работе [2].

Таким образом, ДПГ можно свести к выполнению шести быстрых преобразований Фурье (БПФ) (F_n^* отличается от F_n только расположением столбцов) и нескольким операциям умножения векторов, число действий в которых в любом случае не превысит двух БПФ.

В таблице представлены оценки времени выполнения преобразования Гильберта на ЭВМ «Электроника-60» по обычному и быстрому алгоритмам. Указанный быстрый алгоритм эффективен уже при размерности вектора данных порядка нескольких сот.

Длина входного вектора	Время счета, с	
	Обычный алгоритм	Быстрый алгоритм
32	2	16
64	7	25
128	26	34
256	96	66
512	382	141

Список литературы: 1. *Трахман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М., 1972. 352 с. 2. *Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е.,* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М., 1987. 320 с.

Поступила в редколлегию 01.02.89