

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії  
(повна назва)

Кафедра Фізичних основ електронної техніки  
(повна назва)

## КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)  
МОДЕЛЬ ГРАДІЄНТНОЇ ЛІНЗИ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ  
ЛАЗЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ  
(тема)

Виконав:  
студент 2 курсу, групи ЛОЕТм-21-1  
Томах Є. О.  
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 152 Метрологія та інформаційно-  
вимірювальна техніка  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма «Лазерна і оптоелектронна  
техніка»  
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. каф. ФОЕТ Одаренко Є. М.  
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис)

Гнатенко О. С.  
(прізвище, ініціали)

2022 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет \_\_\_\_\_ Електронної та біомедичної інженерії \_\_\_\_\_  
(повна назва)  
Кафедра \_\_\_\_\_ Фізичних основ електронної техніки \_\_\_\_\_  
(повна назва)  
Рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ другий (магістерський) \_\_\_\_\_  
Спеціальність \_\_\_\_\_ 152 Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка \_\_\_\_\_  
(код і повна назва)  
Тип програми \_\_\_\_\_ освітньо-професійна \_\_\_\_\_  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)  
Освітня програма \_\_\_\_\_ «Лазерна і оптоелектронна техніка» \_\_\_\_\_  
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:  
Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис)  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові \_\_\_\_\_ Томаху Євгенію Олександровичу \_\_\_\_\_  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Модель градієнтної лінзи для вимірювання параметрів лазерного випромінювання

затверджена наказом університету від « 04 » листопада 2022 р. № 1445 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 26 грудня 2022 р.

3. Вихідні дані до роботи закономірності побудови градієнтних оптичних пристроїв; властивості градієнтних лінз; просторовий розподіл показника заломлення в градієнтних лінзах; фізичні властивості гаусових хвильових пучків пакет комп'ютерного моделювання COMSOL Multiphysics

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі 1 Конформне перетворення. 2 Лінзи зі сферичним градієнтним індексом тип А 3 Різноманітні градієнтні лінзи 4 Проектування радіальних градієнтних індексних профілів матеріали 5 Параметри для виготовлення градієнтна індексу 6 Максимальна різниця індексів 8 Середовище моделювання COMSOL Multiphysics

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій  
Демонстраційний матеріал – 11 шт.

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Інформаційно-тематичний пошук та огляд літературних джерел по тематиці що стосується градієнтної оптики	01.09.22–30.09.22	Виконано
2	Ознайомлення із засобами реалізації градієнтних лінз	01.10.22–23.10.22	Виконано
3	Створення розрахункового проекту для дослідження просторового розподілу поля хвильового пучка, який проходить через градієнтну лінзу. Виконання чисельних розрахунків характеристик в пакеті COMSOL Multiphysics	24.10.22–4.11.22	Виконано
4	Оформлення пояснювальної записки	05.11.22–25.11.22	Виконано
5	Оформлення демонстраційного матеріалу	26.11.22–01.12.22	Виконано
6	Проходження нормоконтролю і отримання рецензії	02.12.22–23.12.22	Виконано
7	Проходження перевірки на плагіат	24.12.22–25.12.22	Виконано
8	Підготовка та захист кваліфікаційної роботи	26.12.22–27.12.22	

Дата видачі завдання 01 вересня 2022 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. каф. ФОЕТ Одаренко Є. М.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка кваліфікаційної роботи: 52 с., 31 рис., 1 табл., 17 джерел.

ГРАДІЄНТНА ОПТИКА, СИМУЛЯЦІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ЯВИЩ, КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ЛІНЗА ІТОНА, ЛІНЗА “РИБ’ЯЧЕ ОКО” МАКСВЕЛА, COMSOL MULTIPHYSICS.

Об’єкт дослідження – градієнтні лінзи з різним просторовим розподілом показника заломлення.

Мета роботи – дослідження фізичних властивостей градієнтних лінз на основі розрахунку просторового розподілу поля пучка що проходить через лінзу.

Методи дослідження – аналітичні та чисельні з використанням методу скінченних елементів.

Розглянуто проходження гаусового хвильового пучка через градієнтну лінзу з симетричним та несиметричним просторовими розподілами показника заломлення. Отримані просторові розподіли поля хвильового пучка для різних варіантів градієнтних лінз. Показано незвичайні закономірності перетворення поля хвильового пучка при проходженні через градієнтні лінзи.

## ABSTRACT

Explanatory note of qualifying work: 52 pp., 31 Fig., 1 Table, ., 17 sources.

GRADIENT OPTICS, SIMULATION OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA, COMPUTER SIMULATION, EATON LENS, MAXWELL FISH EYE LENS, COMSOL MULTIPHYSICS.

The object of the research is gradient lenses with different spatial distribution of the refractive index.

The purpose of the work is to study the physical properties of gradient lenses based on the calculation of the spatial distribution of the beam field passing through the lens.

Research methods are analytical and numerical using the finite element method.

The passage of a Gaussian wave beam through a gradient lens with symmetric and asymmetric spatial distributions of the refractive index is considered. Obtained spatial distributions of the wave beam field for different variants of gradient lenses. Unusual regularities of the field transformation of a wave beam when passing through gradient lenses are shown.

## ЗМІСТ

Вступ .....	7
1 Дизайн сферичних градієнтних індексних .....	8
1.1 Конформне перетворення.....	8
1.2 Лінзи зі сферичним градієнтним індексом тип А.....	10
1.3 Різноманітні градієнтні лінзи.....	18
1.4 Проектування радіальних градієнтних індексних профілів.....	22
1.5 Параметри для виготовлення градієнтна індексу .....	23
1.6 Максимальна різниця індексів.....	26
2 Моделювання градієнтної лінзи .....	27
2.1 Пакет моделювання COMSOL multiphysics .....	27
2.2 Результати чисельних розрахунків .....	27
2.3 Побудова моделі .....	39
Висновки.....	50
Перелік джерел посилання .....	51
Додаток А Демонстраційний матеріал.....	53

## ВСТУП

У звичайній оптичній системі показник заломлення кожного оптичного компонента вважається однорідним. У конструкції таких систем кривизна, товщина та показник заломлення кожного компонента змінюються незалежно для оптимізації продуктивності системи лінз. З іншого боку, можна виготовити лінзові елементи, показник заломлення яких змінюється безперервно як функція просторової координати. Такі матеріали, які часто називають матеріалами GRadient INdex (GRIN), мають різноманітні переваги для використання як для фокусування, так і для отримання зображень.

Основні застосування матеріалів з індексом градієнта, що використовуються сьогодні, базуються лише на радіальному типі градієнта. У цьому типі проблеми виготовлення великих геометричних лінз були обмежуючою рисою у впровадженні оптики градієнтного індексу у фотографічних системах протягом багатьох років. В даний час існує безліч технологій, які дозволяють виготовляти багато різних скляних матеріалів.

В даній роботі розглянуто два різновиди градієнтних лінз з різним просторовим розподілом показника заломлення. Проведені чисельні розрахунки поля гаусового пучка який проходить через градієнтну лінзу. Виявлені закономірності впливу параметрів градієнтної лінзи на фокусування хвильового пучка.

# 1 ДИЗАЙН СФЕРИЧНИХ ГРАДІЄНТНИХ ІНДЕКСНИХ ЛІНЗ

## 1.1 Конформне перетворення

Сферичні симетричні лінзи, виготовлені з ізотропного градієнтного індексного середовища, завжди привертали увагу оптичних дизайнерів. Сьогодні новий інтерес до цих лінз виник завдяки аналізу ідеального зображення в хвильовій оптиці. Нещодавно Леонхардт довів властивості надроздільної здатності об'єктива Maxwell Fish Eye (MFE). Це означає, що MFE може створювати зображення з деталями нижче класичної межі дифракції Аббе [1]. На відміну від негативного показника заломлення ідеальний пристрій візуалізації [2], MFE – це лінза GRIN, виготовлена з матеріалів із позитивним ізотропним розподілом показника заломлення.

Відома процедура проектування, розроблену Люнбургом [3], вводячи поняття кута польоту, з якого лінійним інтегралом можна отримати функцію, пов'язану з розподілом показника заломлення перетворення. Ця трансформація дозволяє нам отримувати старі та нові рішення для лінз GRIN лише з лінійних комбінацій відомих лінз. Таким чином ми побачимо, наприклад, що лінза Ітона лише «вдвічі» лінза Люнбурга або що MFE – це лінза Ітона «плюс» однорідна медіа-лінза.

Окрім аналізу класичних лінз GRIN (ми будемо називати їх лінзами GRIN типу А), які визначаються за принципом Абеля інтегрального рівняння, ми представляємо чисельний метод для інших лінз GRIN, визначених інтегральним рівнянням Абеля з фіксованим (ми будемо називати їх лінзами типу В GRIN) [4]. У той час як у випадку з лінзами типу А GRIN пропускають лише промені через усі заломлюючі шари лінзи є інваріантними з нульовим перекосом, у випадку лінз типу В GRIN це відбувається з усіма променями. Це фундаментальна різниця між двома типами лінз GRIN. Тип В GRIN лінз не можна вирішити за допомогою класичного підходу Люнебурга.

Завдяки сферичній симетрії лінз GRIN будь-яка траєкторія променя міститься в площині, що проходить через центр симетрії. Це означає, що ми

можемо обмежити наше обговорення траєкторіями променів у площині, визначеній полярними координатами  $(\rho, \theta)$ .

Щоб спростити наступні пояснення, використаємо конформне перетворення від площини  $(\rho, \theta)$  до площина  $(x, y)$ :

$$x = \ln(\rho) \quad y = \theta. \quad (1.1)$$

Це конформне перетворення, визначене комплексною аналітичною функцією натурального логарифма [3]. Оскільки перетворення є конформним, траєкторії променів у площині  $(\rho, \theta)$  з розподілом показника заломлення  $m(\rho)$  трансформується в криві площини  $(x, y)$ , які також є променями, якщо ця площина має розподіл показника заломлення, заданий як:

$$n(x) = \rho m(\rho). \quad (1.2)$$

Коло  $\rho = 1$  перетворюється на пряму  $x = 0$ . Точки всередині кола  $\rho < 1$  перетворюються на половину площину  $x < 0$ , а точки  $\rho > 1$  перетворюються в півплощину  $x > 0$ .

Наприклад, за допомогою цього перетворення розподіл Максвелла «Риб'яче око»  $m_{\text{MFE}}(\rho) = 2/(1 + \rho^2)$  перетворюється на ідеальне лінійний розподіл формування зображення  $n_c(x) = \text{cosh}(x)$  [3].

Наступна задача проектування: обчислити розподіл показника заломлення  $m(\rho)$  лінзи або в діапазоні  $0 < \rho < 1$ , або в діапазоні  $\rho > 1$ , так що промені, що падають під час польоту лінзи під кутом всередині нього задано функцією  $\theta(h)$ , де  $h$  є косим інваріантом променя. На рис. 1.1 показано визначення кута польоту для двох різних випадків лінз з індексом градієнта, коли індекс градієнта знаходиться в  $\rho < 1$  (ліворуч), і коли він знаходиться в  $\rho > 1$  (праворуч) – за межами одиничного кола. Лінзи з градієнтним індексом  $\rho < 1$  зазвичай належать до типу А, тоді як в іншому випадку ми можемо знайти як тип А, так і тип В.

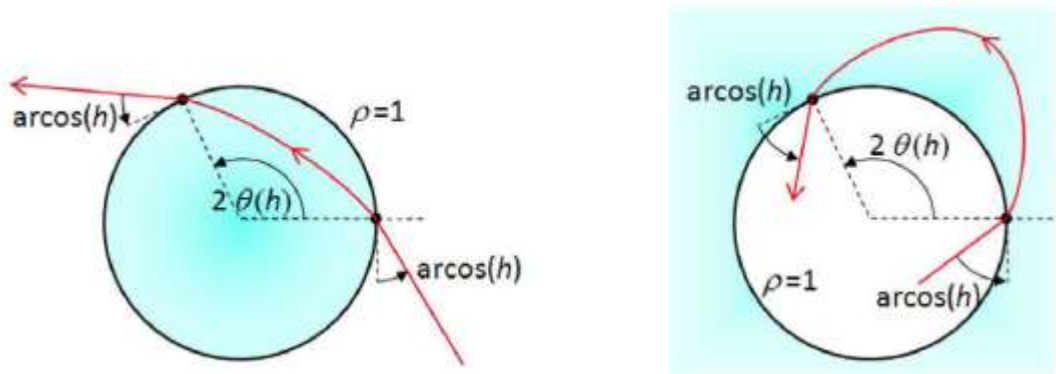


Рисунок 1.1 – Визначення кута польоту  $\theta(h)$

Білі медіа має показник заломлення 1. На рис. 1.2 показані ті самі лінзи, що і на рис. 1.1, представлені в лінійному перетвореному просторі, визначеному рівнянням. (1.1). Тепер, довжина польоту визначається функцією  $y(q)$ , де  $p, q$  є напрямними косинусами, як показано на рис. 1.2.

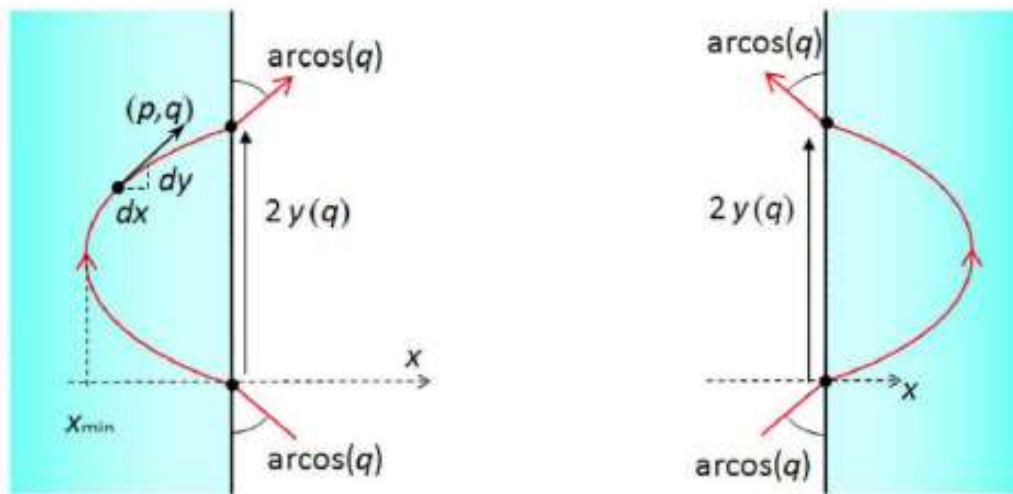


Рисунок 1.2 – Визначення довжини польоту  $y(q)$  у лінійних перетворених просторах

## 1.2 Лінзи зі сферичним градієнтним індексом тип А

Розглянуто траєкторію променя з рис. 1.2. Елементарний приріст координати  $y$  задається як:

$$dy = \frac{q}{p(x)} dx = \text{sign}(n) \frac{q}{\sqrt{n^2(x)-q^2}} dx. \quad (1.3)$$

Розподіл показника заломлення такий, що  $d[n^2(x)]/dx \geq 0$ , для  $x < 0$ , і що  $x$  координати променів, що рухаються, знайдіть мінімальну  $x_{min}$ , за яку вони не можуть пройти. Інтегруючи приріст уздовж шлях променя всередині лінзи (для  $x < 0$ ) отримуємо:

$$\int_0^{y(q)} dy = \int_{x_{min}(q)}^0 \text{sign}(n) \frac{q}{\sqrt{n^2(x)-q^2}} dx, \quad (1.4)$$

$$y(q) = q \int_{x_{min}(q)}^0 \frac{\text{sign}(n)}{\sqrt{n^2(x)-q^2}} dx.$$

Звернемо увагу, що  $n^2(x_{min})=q^2$ . Визначимо змінні  $s$ ,  $t$  і  $\chi$  як:

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 - t, & \text{sign}(n)dx &= d\chi = \dot{\chi} dt \\ q^2 &= 1 - s. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Зауважимо, що коли  $\text{sign}(n) = 1$  всюди (позитивний показник заломлення всюди), тоді  $\chi = x$  плюс адитивна константа. Коли є область з негативним показником заломлення, тоді  $d\chi = -dx$ . Ми нормалізуємо показник заломлення розподіл до того, що відповідає  $x=0$ ,  $n(0)$  або, точніше,  $n(0^-)$ , визначеному як:

$$n(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{x < 0} n(x). \quad (1.6)$$

Тоді можна стверджувати, що коли  $x \rightarrow 0^-$ ,  $n^2 \rightarrow 1$  і тому  $t \rightarrow 0$ , а інтеграл рівняння (1.4) дорівнює:

$$f(s) = \int_0^s \frac{\dot{\chi}}{\sqrt{s-t}} dt, \quad (1.7)$$

де

$$f(s) = -\frac{y(\sqrt{1-s})}{\sqrt{1-s}}. \quad (1.8)$$

Рівняння (1.7) є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, де  $\chi$  є невідомою функцією та  $y(q)=y((\backslash-s)^{1/2})$  відомий. Це інтегральне рівняння зазвичай називають інтегральним рівнянням Абеля. Люнебург першим помітив, що цей видзадачі можна сформулювати як інтегральне рівняння Абеля. Інтеграл у правій частині рівняння (1.7) пропорційнадробовий інтегральний оператор порядку 1/2 (зазначається  $I^{1/2}$ ) застосована до функції  $\chi$ . Цей оператор визначається як (дробовий інтеграл Римана, який є одним із багатьох можливих визначень дробового інтеграла) [5]:

$$I^{1/2}[x(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (1.9)$$

Дробові інтегральні оператори  $I^\alpha$  виконувати напівгрупову властивість  $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ . Це означає, наприклад, двічі зверненнядробовий інтегральний оператор  $I^{1/2}$  до функції  $x(t)$  ми отримуємо  $I[x(t)]$ , що є просто інтегралом від  $x(t)$ :

$$I^{1/2} \left[ I^{1/2}[x(t)] \right] = I[x(t)] = \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Дробові похідні визначаються так само, як і дробовий інтеграл. Єдиного визначення немає. Капуто дробова похідна найбільш адаптована до нашої задачі. Використовуючи визначення Капуто, ми можемо записати рівняння (1.7) як:

$$\frac{f(s)}{\sqrt{\pi}} = D^{1/2}(\chi(s)). \quad (1.11)$$

Рівняння (1.10) надає ключ до розв'язання інтеграла Абеля. Знову застосовуючи дробовий інтегральний оператор порядку  $1/2$ ,  $I^{1/2}$  обидві сторони рівняння (1.7) отримуємо:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} ds = \int_0^t \dot{\chi} dt = \chi(t) - \chi(0). \quad (1.12)$$

Встановлено, що  $\chi(0) = 0$ . Потім

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} ds = -\frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{y(\sqrt{1-s})}{\sqrt{1-s}\sqrt{t-s}} ds, \quad (1.13)$$

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\sqrt{1-t}} \frac{y(q)}{\sqrt{t-1+q^2}} dq, \quad (1.14)$$

$$\chi = -\frac{2}{\pi} \int_{|n|}^1 \frac{y(q)}{\sqrt{q^2-n^2}} dq. \quad (1.15)$$

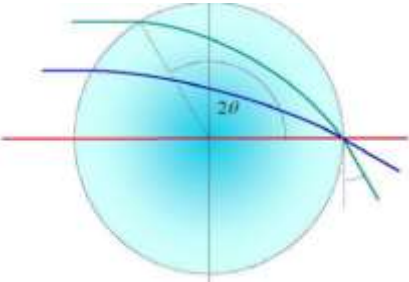
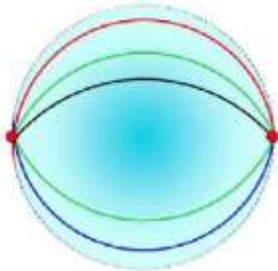
Припускаючи, що ми можемо оцінити рівняння (1.15), тоді ми можемо побудувати графік залежності  $\chi$  від  $n^2$ . Оскільки ми встановили  $\chi(t=0)=0$ , тоді  $\chi(n^2 = 1)=0$ . Ми припустили, що  $n^2(x)$  є неспадною функцією в області  $x < 0$ . Ми також можемо побудувати графік залежності  $\chi$  від  $n$ , призначивши а негативний показник заломлення, коли  $dx/d(n^2) < 0$ . Оскільки  $d_\chi = dx$ , коли показник заломлення в точці  $x$  додатний і  $d_\chi = -dx$  в у протилежному випадку тепер ми можемо побудувати графік залежності  $\chi$  від  $x$ , і нарешті, побудувати графік  $n(x)$ . Отже, розрахунок розподілу показника заломлення для об'єктива GRIN виконується за такими кроками.

1. Починаємо з  $\theta = f_1(h)$ . Звернемо увагу, що та сама функція з різними змінними є вхідними даними для лінійної задачі:  $y = f_1(q)$  Ми припускаємо, що  $n^2(x)$  є неспадною функцією в області  $x < 0$ , тобто  $|n(x)| \leq n(0^-)$ , яка має значення 1 за визначенням. Тоді не існує променя з  $|q| > 1$ , який міг би увійти в півплощину  $x < 0$ . Отже, функція  $y = f_1(q)$  визначена лише в діапазоні  $|q| \leq 1$ . Крім того, функція  $y = f_1(q)$  має бути непарною ( $f_1(-q) = -f_1(q)$ ), тому нам потрібно знати його лише в діапазоні  $0 \leq q \leq 1$ .

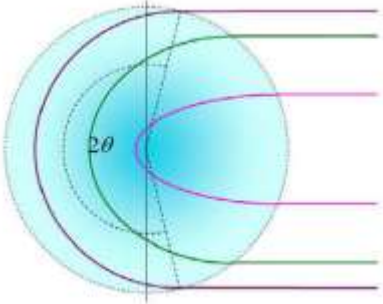
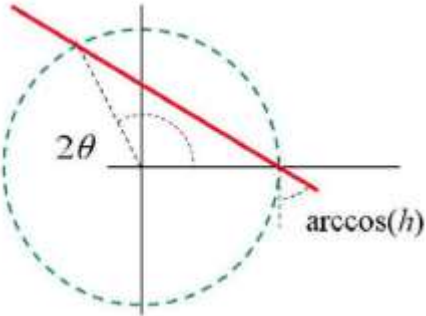
2. Обчислюємо  $\chi = f_2(n^2)$  з рівнянням (1.15).
3. Обчислюємо  $\chi = f_3(n)$  шляхом присвоєння негативного показника заломлення, де похідна  $df_2/dn^2$  є негативним.
4. Обчислюємо  $\chi = f_4(x)$  з рівняннями  $d_\chi = dx$  (позитивне  $n$ ) і  $d_\chi = -dx$  (негативне  $n$ ) з контурною умовою  $\chi = 0$ , коли  $x = 0$ .
5. Обчислюємо  $n = n(x)$  з  $\chi = f_3(n)$  і  $\chi = f_4(x)$ .

Види градієнтних лінз зведені в табл. 1.1.

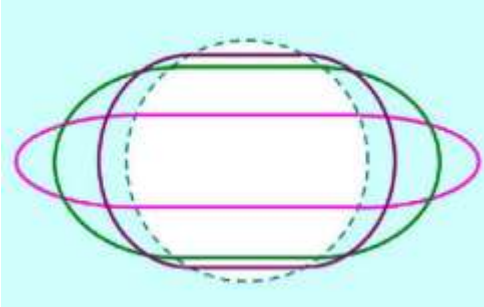
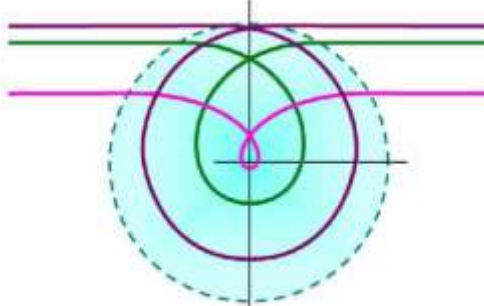
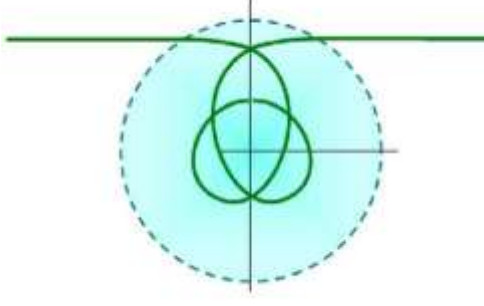
Таблиця 1.1 Види градієнтних лінз

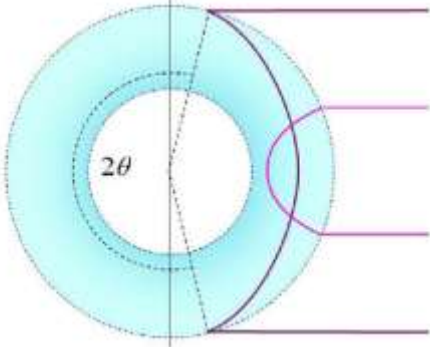
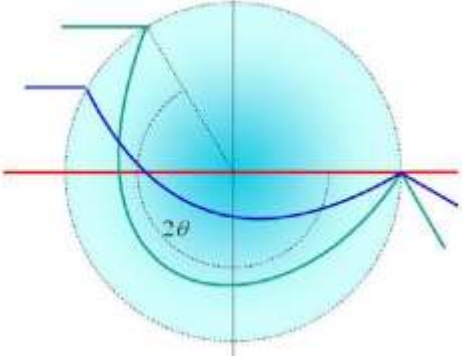
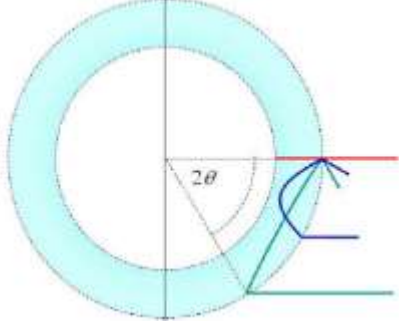
Лінза Люнберга ( $L_L$ )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\theta(h) = 1/2 (\pi - \arcsin(h))</math>, <math>y(q) = 1/2 (\pi - \arcsin(q))</math>.</li> <li>2. <math>\chi = 1/2 \ln[1 - (1 - n^2)^{1/2}]</math></li> <li>3. <math>d_\chi/d(n^2) &gt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді немає області негативного індексу.</li> <li>4. <math>\chi=x</math>.</li> <li>5. <math>n(x) = e^x(2 - e^{2x})^{1/2}</math>.</li> <li>6. <math>m(\rho) = (2 - \rho^2)^{1/2}</math>.</li> </ol>	
Лінза Максвелла	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\theta(h) = \pi/2</math>, і так <math>y(q) = \pi/2</math>.</li> <li>2. <math>\chi = \ln[1 - (1 - n^2)^{1/2}] - \ln(n) = -\text{ArgCh}(1/n)</math></li> <li>3. <math>d_\chi/d(n)^2 &gt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді немає області негативного індексу.</li> <li>4. <math>\chi=x</math>.</li> <li>5. <math>n(x) = 2/(e^{-x} + e^x)</math>.</li> <li>6. <math>m(\rho) = \frac{2}{1+\rho^2}</math>.</li> </ol>	

Продовження табл. 1.1

Лінза Ітона( $E_L$ )	<p>1. <math>\theta(h) = \pi - \arcsin(h)</math>, тоді <math>y(q) = \pi - \arcsin(q)</math>. Оскільки це вдвічі більше кута польоту лінзи Люнебурга, а дробове інтегральне перетворення є лінійним, відповідний <math>\chi=f_2(n^2)</math> повинно бути вдвічі більше, ніж у лінзи Люнебурга, тобто <math>E_L=2L_L</math>.</p> <p>2. <math>\chi = \ln\{1 - (1 - n^2)^{1/2}\}</math>.</p> <p>3. <math>\chi/d(n^2) &gt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді немає області негативного індексу</p> <p>4. <math>\chi = x</math>.</p> <p>5. <math>n(x) = (2e^x - e^{2x})^{1/2}</math>.</p> <p>6. <math>m(\rho)=(2/\rho - 1)^{1/2}</math>.</p>	
Гомогенне середовище (постійна індексу заломлення)	<p>1. <math>\theta(h) = \arccos(h)</math>, і так <math>y(q) = \arccos(q)</math>. Це також можна записати як: <math>y(q) = \pi/2 - \arcsin(q)</math>, тобто різниця кутів польоту в <math>E_L</math> і <math>M_{FE}</math>. Пишемо <math>H_M = E_L - M_{FE}</math>.</p> <p>2. <math>\chi = \ln \left[ 1 - (1 - n^2)^{1/2} \right] + \ln(n) - \ln \left[ 1 + (1 - n^2)^{1/2} \right] = 1/2 \ln(n^2)</math>.</p> <p>3. <math>d\chi/d(n^2) &gt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді від'ємний індекс області відсутній.</p> <p>4. <math>\chi = x</math>.</p> <p>5. <math>n(x) = e^x</math>.</p> <p>6. <math>(\rho) = 1</math>.</p>	

Продовження таблиці 1.1

М Лінза ( $M_L$ )	<p>1. Це лінза з градієнтним індексом <math>\rho &gt; 1</math>, кут польоту доповнює кут польоту Ітона, отже</p> $\theta(h) = \arcsin(h), \text{ тоді}$ $y(q) = \arcsin(q). M_L = 2(M_{FE} - L_L).$ <p>2. <math>\chi = \ln \left[ 1 + (1 - n^2)^{1/2} \right]</math></p> <p>3. <math>d\chi/d(n^2) &lt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>.      Тоді</p> <p>від'ємний індекс області відсутній</p> <p>4. <math>\chi = x</math>.</p> <p>5. <math>n(x) = (2e^x - e^{2x})^{1/2}</math>.</p> <p>6. <math>m(\rho) = (2/\rho - 1)^{1/2}</math> в <math>\rho &gt; 1</math>.</p>	
Невидима лінза ( $I_L$ )	<p>1. Промені залишають лінзу так, якби лінза була <math>H_M</math> але після обведення навколо центру лінзи. Тоді</p> $\chi = \ln(n) + 2 \ln \left[ 1 - (1 - n^2)^{1/2} \right] -$ $- 2 \ln(n) = 2 \ln \left[ 1 - (1 - n^2)^{1/2} \right] -$ $- \ln(n).$ <p>3. <math>d\chi/d(n^2) &gt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді</p> <p>від'ємний індекс області відсутній.</p> <p>4. <math>\chi = x</math>.</p> <p>5. <math>n(x) = e^x [1/(3u) - u]^2</math> з <math>u =</math>  <math>[-e^{-x} + (e^{-2x} + 1/27)^{1/2}]^{1/3}</math>.</p> <p>6. <math>m(\rho) = [1/(3u) - u]^2</math> з <math>u =</math>  <math>[-1\rho + (1/\rho^2 + 1/27)^{1/2}]^{1/3}</math>.</p>	
Невидима лінза з подвійною петлею ( $DI_L$ )	<p>1. Промені залишають лінзу так, якби лінза була <math>H_M</math> але двічі обвівши центр лінзи. Тоді <math>\theta(h) = \arccos(h) + 2\pi</math>, ітак:  <math>y(q) = \arccos(q) + 2\pi</math>.  Тоді <math>I_L = H_M + 4M_{FE}</math>.</p> <p>2. <math>\chi = \ln(n) - 4 \ln(n) + 4 \ln \left[ 1 - (1 - n^2)^{1/2} \right]</math>.</p> <p>3. <math>d\chi/d(n^2) &gt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>.      Тоді</p> <p>від'ємний індекс області відсутній.</p> <p>4. <math>\chi = x</math>.</p> <p>5. <math>n(x)</math> розв'язується як:  <math display="block">x = \ln \left[ 1 - (1 - n^2)^{1/2} \right]^4 - \ln(n^3).</math></p> <p>6. <math>m(\rho)</math> розв'язується з <math>m = (\rho t / (1 - (1 - \rho^2 t^2)^{1/2}))^4</math>.</p>	

Негативна лінза Ігона ( $N_{EL}$ )	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\theta(h) = -\arcsin(h)</math>, тоді <math>y(q) = -\arcsin(q)</math>. Це <math>N_{EL} = E_L - 2M_{FE}</math>.</li> <li><math>\chi - \chi(-1) = \ln[1 - (1 - n^2)^{1/2}] - 2[\ln[1 - (1 - n^2)^{1/2}] - \ln(n)] = -\ln[1 - (1 - n^2)^{1/2}] + 2\ln(n) = \ln[1 + (1 - n^2)^{1/2}]</math></li> <li><math>d\chi/d(n^2) &lt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді, область з від'ємним індексом: Встановимо <math>\chi(-1) = 0</math>.</li> <li><math>\chi = -x</math>.</li> <li><math>n(x) = -(2e^{-x} - e^{-2x})^{1/2}</math>.</li> <li><math>m(\rho) = -(2\rho - 1)^{1/2}/\rho^2</math>.</li> </ol>	
Негативна лінза Люнеберга ( $N_{LL}$ )	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\theta(h) = 1/2(\pi - \arcsin(h)) - \pi = -1/2(\pi + \arcsin(h))</math>, Тоді <math>y(q) = -1/2(\pi + \arcsin(q))</math>. Це <math>N_{LL} = L_L - 2M_{FE}</math>.</li> <li><math>\chi = 1/2 \ln[1 - (1 - n^2)^{1/2}] - 2[\ln[1 - (1 - n^2)^{1/2}]</math>.</li> <li><math>d\chi/d(n^2) &lt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді область з від'ємним індексом.</li> <li><math>\chi = -x</math>.</li> <li><math>n(x) = -(-e^{-4x}/2 - 3e^{-2x} + (e^{-2x} + e^{-4x}/2)(1 + 8e^{2x})^{1/2})^{1/2}</math>.</li> <li><math>m(\rho) = -(-\rho^{-2}/2 - 3 + (1 + \rho^{-2}/2)(1 + 8\rho^2)^{1/2})^{1/2}/\rho^2</math>.</li> </ol>	
Негативна лінза Люнеберга 2 ( $N_{LL2}$ )	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>N_{LL2} = 1/2 N_{EL}</math>, таким чином <math>\theta(h) = -1/2 \arcsin(h)</math> та <math>y(q) = -1/2 \arcsin(q)</math>.</li> <li><math>\chi = 1/2 \ln[1 + (1 - n^2)^{1/2}]</math></li> <li><math>d\chi/d(n^2) &lt; 0</math> для <math>n^2 &lt; 1</math>. Тоді область з від'ємним індексом.</li> <li><math>\chi = -x</math>.</li> <li><math>n(x) = -e^{-x}(2 - e^{-2x})^{1/2}</math>.</li> <li><math>m(\rho) = -(2 - \rho^{-2})^{1/2}/\rho^2</math>.</li> </ol>	

### 1.3 Різноманітні градієнтні лінзи

У звичайній оптичній системі показник заломлення кожного оптичного компонента вважається однорідним. При проектуванні таких систем, кривизна, товщина та показник заломлення кожного компонента різноманітні незалежно один від одного, щоб оптимізувати роботу системи лінз. З іншого боку, також можливо виготовлення елементів лінз із змінним показником заломлення безперервним способом як функція просторової координати. Такі матеріали, які часто називають GRadient INdex (GRIN), мають низку переваг для використання як для фокусування, так і для створення зображень.

Існує три типи градієнтів показника заломлення залежно від типу симетрії [6]. Першим є осьовий градієнт (a-GRIN), у якому Показник заломлення безперервно змінюється вздовж оптичної осі. Ці градієнти особливо корисні для заміни асферичних поверхонь у монохроматичних системах, наприклад в коліматорах для лазерних променів.

Другий тип градієнта – радіальний градієнт (r-GRIN). Індекс заломлення  $n$  в цьому випадку змінюється перпендикулярно і безперервно назовні від оптична вісь. Цей тип градієнтних лінз, які часто називають стрижневими лінзами GRIN коли діаметр малий, виявляє властивість, що світло поширюється паралельно до оптичної осі симетрії можна періодично фокусувати, якщо  $n$  змінюється як  $an$  відповідна функція його радіальної відстані від осі симетрії. Застосування матеріалів з градієнтним індексом, що використовуються сьогодні, базується лише на цьому типі градієнта. У цьому типі проблеми виготовлення лінз великої геометрії протягом багатьох років була обмежуючою рисою у впровадженні оптики градієнтного індексу у фотографічних системах. Зараз існує багато технік, які дозволяють виготовляти багато різних скляних матеріалів r-GRIN.

Третій тип – сферичний градієнт (s-GRIN), де показник заломлення  $n$  – симетрична щодо точки. Хоч і не було розроблено оптичного прикладу повної

сферичної форми, існує двовимірний масив мікролінз з розробленим напівсферичним градієнтним індексом для різних застосувань.

Сфери застосування матеріалів  $r$ -GRIN поділяються на дві основні області. В першу чергу призначені для фокусування. При цьому стрижневі лінзи GRIN малого діаметра з плоскою поверхнею в даний час використовуються для оптичних телекомунікацій, обробки сигналів [7], а також мікрооптичних пристроїв, таких як оптичний диск. Якщо профіль індексу градієнта вибрано правильно, шлях поширення світлового променя змінюється синусоїдально вздовж осі стрижня.

За допомогою таких лінз можна сфокусувати колімований світло або колімувати розбіжне світло, подібно опуклій лінзі. Таким чином, такі лінзи корисні для фокусування або колімації світла, що випромінюється від джерела вузького діаметра, такого як оптичне волокно та лазерний діод, для оптичного з'єднання джерела світла з оптичним волокном і для з'єднання двох волокон, як показано на рис. 1.3. Були запропоновані різні конструкції для таких стрижневих лінзових пристроїв GRIN, включаючи з'єднувачі, атенюатори, спрямовані зв'язки, перемикачі, ізолятори та мультиплексори з розділенням довжин хвиль [8].

Друге велике застосування стосується створення зображень. Ці програми поділяються на два розділи. Одним з них є найважливіше та комерційно успішне застосування лінз GRIN малого діаметра в копіювальних апаратах [9] і факсимільних апаратах. Одну лінзу зображення в копіювальних машинах замінено на дворядний або трирядний масив стержневих лінз GRIN довжиною 1 см і діаметром 1 мм.

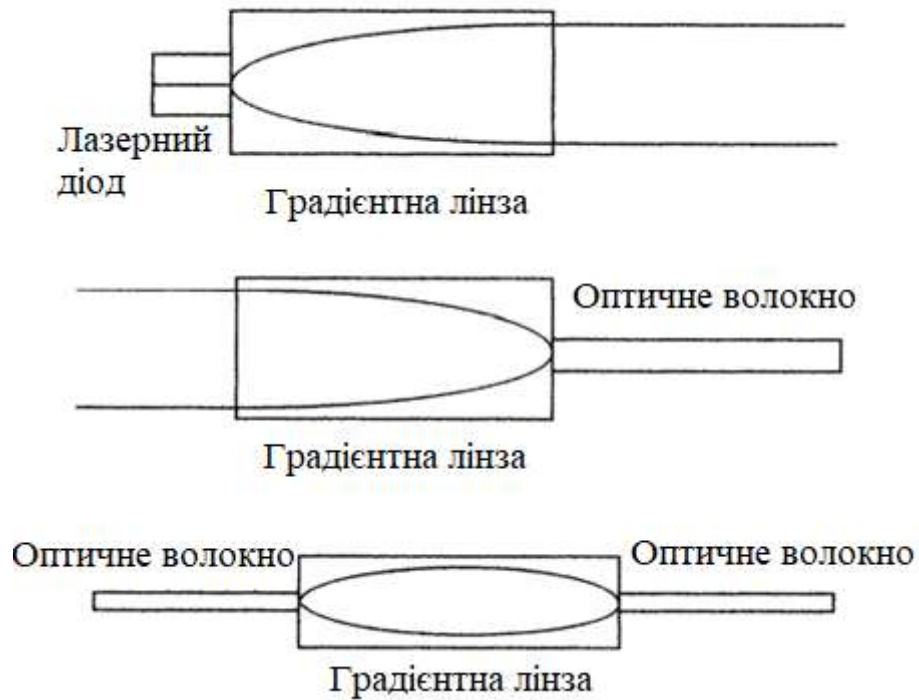


Рисунок 1.3 – Схематичний переріз муфти та коліматора з використанням стрижневих лінз GRIN з малим діаметром і рівною поверхнею

Цей масив формує зображення подібно до очей комах, накладаючи частини зображення через кожну зі стрижневих лінз. Збірка з 600 до 2000 стрижневих лінз може отримати поле зору шириною як аркуш паперу завширшки 36 дюймів. Найважливішою особливістю масиву лінз GRIN є те, що відстань від початкової поверхні до поверхні зображення, а саме спряжена довжина, мала. Коли звичайний об'єктив використовується в копіювальному апараті, його спряжена довжина досягає від 600 мм до 1200 мм, тоді як у випадку масиву лінз GRIN спряжена довжина становить менше 60 мм, і можна отримати дуже компактну систему зображення. Останнім часом від копіювальних апаратів, які використовуються для офісної роботи, вимагалось, щоб вони могли виконувати операції збільшення, тому використання масивів лінз GRIN тепер обмежено компактними копіювальними машинами.

Матеріал r-GRIN також корисний як частина об'єктива камери та фотооб'єктива. Кількість лінз можна зменшити в два рази, завдяки чому можна досягти величезної ваги та економії коштів, якщо можна виготовити матеріал r-GRIN достатньо великого діаметру. Як показано, наприклад, на рис. 1.4, новий подвійний фотооб'єктив Гаусса, що складається з шести елементів, можна конфігурувати за допомогою комбінації лише двох лінз r-GRIN, а сферична аберация третього порядку, кома, астигматизм і кривизна поля Петцваля – усі кориговані до менше  $1 \mu\text{m}$  [10].

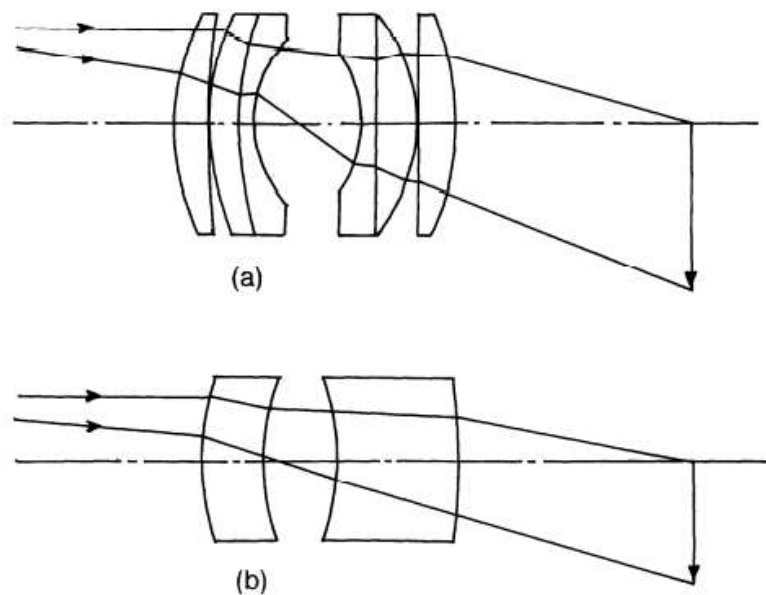


Рисунок 1.4 – Конфігурації (а) нового подвійного фотооб'єктива Гауса та (б) фотооб'єктива GRIN

Шляхом відповідного вибору конструктивних параметрів також можна виправити хроматичну аберацию. Іншим прикладом є застосування об'єктива GRIN до зум-об'єктива, що забезпечує зменшення загальної довжини об'єктива системи на 40 % [11].

#### 1.4 Проектування радіальних градієнтних індексних профілів

Коли світло проникає в матеріал GRIN, у якому  $n$  зменшується вздовж радіальної відстані від центральної осі, він буде зігнутий до осі. Властивість, яка представляє особливий інтерес, полягає в тому, що всі промені, що починаються в даній точці об'єкта на одному кінці, сходяться до однієї точки зображення на іншому кінці, тобто всі промені поширюються з однаковим періодом (кроком)  $p = 2\pi/g$ . Таким чином, паралельні промені фокусуються в одній точці, як якщо б вони пройшли через звичайну лінзу, і по черзі і періодично сходяться і розходяться. Для меридіональних променів (променів, що лежать у площині, що містить вісь лінзи), ідеальний профіль індексу, що задовольняє описані вище умови, представляється у вигляді гіперболічного сікуючого у вигляді:

$$\begin{aligned} n^2(r) &= n_0^2 \operatorname{sech}^2(gr) = \\ &= n_0^2 [1 - (gr)^2 + h_4 (gr)^4 - h_6 (gr)^6 + \dots], \end{aligned} \quad (1.16)$$

де  $n_0$  – показник заломлення на центральній осі;

$r$  – радіальна відстань від центральної осі стрижня;

$g$  – постійна фокусування, що визначає силу лінзи;

$h_4 = 2/3$  і  $h_6 = 17/45$  – безрозмірні параметри вищого порядку.

Для спіральних променів (променів, які спіралью обертаються вниз по лінзі з постійним радіусом) ідеально розподіл має форму:

$$n^2(r) = n_0^2 [1 + (gr)^2]^{-1} = n_0^2 [1 - (gr)^2 + (gr)^4 - (gr)^6 + \dots]. \quad (1.17)$$

Зрозуміло, що не існує профілю індексу градієнта, який міг би забезпечити ідеальне зображення для всіх променів.

У параксіальному наближенні і якщо враховуються невеликі зміни індексу, розподіл індексу можна близько апроксимувати параболою:

$$n^2(r) = n_0^2(1 - (gr)^2), \quad (1.18)$$

або

$$n(r) = n_0\{1 - (g^2/2)r^2\}, \quad (1.19)$$

або

$$n(r) = N_{00} + N_{10}r^2 + N_{20}r^4 + \dots \quad (1.20)$$

За аналогією з лінзовою оптикою член  $n_0 gr_0$  називають числовою апертурою (NA) лінзи r-GRIN.

### 1.5 Параметри для виготовлення градієнта індексу

Найважливішим параметром матеріалів GRIN є профіль індексу градієнта. Відповідно до формули Лорента-Лоренца, показник заломлення речовини пов'язаний з кількістю складових іонів ( $N_i$ ) та їхньою електронною поляризованістю ( $\alpha_i$ ) таким рівнянням [12]:

$$(n^2 - 1)(n^2 + 2) = (4\pi / 3)\sum N_i\alpha_i. \quad (1.21)$$

Отже, заданий градієнтний профіль індексу можна розробити за допомогою точного контролю профілю концентрації складових іонів (іонів, що модифікують індекс). Форму профілів концентрації можна контролювати за допомогою простого процесу дифузії іонів, що змінюють індекс.

З елементарних розрахунків дифузії [13], якщо концентрація зацікавлених іонів  $C(r, t)$  спочатку однорідна  $C_1$  по всьому радіусу стержня  $r_0$  і  $C_0$  на поверхні, граничні умови:

$$C(r, t) = C_0, r = r_0, t > 0 \quad (1.22)$$

$$C(r, t) = C_1, 0 < r < r_0, t = 0. \quad (1.23)$$

а розв'язок рівняння дифузії для стержня кінцевого радіуса ( $r < r_0$ ) потім виражається наступними рівняннями:

$$\frac{\{C(x, t) - C_0\}}{C_1 - C_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta_n^2 T_f) [J_0(\beta_n, x) / \beta_n J_1(\beta_n)], \quad (1.24)$$

де  $T_f$  – параметр дифузії ( $= Dt/r_0^2$ );

$\beta_n$  – корені  $J_0(\beta_n) = 0$ ;

$x$  – радіальний параметр ( $= r/r_0$ );

$J_0$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку;

$D$  – коефіцієнт дифузії;

$t$  – час обробки;

$J_1$  – функція Бесселя першого порядку;

$r_0$  – радіус стрижня.

На рис. 1.5 показано, як варіації  $T_f$  впливають на профілі концентрації матеріалу r-GRIN уздовж його радіальної відстані. Профіль концентрації все ще залишається рівним поблизу центр у  $T_f$ , 0:05, але здається параболічним у  $T_f$ , 0:05.

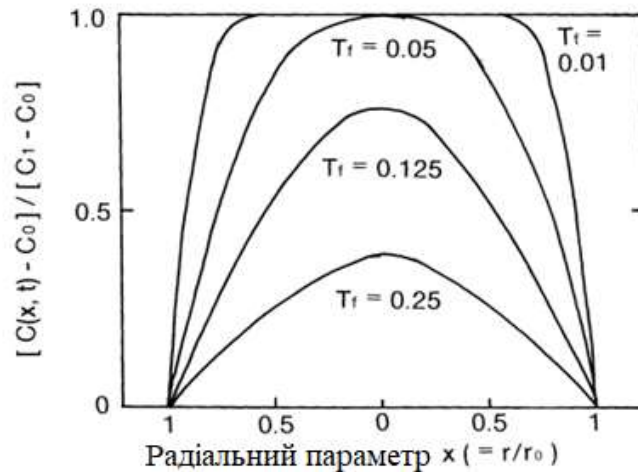


Рисунок 1.5 – Варіації концентраційного профілю з варіаціями  $T_f$

Якщо показник заломлення лінійно залежить від концентрації, то заданий профіль концентрації можна перевести в профіль показника заломлення  $n(r, t)$ . При відповідному параметрі дифузії  $T_0$  (більше 0,05)

рівняння (1.9) можна виразити у вигляді степеневого ряду за радіальним параметром  $x (= r/r_0)$  [14]:

$$\{C(x, t) - C_0\}/(C_1 - C_0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta_n^2 T_0) \left\{ \frac{1}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} y, \quad (1.25)$$

$$y = (1/1!)(\beta_n/2)^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - (1/2!)(\beta_n/2)^4 (r/r_0)^4 + \\ + (1/3!)(\beta_n/2)^6 (r/r_0)^6 - \dots \quad (1.26)$$

Тоді, якщо вторинний диференціал рівняння дорівнює нулю:

$$d^2y/dr^2 = (\beta_n/2)^2 [2 - 3(\beta_n/2)^2 (r/r_0)^2 + (5/6)(\beta_n/2)^4 (\frac{r}{r_0})^4 + \\ + (1/3!)(\beta_n/2)^6 (r/r_0)^6 - \dots] = 0 \quad (1.27)$$

і  $(r/r_0) = 0,82$ . Таким чином, точка ін'єкції на кривій концентрації, тобто в рівнянні (1.26), з'являється при  $r = 0,82 r_0$ , що свідчить про те, що приблизно параболічний розподіл показника заломлення понад 80 % діаметра матеріалів  $r$ -GRIN буде створено процесом дифузії [15].

Оскільки основний інтерес становить радіальний параболічний профіль індексу, заданий рівнянням. (1.18), найкращого підходу також можна досягти шляхом мінімізації стандартного відхилення, визначеного як:

$$dS = [\sum_i \{n(x_i, t)^2 - n_0(1 - g^2 x_i^2)\}^2 / N]^{1/2}. \quad (1.28)$$

На рис. 1.6 показані варіації константи фокусування  $g$  і стандартного відхилення  $dS$  як функції параметра дифузії  $T_f$ , коли параболічна підгонка за методом найменших квадратів рівняння. (1.24) в радіусі 60 % від центральної осі виконано за умови, що максимальна різниця показників між центром і периферією  $\Delta n$  становить 0,03. Результати показують, що найкращий параболічний випадок отримано при  $T_f = 0,1$ .

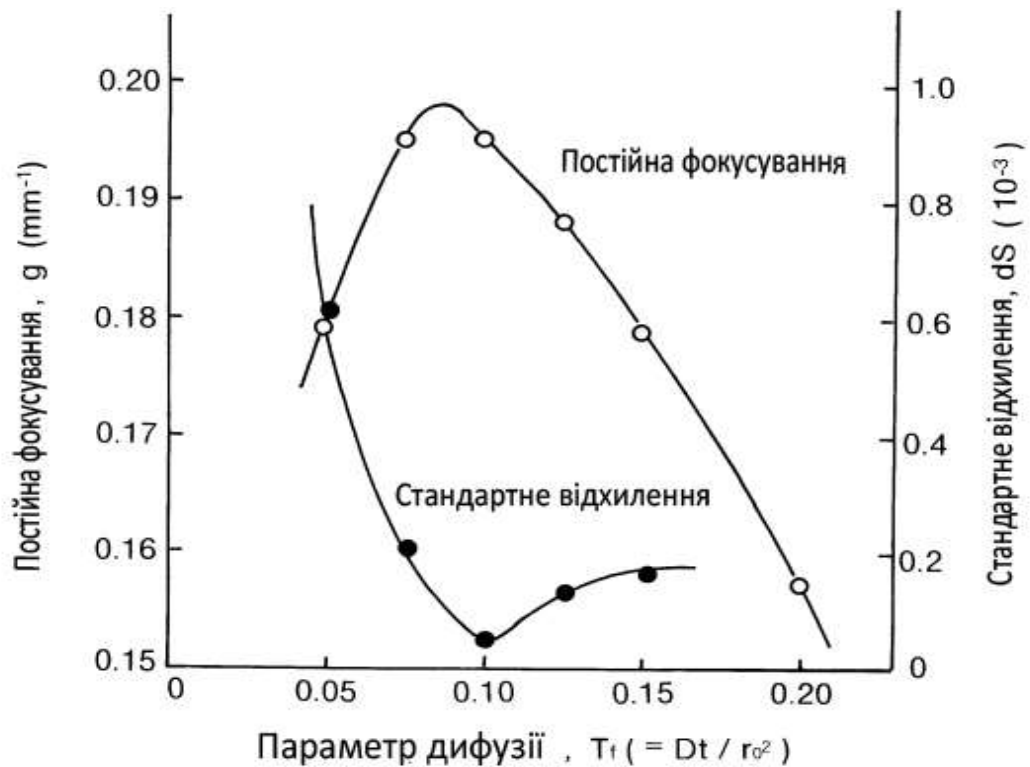


Рисунок 1.6 –Константа фокусування  $g$  і стандартне відхилення  $dS$  як функція параметра дифузії  $T_f$  ( $\Delta n$  0:03,  $r_0$  1 мм)

### 1.6 Максимальна різниця індексів

Другим параметром, який слід враховувати, є максимальна різниця показників,  $\Delta n$ , між центром і периферією стрижня GRIN. Цей параметр тісно пов'язаний із показником заломлення на центральній осі стержня  $n_0$ , постійною фокусування  $g$  і, отже, числовою апертурою лінзи  $r$ -GRIN  $n_0 g r_0$ . Якщо іон, що змінює індекс, є дуже поляризованим і легко дифундує в склі вище температури відпалу, градієнт концентрації іона в результаті дифузії призведе до великої зміни показника заломлення. Іонні радіуси [16], електронні поляризованості і константа заломлення іонів, що змінюють індекс.

## 2 МОДЕЛЮВАННЯ ГРАДІЄНТНОЇ ЛІНЗИ

### 2.1 Пакет моделювання COMSOL Multiphysics

За допомогою програмного пакету COMSOL Multiphysics інженери та вчені моделюють конструкції, пристрої та процеси у всіх галузях інженерних, виробничих та наукових досліджень.

COMSOL Multiphysics – це інтегрована платформа для моделювання, що включає всі його етапи: від створення геометрії, визначення властивостей матеріалів і опису фізичних явищ, до налаштування рішення і процесу постобробки, що дозволяє отримувати точні і надійні результати [17].

Щоб створювати моделі для спеціалізованих прикладних та інженерних завдань, доповнюючи можливості програмного пакету COMSOL Multiphysics модулями розширення у будь-якому поєднанні. Модулі інтеграції дозволяють застосовувати під час моделювання інші інженерні та математичні програмні засоби, що використовуються при розробці пристроїв та процесів.

Щоб оптимізувати конструкції для фотонних пристроїв, інтегрованої оптики, оптичних хвилеводів, з'єднувачів, волоконної оптики тощо, вам потрібно враховувати реальні сценарії. Можливості мультифізичного моделювання програмного забезпечення COMSOL Multiphysics допоможуть вивчити, як інша фізика впливає на оптичні структури, наприклад, оптичні, електрооптичні та акустооптичні ефекти, а також електромагнітне нагрівання.

### 2.2 Результати чисельних розрахунків

На основі створеного в роботі розрахункового проекту було проведено моделювання розповсюдження Гаусового пучка через градієнтну лінзу. В даному випадку Гаусівський хвильовий пучок представляє собою модель випромінювання одномодового лазера, наприклад, гелій-неонового. Застосування градієнтних лінз дозволяє ефективно керувати параметрами

лазерного випромінювання та забезпечує можливість вимірювання цих параметрів з високою точністю.

Зрозуміло, що в першу чергу мова йде про керування та вимірювання просторових параметрів Гаусівського пучка.

Для верифікації побудованої моделі спочатку розглянемо закономірності розповсюдження хвильового пучка через звичайну лінзу (однорідну). Ці закономірності добре відомі з геометричної оптики. Для максимального спрощення моделі спочатку будемо вважати, що показник заломлення лінзи дорівнює одиниці. Це означає, що лінза відсутня і хвильовий пучок розповсюджується у вільному просторі. В цьому випадку просторовий розподіл поля цього пучка не повинен змінюватися в області простору, заповненому матеріалом лінзи. Такий висновок підтверджується результатами чисельного розрахунку просторового розподілу електричного поля хвильового пучка, представленими на рис. 2.1.

Чорною кривою на цьому рисунку позначені контури лінзи, яка в даному випадку за матеріальними параметрами не відрізняється від вільного простору. Гаусівський хвильовий пучок розповсюджується з лівої сторони розрахункової області. Як і очікувалося, результати розрахунків свідчать про те, що хвильовий пучок при розповсюдженні через область простору лінзи не відбивається на границях цієї області та зберігає форму просторового розподілу.

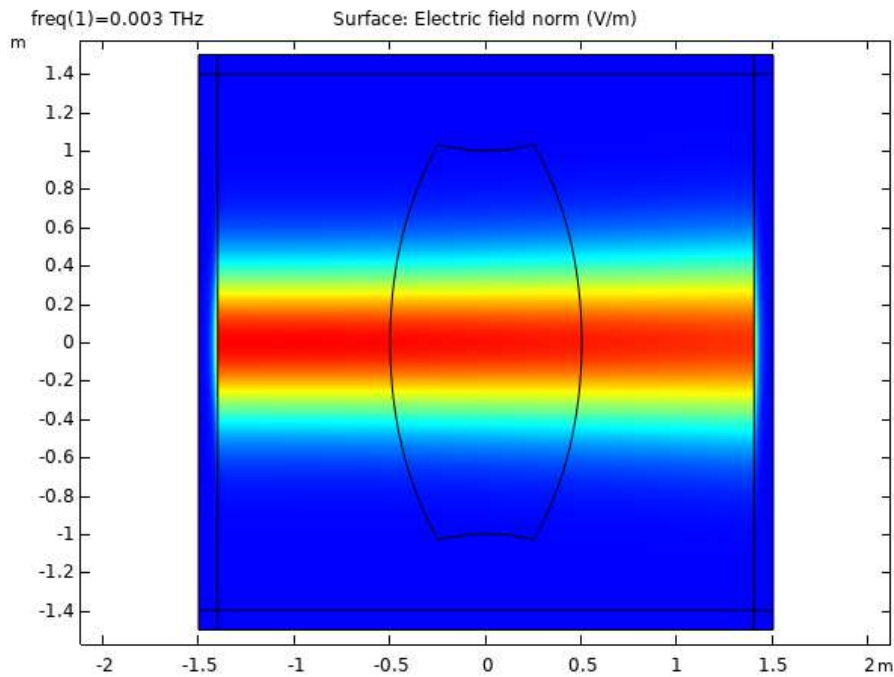


Рисунок 2.1 – Розподіл поля Гаусівського пучка у випадку відсутності лінзи

Для додаткової верифікації побудованої моделі розглянемо випадок проходження хвильового пучка через однорідну лінзу, виготовлену із скла з показником заломлення 1.5, який є типовим для багатьох сортів оптичного скла. В цьому випадку слід очікувати реалізації явища фокусування хвильового пучка при проходженні через область простору, заповнену матеріалом лінзи.

На рис. 2.2 представлено зображення просторового розподілу діелектричної проникності в розрахунковій області. Білий колір відповідає діелектричній проникності вільного простору, тобто одиниці. Область лінзи заповнена темним кольором, який відповідає обраному значенню діелектричної проникності. Видно, що в межах лінзи реалізується однорідний розподіл показника заломлення подібно до того, як це відбувається у звичайних лінзах.

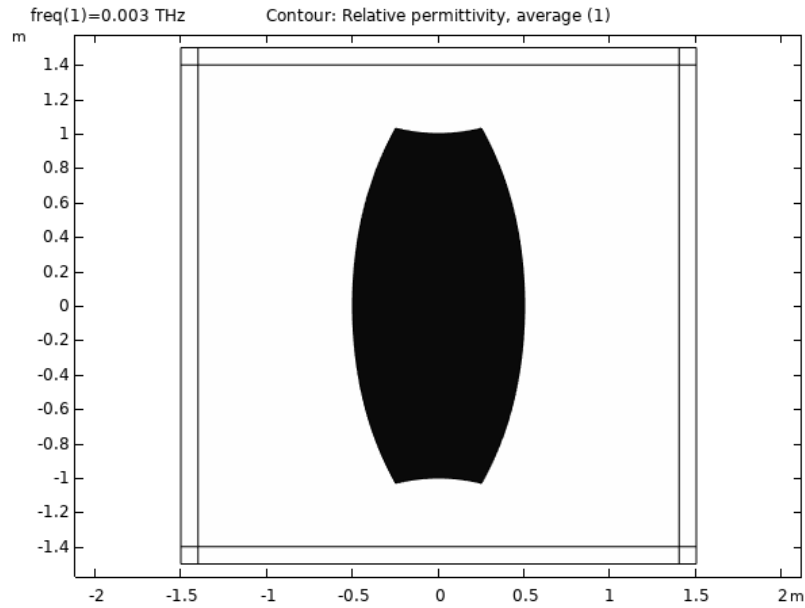


Рисунок 2.2 – Просторовий розподіл діелектричної проникності середовища в області чисельних розрахунків

Результати чисельних розрахунків представлені на рис. 2.3. На цьому рисунку спостерігаються кілька явищ, типових для процесу проходження електромагнітних хвиль через фокусувальну скляну лінзу.

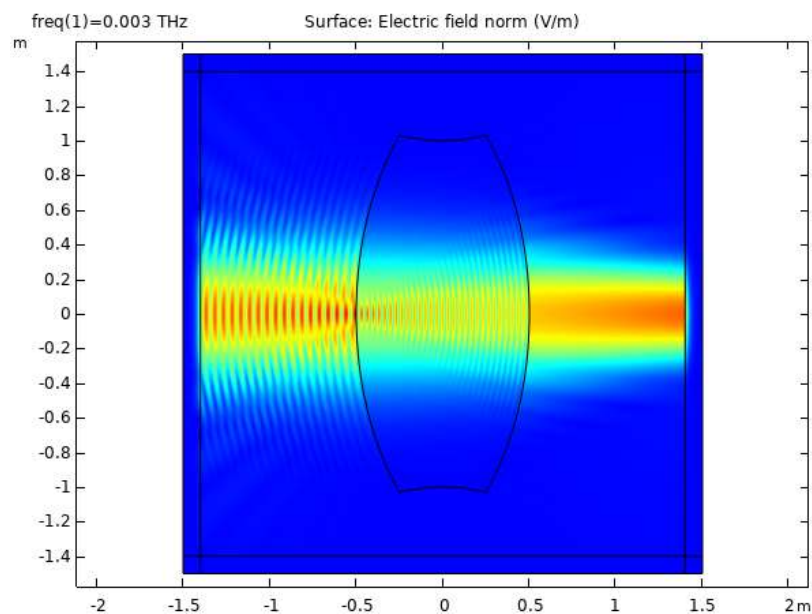


Рисунок 2.3 – Просторовий розподіл електричного поля хвильового пучка при проходженні через скляну лінзу

По-перше, спостерігається явище фокусування хвильового пучка у частині простору правіше від лінзи. По-друге, в лінзі та в частині простору, відкіль падає хвильовий пучок, спостерігаються інтерференційні явища. Це цілком закономірний результат, оскільки на границях розділу двох різних середовищ відбувається часткове відбиття електромагнітної хвилі. Це означає, що в середині лінзи та зліва від неї існують кілька хвиль, які розповсюджуються у зустрічних напрямках. Оскільки ці хвилі когерентні, то виконуються умови для формування стоячих хвиль подібно тому, як це відбувається в резонаторах.

Отже, на підставі отриманих результатів можна зробити висновок про вірогідність побудованої моделі та можливість її застосування для моделювання розповсюдження хвильових Гаусівських пучків через різноманітні лінзи.

Розглянемо далі процес проходження Гаусівського пучка через градієнтну лінзу. Спочатку розглянемо більш поширений випадок симетричного розподілу діелектричної проникності в градієнтній лінзі. Представимо його таким чином:

$$\varepsilon_g(y) = (1 + Gy^2)^2 \quad (2.1)$$

В даному випадку центр системи координат знаходиться в центрі лінзи. Її діелектрична проникність є функцією тільки однієї координати, вісь якої розташована перпендикулярно напрямку розповсюдження хвильового пучка. Параметр  $G$  характеризує ступінь неоднорідності просторового розподілу діелектричної проникності в градієнтній лінзі. Отже, чим більше значення має цей параметр, тим сильніший градієнт діелектричної проникності реалізується в лінзі. Зрозуміло, що значення  $G = 0$  відповідає випадку однорідної лінзи, результати для якої представлені на рис. 2.1.

З виразу (2.1) видно, що діелектрична проникність в центральній частині лінзи дорівнює одиниці, а при збільшенні модуля поперечної координати  $y$  вона симетрично збільшується. Отже, в цьому випадку отримуємо симетричний розподіл діелектричної проникності в градієнтній лінзі.

Цей результат ілюструється на рис. 2.4, де представлений просторовий розподіл діелектричної проникності в розрахунковій області для випадку градієнтної лінзи зі значенням  $G = 0,5$ .

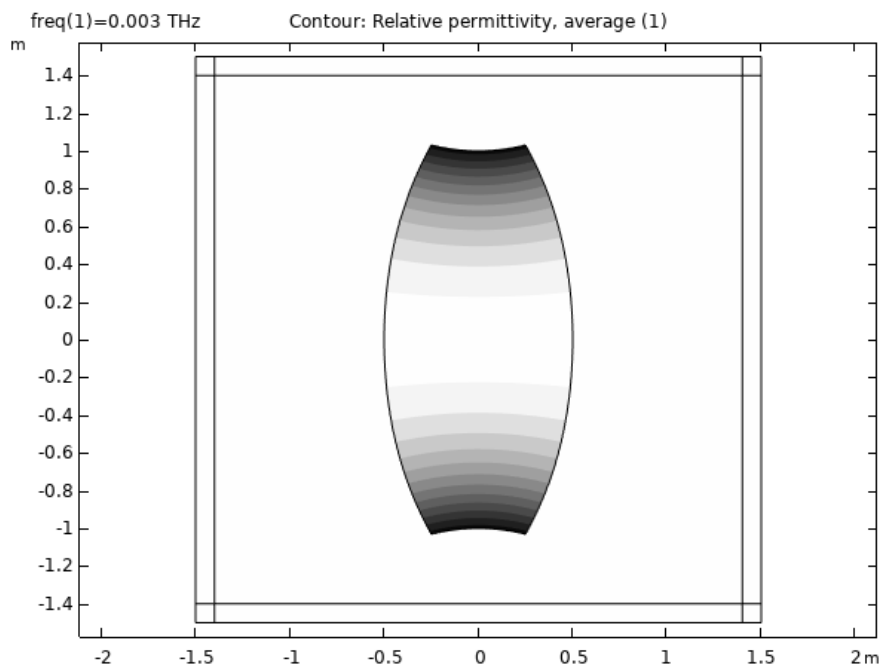


Рисунок 2.4 – Просторовий розподіл діелектричної проникності у випадку градієнтної лінзи

Більш темні ділянки на рисунку відповідають збільшеним значенням діелектричної проникності. Оскільки така форма перерізу лінзи отримана через деформацію прямокутної області, то ізолінії значень діелектричної проникності викривлені відповідно до закону цієї деформації.

Оскільки в центральній частині градієнтної лінзи діелектрична проникність мало відрізняється від одиниці, то можна передбачити, що

центральна частина Гаусівського хвильового пучка буде перетворюватися значно менше у порівнянні з периферійними його частинами. Це повинне призвести до суттєвих змін в просторовому розподілі поля хвильового пучка після проходження градієнтної лінзи.

Розглянемо закономірності зміни просторового розподілу хвильового пучка при збільшенні параметра  $G$ . На рис. 2.5 представлено результати розрахунків для значення  $G = 0,2$ , яке відповідає невеликому ступеню градієнта діелектричної проникності.

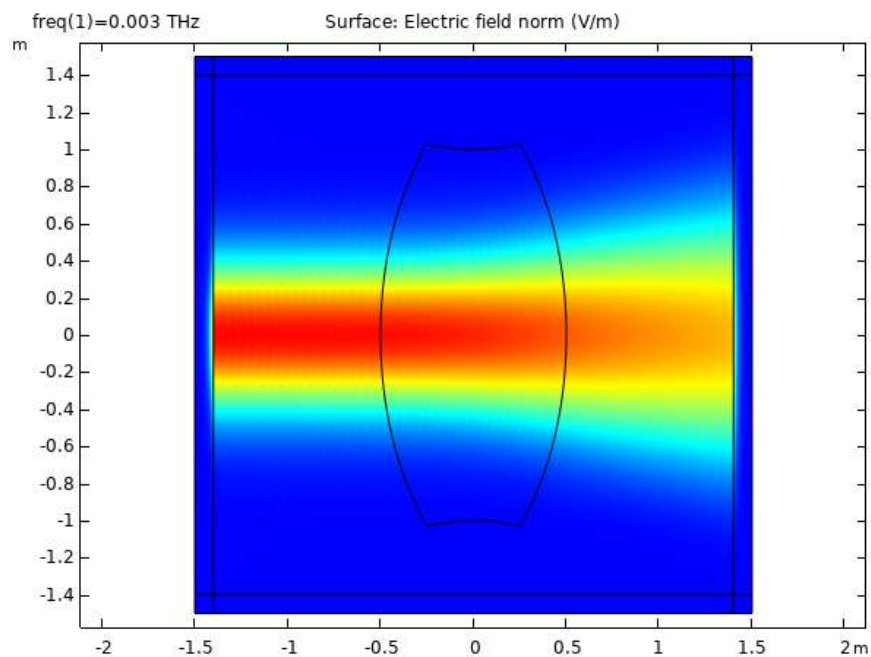


Рисунок 2.5 – Просторовий розподіл електричного поля хвильового пучка для значення  $G = 0,2$

На цьому рисунку отримано досить незвичний розподіл поля для лінзи з опуклими поверхнями. Однорідні лінзи з такими поверхнями є фокусувальними, тобто після проходження через них поперечні розміри хвильового пучка зменшуються. У випадку градієнтної лінзи спостерігається збільшення цих розмірів. Отже, можна зробити висновок про незвичайні властивості градієнтної лінзи, які дозволяють керувати параметрами

хвильових пучків та спрощують процес вимірювання цих параметрів за рахунок деякого розширення пучка після проходження градієнтної лінзи.

На рис. 2.6 представлені результати розрахунків для значення  $G = 0,5$ , яке відповідає розподілу діелектричної проникності на рис. 2.4.

В цьому випадку спостерігається більш суттєве розходження Гаусівського пучка після проходження градієнтної лінзи.

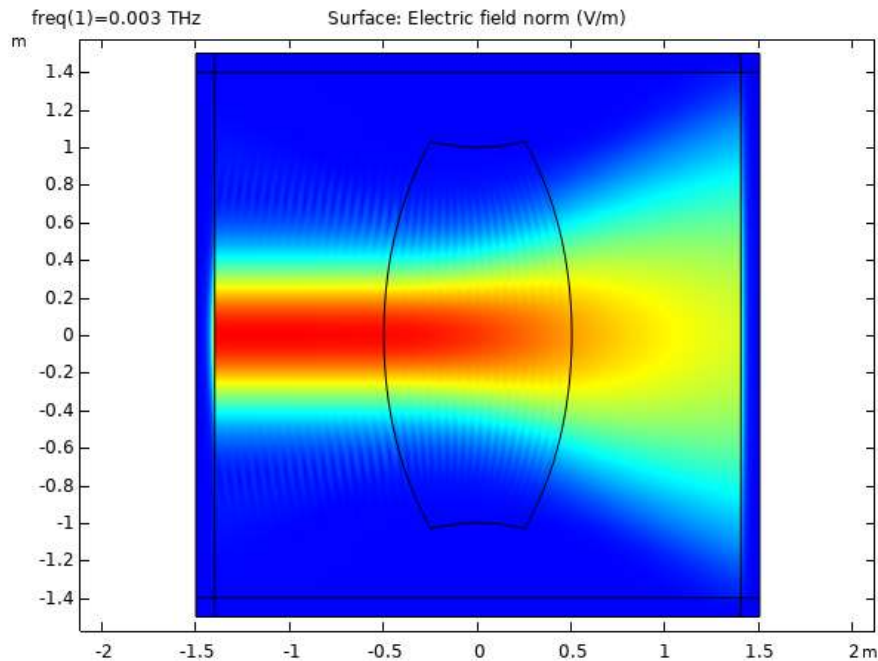


Рисунок 2.6 – Просторовий розподіл електричного поля хвильового пучка для значення  $G = 0,5$

Це цілком закономірний результат, оскільки при збільшенні параметра  $G$  відбувається збільшення ступеню градієнта діелектричної проникності в лінзі. Слід відзначити, що інтерференційні явища присутні лише на периферії хвильового пучка, де діелектрична проникність лінзи збільшується. В центральній частині пучка ці явища не спостерігаються, оскільки тут діелектрична проникність матеріалу градієнтної лінзи мало відрізняється від одиниці й відбиття практично відсутнє.

Цілком природно припустити, що подальше збільшення параметра градієнтності матеріалу лінзи призведе до більш суттєвих перетворень просторового розподілу поля Гаусівського хвильового пучка.

Таке припущення підтверджується результатами чисельних розрахунків. На рис. 2.7 представлено розподіл поля пучка для значення  $G = 1$ . Як і очікувалося, спостерігається досить суттєве розходження хвильового пучка, тобто збільшення розмірів його перетину після проходження градієнтної лінзи.

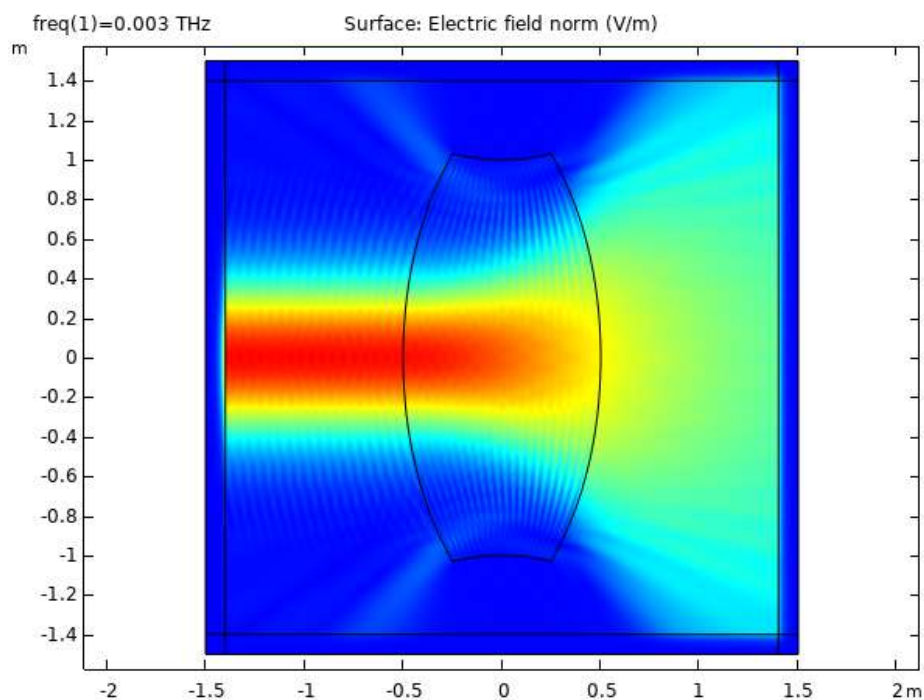


Рисунок 2.7 – Просторовий розподіл електричного поля хвильового пучка для значення  $G = 1$

Слід відзначити, що в цьому випадку значно розширюється область існування інтерференційних явищ. Відбувається її розповсюдження в центральну частину хвильового пучка. Це викликано збільшенням ступеню градієнта діелектричної проникності в лінзі. Тобто значення діелектричної проникності на периферії лінзи збільшуються і відбувається більш сильне відбиття і заломлення хвиль, що падають на лінзу.

Звертають на себе увагу незвичайні явища на верхній та нижній частинах градієнтної лінзи. Спостерігається формування додаткових променів, що розповсюджуються по обидва боки від лінзи. Крім того, інтерференційні явища вже спостерігаються майже у всій області розрахунків.

На рис. 2.8 представлено результати розрахунків при подальшому збільшенні параметра градієнтності лінзи ( $G = 1,2$ ).

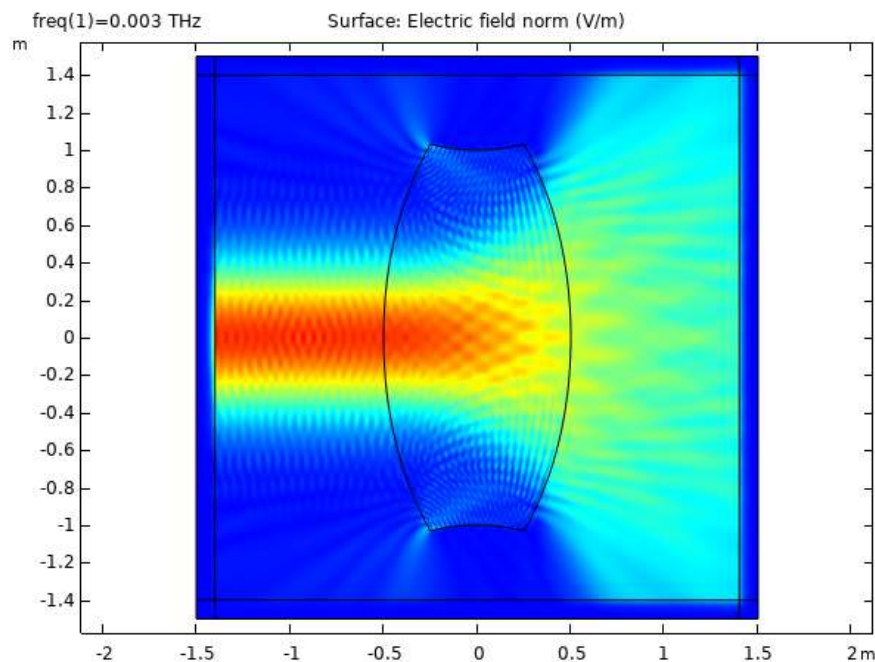


Рисунок 2.8 – Просторовий розподіл електричного поля хвильового пучка для значення  $G = 1,2$

Цілком природньо, що в цьому випадку посилюються всі явища, які спостерігалися для значення  $G = 1$ . Це стосується інтерференції та формування додаткових променів на периферичній частині градієнтної лінзи. Слід також зазначити, що поле хвильового пучка розширюється на всю праву поверхню лінзи, де випромінювання виходить з неї.

Посилення інтерференційних явищ всередині градієнтної лінзи призводить до формування суттєво неоднорідного розподілу поля хвильового

пучка на виході лінзи. Спостерігається система окремих яскравих променів, які формуються в межах перерізу хвильового пучка.

Розглянемо далі інший варіант градієнтної лінзи з несиметричним просторовим розподілом діелектричної проникності. Закон цього розподілу задаємо у такому вигляді:

$$\varepsilon_g(y) = (1.5 + 0.5y)^2 \quad (2.2)$$

З виразу (2.2) видно, що найменше значення діелектричної проникності реалізується на нижній частині градієнтної лінзи ( $y = -1$ ,  $\varepsilon_g = 1$ ). Птоокери переході до верхнього краю лінзи значення діелектричної проникності збільшується ( $y = 1$ ;  $\varepsilon_g = 4$ ). Цей несиметричний просторовий розподіл діелектричної проникності представлений на рис. 2.9.

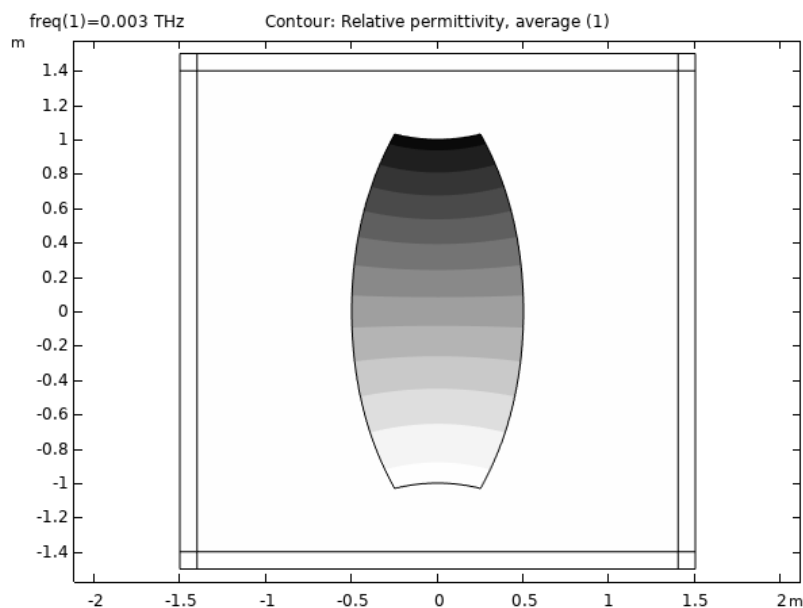


Рисунок 2.9 – Просторовий розподіл діелектричної проникності у випадку лінзи з несиметричним градієнтом

Зрозуміло, що несиметричний просторовий розподіл діелектричної проникності в градієнтній лінзі повинен призвести до несиметричного

просторового розподілу поля в перетині Гаусівського хвильового пучка, що проходить через цю лінзу.

Результати чисельних розрахунків поля хвильового пучка для цього випадку представлені на рис. 2.10. Видно, що лінза з несиметричним розподілом діелектричної проникності має фокусувальні властивості. Але це фокусування відбувається не на осі лінзи, як звичайно, а з деяким досить суттєвим зсувом від цієї осі. Фактично хвильовий пучок змінює напрям свого розповсюдження і фокусується саме в цьому напрямі.

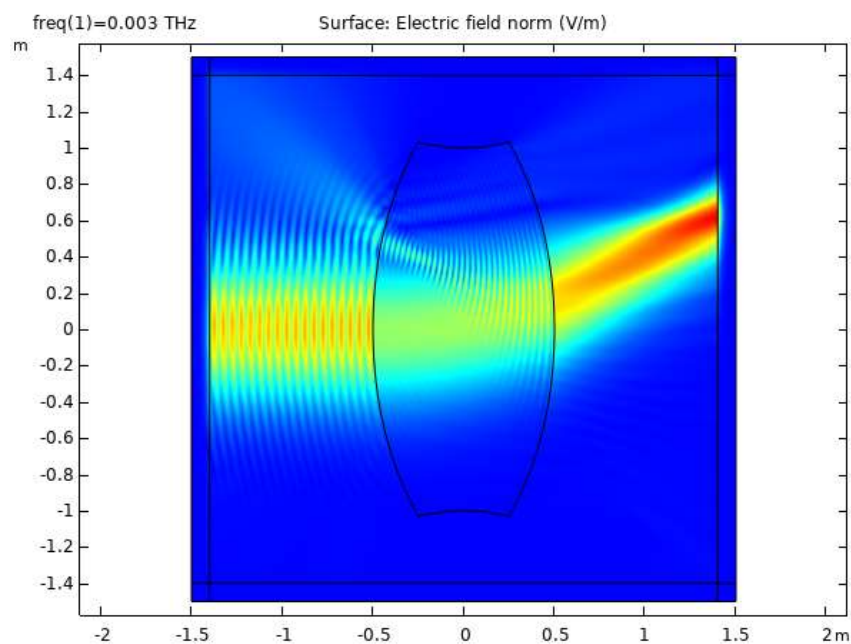


Рисунок 2.10 – Просторовий розподіл електричного поля хвильового пучка, що проходить через лінзу з несиметричним градієнтом діелектричної проникності

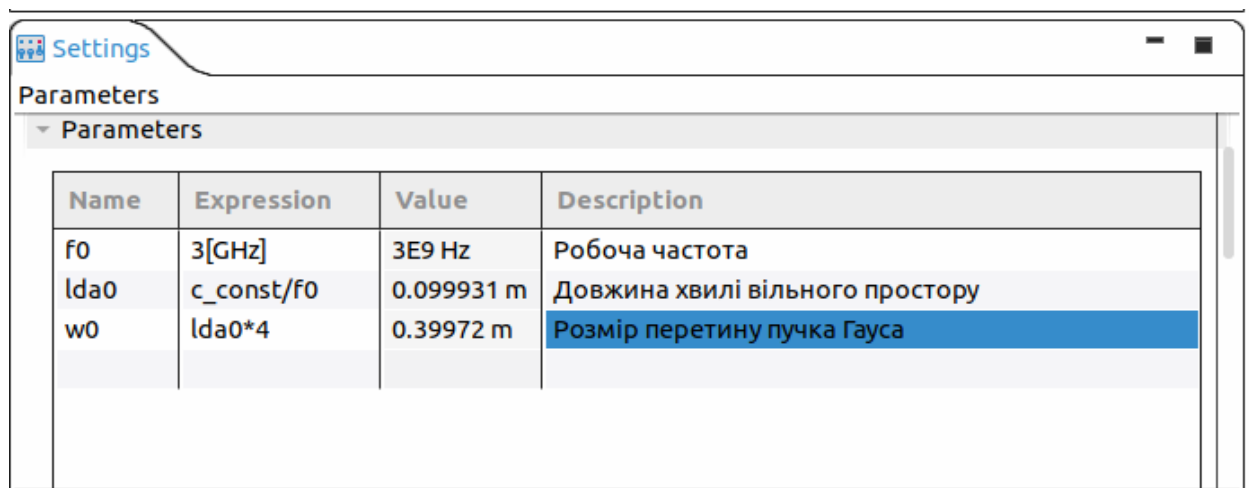
Отже, така градієнтна лінза може бути застосована для керування напрямком розповсюдження хвильових пучків та їх одночасного фокусування. Крім того, аналіз розподілу інтерференційних явищ свідчить про можливість розщеплення хвильового пучка на кілька пучків, що розповсюджуються в різних напрямках. Наприклад, такий варіант застосування градієнтної лінзи можна реалізувати через нанесення на праву

поверхню лінзи додаткового покриття, яке дещо збільшує коефіцієнт відбиття.

### 2.3 Побудова моделі

Першим кроком побудови моделі є додавання до проекту розрахункових модулів Deformed Geometry та Frequency Domain. Перший модуль дозволяє будувати проекти для вивчення як стаціонарних станів, так і залежних від часу деформацій, де геометрія змінює свою форму через додавання або видалення матеріалу, незалежно від того, відбувається це через фізичний процес або, наприклад, як частину оптимізації форми, а другий – генерує конфігурацію розв'язувача, яка використовується для вирішення стаціонарної параметричної задачі або задачі оцінки асимптотичної форми сигналу.

Наступний шлях задання параметрів, що складають основу взаємодії фізичних процесів показаних у моделі. У пункті Parameters вписуємо використовувані величини. (*c\_const* – це попередньо визначена у COMSOL константа для швидкості світла у вакуумі.) (рис. 2.11).



Name	Expression	Value	Description
f0	3[GHz]	3E9 Hz	Робоча частота
lda0	c_const/f0	0.099931 m	Довжина хвилі вільного простору
w0	lda0*4	0.39972 m	Розмір перетину пучка Гауса

Рисунок 2.11 – Параметри моделі

Для побудови моделі поверхневого плазмонного резонансу необхідна лінза і задана область розрахування, що виконує роль однорідного середовища навколо лінзи. Спочатку створено квадрат для всієї області моделі за допомогою оператора Square (рис. 2.12).

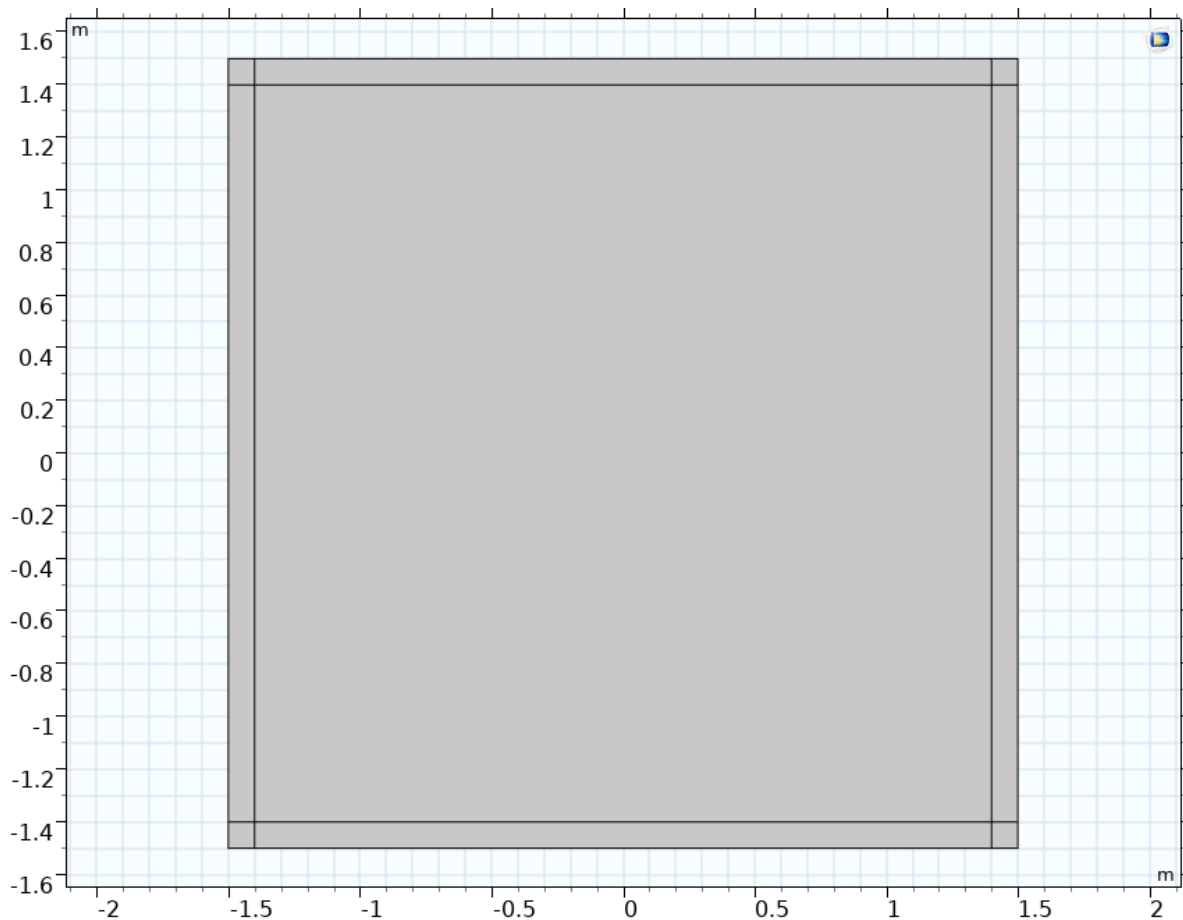


Рисунок 2.12 – Розрахункова область

Додано поверхневий шар на кожній стороні цього квадрата у налаштуваннях оператора Square (рис. 2.13).

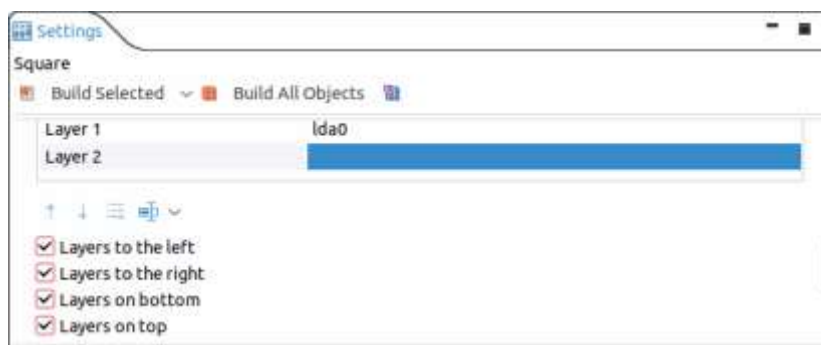


Рисунок 2.13 – Налаштування поверхневих шарів на стінках квадрата

Далі першим кроком створення лінзи є додання прямокутника за допомогою оператора `Rectangle` у центрі квадратної області (рис. 2.14).

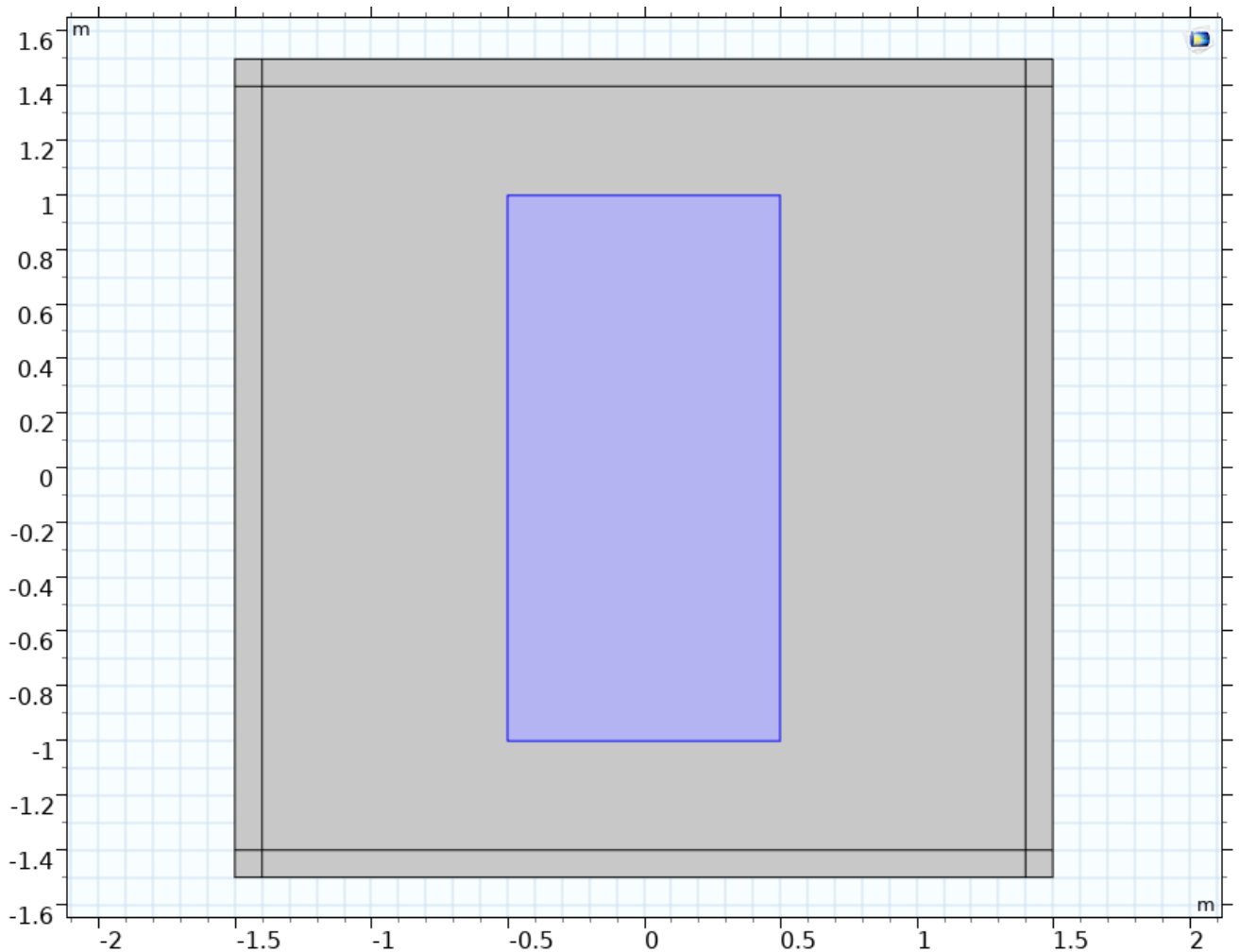
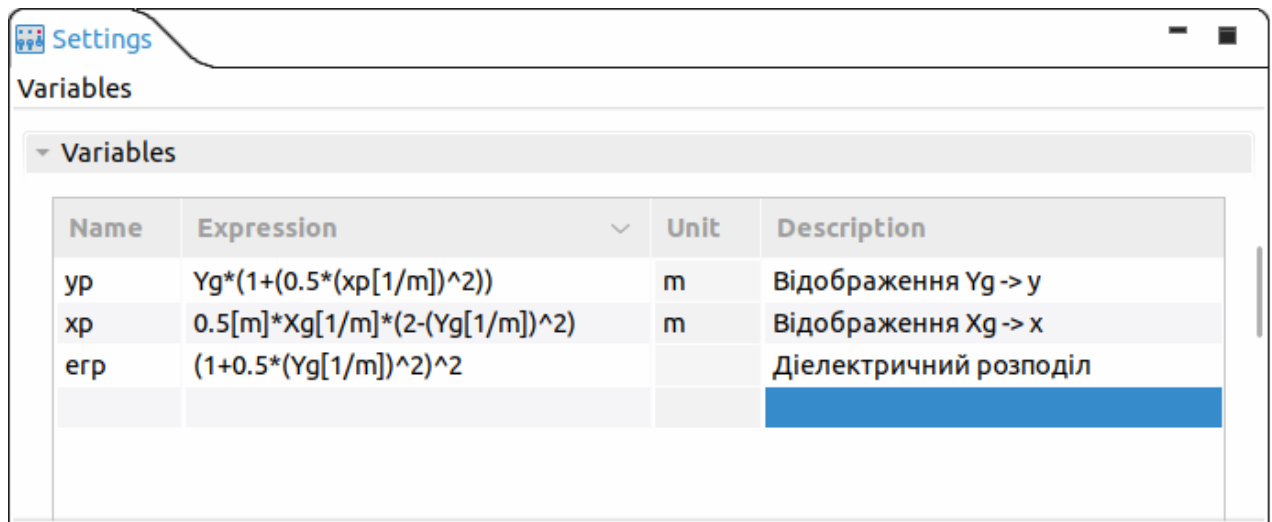


Рисунок 2.14 – Заготовка лінзи

Далі для обраної прямокутної області необхідно додати набір змінних для форми та діелектричного розподілу лінзи, щоб перетворити простий прямокутник у лінзу з необхідними оптичними властивостями. Для цього використавши оператор `Local Variables` введено наступні дані у таблицю змінних. Тут  $Xg$  і  $Yg$  є попередньо визначеними змінними фізики деформованої геометрії, що представляють декартові координати недеформованої рамки (рис. 2.15).



The screenshot shows a window titled 'Settings' with a sub-section 'Variables'. Below this is a table with the following data:

Name	Expression	Unit	Description
yp	$Yg \cdot (1 + (0.5 \cdot (xp[1/m])^2))$	m	Відображення $Yg \rightarrow y$
xp	$0.5[m] \cdot Xg[1/m] \cdot (2 - (Yg[1/m])^2)$	m	Відображення $Xg \rightarrow x$
erp	$(1 + 0.5 \cdot (Yg[1/m])^2)^2$		Діелектричний розподіл

Рисунок 2.15 – Таблиця змінних параметрів лінзи

Раніше визначені поверхневі шари на сторонах квадратної області перетворимо на ідеально узгоджені шари за допомогою оператора Perfectly Matched Layer (PML).

Це потрібно для зменшення складності моделі заміною більш великого простору на поглинальний шар, так як джерело збудження знаходиться на межі між областю вільного простору та PML і збуджує хвилю, що поширюється в обох напрямках – у PML та в область моделювання.

Хвиля, що поширюється в PML, повністю поглинається, а хвиля, що поширюється в область, дифрагує на лінзі таким чином зберігаючи час для математичного розрахунку без втрати точності моделі (рис. 2.16).

Для приближення моделі до виду реальної лінзи потрібно змінити форму заданого прямокутника за допомогою оператора Deformed Geometry, який дозволить додати криволінійні форми до прямокутної моделі тому, що як форма, так і діелектричний розподіл лінзи з метаматеріалу визначаються відносно вихідної декартової системи координат.

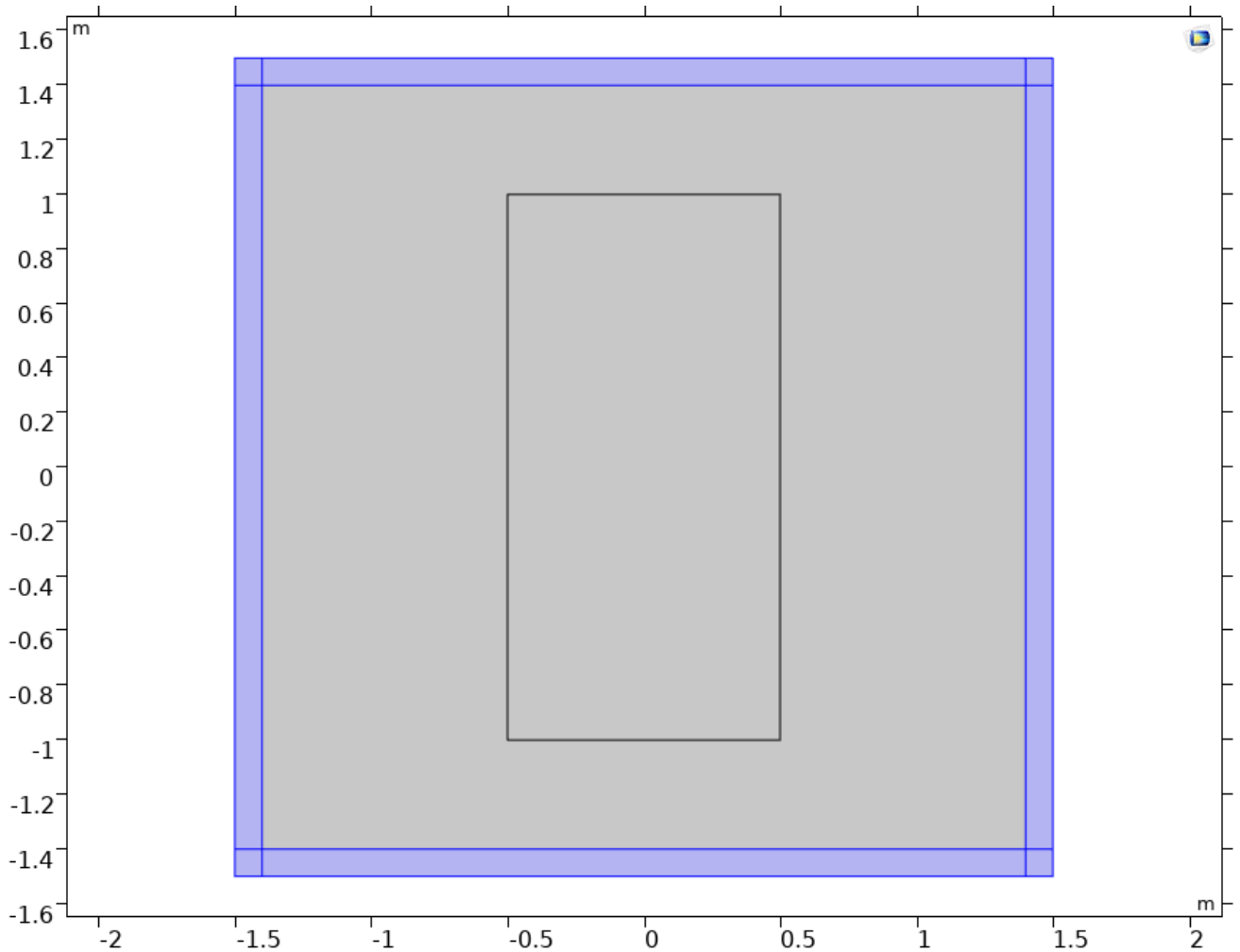


Рисунок 2.16 – Поглинальні шари розрахункової області

Оператор Deformed Geometry використовує наведені вище вирази (2.1) для визначення форми лінзи та відображає декартові координати недеформованої рамки на деформовану рамку. Діелектричний розподіл визначається по відношенню до недеформованої рами, а потім відображається на деформованій формі. Виділяючи потрібні межі прямокутника, за допомогою оператора Prescribed Mesh Displacement визначаємо обсяг нової фігури (рис. 2.17).

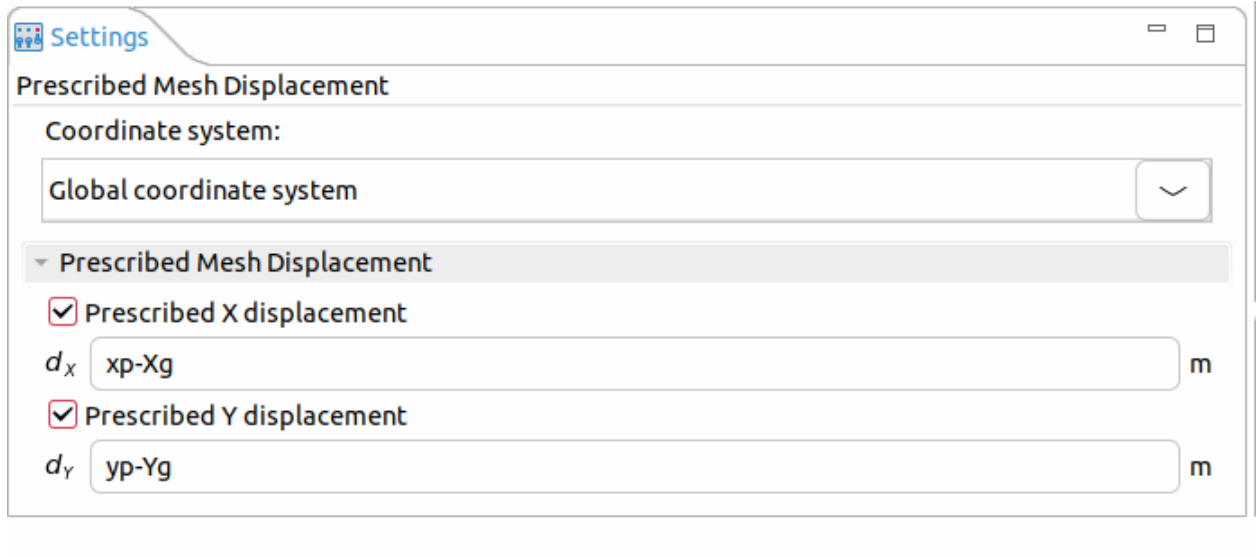


Рисунок 2.17 – Визначення обсягу фігури за допомогою змінних фізики деформованої геометрії

Оператор Prescribed Deformation втілює зміни зроблені раніше у моделі перетворюючи прямокутник в лінзу з попередньо визначеною кривизною.

В операторі Electromagnetic Waves, Frequency Domain діелектричний розподіл налаштовується за допомогою визначеної користувачем змінної  $erp$ , заданої раніше, а промінь Гауса моделюється як входження в область з лівого боку через збудження поверхневого струму (рис. 2.15). Обирається Out-of-plane vector, щоб обчислення виконувались лише для компонента поза площиною. Обидва компоненти в площині дорівнюють нулю (рис. 2.18).

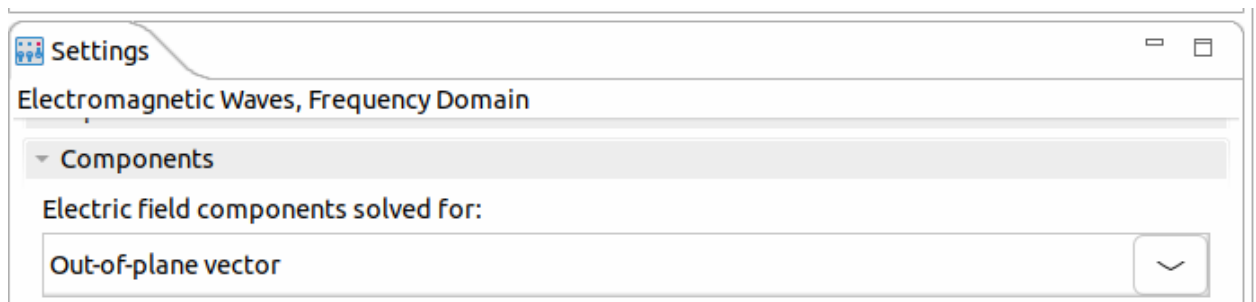


Рисунок 2.18 – Налаштування компонента поза площиною

За допомогою оператора Electric Displacement Field налаштовується діелектрична проникність раніше побудованої лінзи використовуючи попередньо задану змінну  $\epsilon_{rp}$  для електричної складової поля. Для магнітної складової поля залишаємо стандартне значення визначене у COMSOL (рис. 2.19).

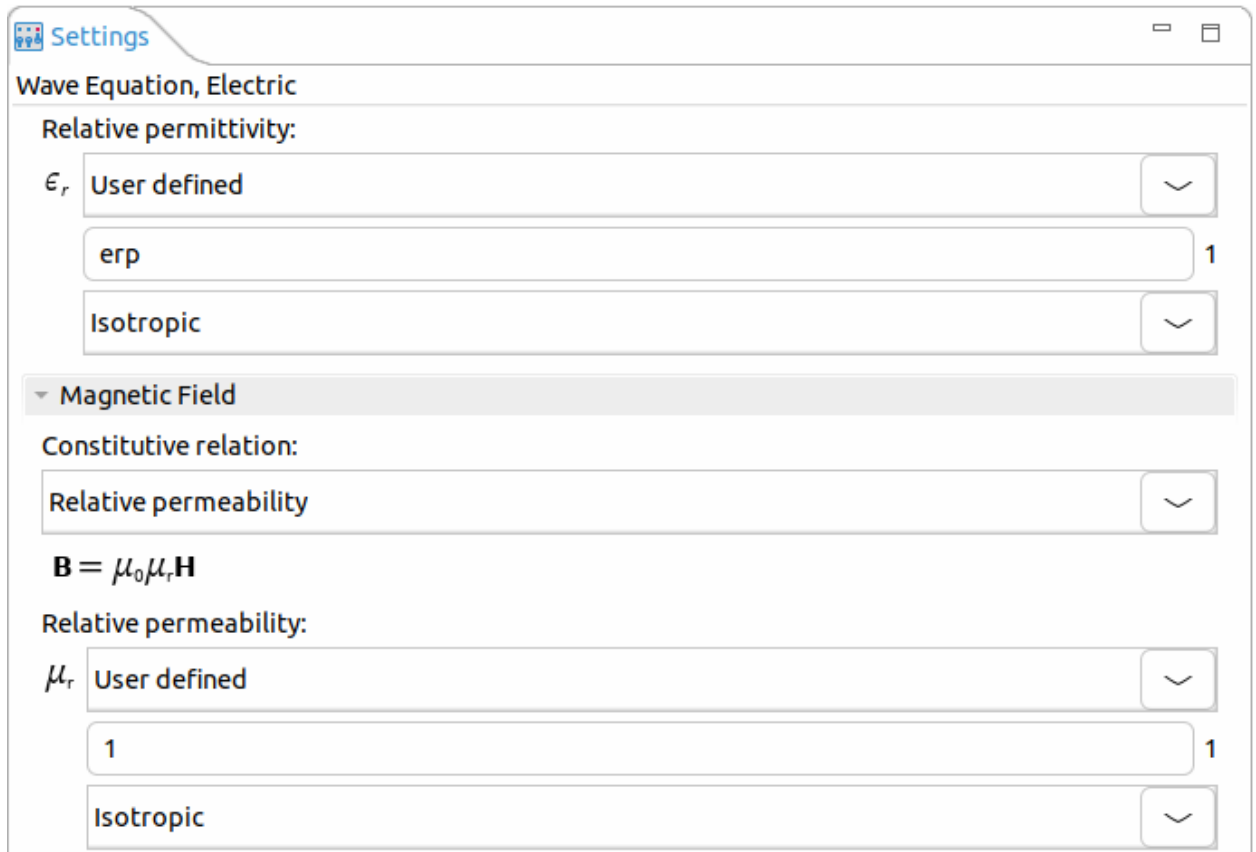


Рисунок 2.19 – Налаштування діелектричної проникності

Для розрахування моделі потрібно задати вектор електромагнітної хвилі, що буде падати на лінзу. Для цього у операторі Surface Current Density виділяється ліва межа попередньо задана як PML шар. Вектор  $J_{s0}$  описується трьома змінними для  $x$ ,  $y$  та  $z$  (рис. 2.20).

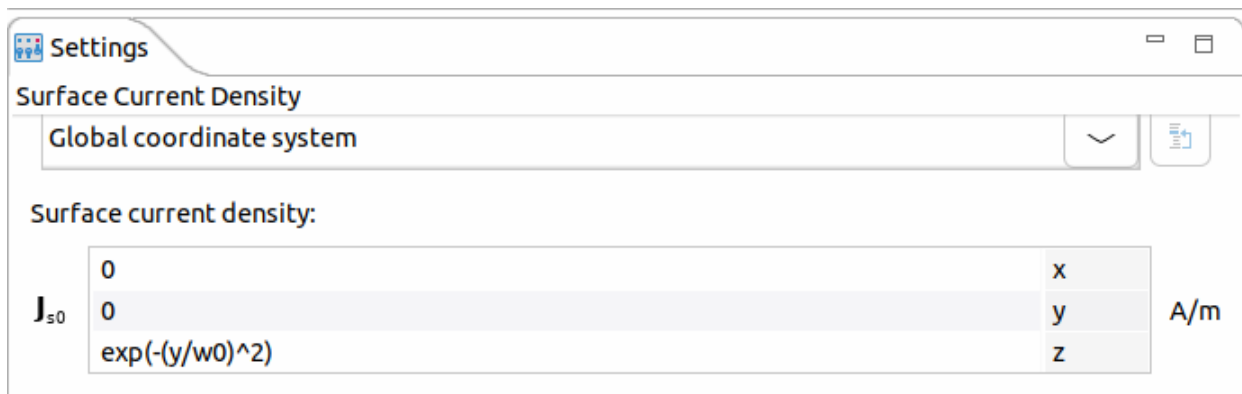


Рисунок 2.20 – Задання вектора електромагнітної хвилі хвилі

Всі області моделі встановлюються, як області з вакуумом. Через те, що властивості матеріалу лінзи налаштовуються хвильовим рівнянням в операторі Frequency Domain, лінза зберігає свої властивості. Після цього в операторі Add Material додаємо матеріал Air як основний матеріал розрахункової області. Цей матеріал є вбудованим у COMSOL, і відповідає всім властивостям повітря (рис. 2.21).

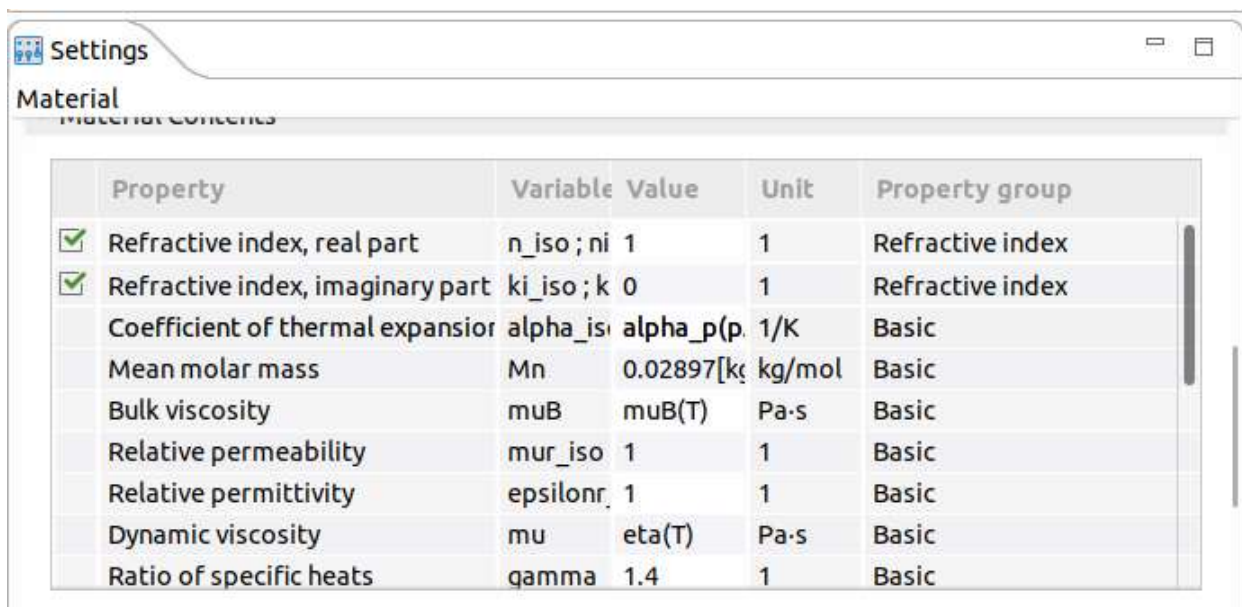


Рисунок 2.21 – Властивості матеріалу розрахункової області

Для демонстрації розрахованих результатів задається координатна сітка. За допомогою оператора Mesh будується трикутна сітка з

максимальним розміром елемента  $lda0/10$  м, та мінімальним розміром 0,0012 м (рис. 2.22).

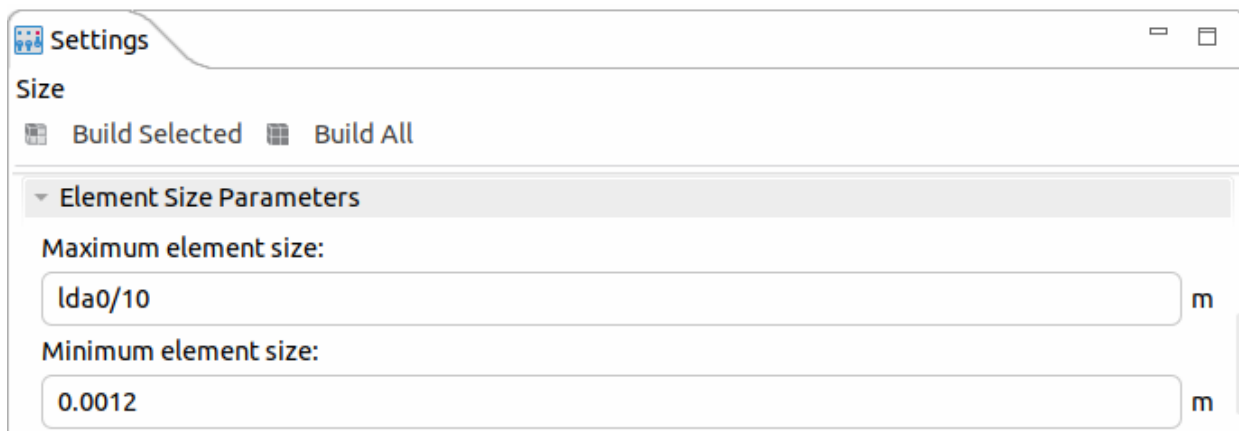


Рисунок 2.22 – Розміри елементів сітки

Модель аналізується за допомогою двох етапів дослідження. По-перше, стаціонарний етап дослідження вирішується лише для деформованої геометрії. Додається оператор Study дозволяє проводити розрахунки для взаємодії хвилі з лінзою і об'ємом навколо неї, а також дозволяє представляти результати у вигляді графіків та рисунків (рис. 2.23).

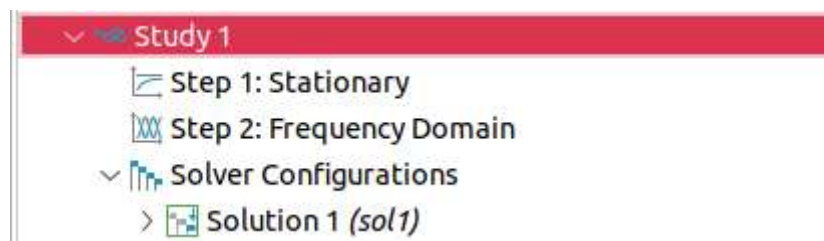


Рисунок 2.23 – Оператор Study, що має в собі різні функції, які допомагають у виводі інформації результатів розрахунку

Типовий графік показує величину електричних полів. Через оператор Contour додається контур до графіку розповсюдження електричного поля, і графік результатів має вигляд як на рис. 2.24.

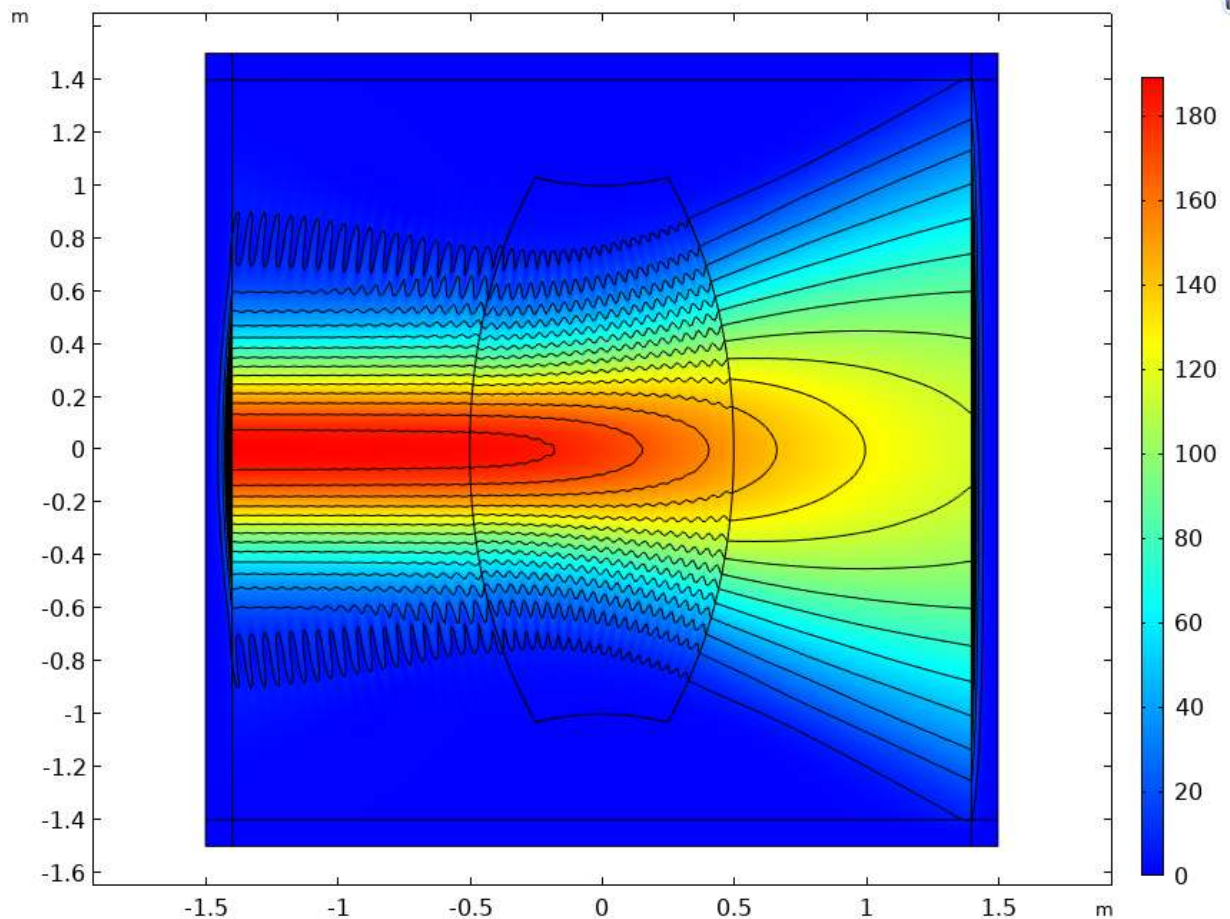


Рисунок 2.24 – Графік результатів розподілу електричного поля після додавання контуру

Наступним кроком є побудування графіку розподілу діелектричної проникності. Для цього у налаштуваннях оператора Contour обрано вбудовану функцію *Relative permittivity, average*, яка визначає середню відносну діелектричну проникність. Також у налаштуванні *Total levels* налаштована кількість рівнів, які використані для побудови градієнту значень для демонстрації різних рівнів показника діелектричної проникності. (рис. 2.25).

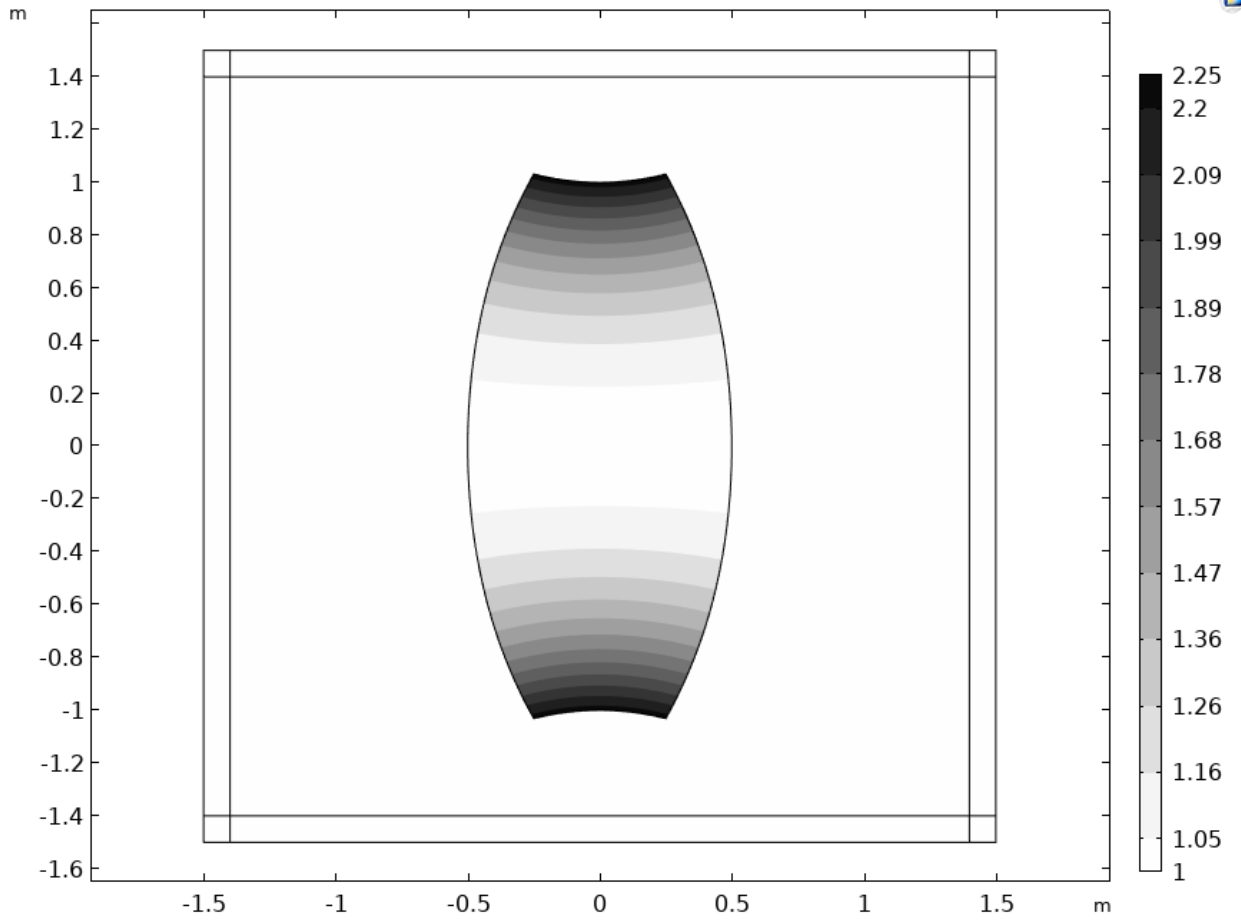


Рисунок 2.25 – Графік розподілення діелектричної проникності

## ВИСНОВКИ

В кваліфікаційній роботі зроблено аналітичний огляд науково-технічної літератури за тематикою, що стосується градієнтних лінз різних видів та їх застосування в оптичних та оптоелектронних системах. Головну увагу приділено найбільш розповсюдженим типам градієнтних лінз: Люнеберга, Ітона-Ліпмана та Маквелла.

Розглянуто основні можливості, структуру розрахункових модулів та алгоритми розв'язання різноманітних задач в комп'ютерному пакеті фізичного моделювання COMSOL Multiphysics. Освоєно технологію застосування модуля хвильової оптики для моделювання проходження електромагнітних хвиль та хвильових пакетів через лінзи.

Створено розрахунковий проєкт для дослідження проходження Гаусівського хвильового пучка через градієнтну лінзу з визначеним просторовим розподілом діелектричної проникності.

Проведені чисельні розрахунки та отримані просторові розподіли електричного поля хвильового пучка при його проходженні через градієнтні лінзи з різними профілями діелектричної проникності. Виявлено основні закономірності впливу форми цього профіля на просторові характеристики поля Гаусівського хвильового пучка.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Dzyubenko M., Maslov V., Odarenko E., Radionov V. Planar Gradient Metamaterial with the Properties of Spherical Partially Transparent Terahertz Mirror // The Second International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo'2017). 11–15 September, 2017. Odessa, Ukraine.
2. Sashkova Y., Odarenko Ye. Visualization of the Monochromatic Plane Wave Scattering by Multilayer Lens // Int. Young Scientists Forum on Appl. Phys. Sept. 29 – Oct. 2, 2015. Dnipropetrovsk. Ukraine. P. 1–4.
3. Nishizawa K., Nishi H. Coupling Characteristics of Gradient-Index Lenses // Appl. Opt. 1984. No 23. P. 1711.
4. Kikchi K., Ishihara S., Shimizu H., Shimada J. Aberration of large numerical-aperture gradient-index lenses for optical pickup systems // Appl. Opt. 1980. No 19. P. 1076–1080.
5. Daimon M., Shinoda M., Kubo T. Focusing properties of gradient-index lens for laser-diode beam // Appl. Opt. 1984. No 23. P. 1790–1793.
6. Aoki N., Nagaoka T., Tsuchida H.: Proc. 16th Symp. Opt. Soc. Jpn. June. The Optical Society of Japan: Tokyo. 1991. P. 39.
7. Fanderlik I.: Optical Properties of Glass, Glass Science and Technology 5. Chapter 4. Elsevier. Amsterdam. 1983. P. 78.
8. Tsuchida H., Nagaoka and T., Yamamoto K.: Technical Digest, The Sixth Microoptics Conference and the Fourteenth Topical Meeting on Gradient-index Optical Systems. The Japan Society of Applied Physics. Tokyo. 1997. P. 32.
9. Fujii K., Akazawa N.: Summaries of Topical Meeting on Gradient-Index Optical Imaging Systems. The Optical Society of America. Reno. 1987. P. 102.
10. Kaite Y., Kaneko M., Kittaka S., Toyama M. Gradient-Index (Grin) Elements by Sol-Gel Interdiffusion: Proc. Annual Meeting Jpn. Soc // Appl. Phys. (in Japanese). 1989. 2a-Z-4. P. 391–415.

11. Caldwell J. B., Kindred D. S. Moore D. T. Summaries of Topical Meeting on Gradient Index Optical Imaging Systems: The Optical Society of America. // Appl. Opt. 1990. Vol. 29. P. 80.
12. Ohmi S., Sakai H., Asahara Y., Nakayama S. Gradient-index rod lens made by a double ionexchange process // Appl. Opt. 1988. 27 (3). P. 496–499.
13. Ohmi S., Sakai H., Asahara Y.: Technical Digest of 1st Micro-optics Conference. Tokyo, (Japan Society of Applied Physics, Tokyo, 1987) P. 40.
14. Asahara Y., Ikushima A. J. Optoelectronics ± Devices and Technologies // Glasses for Photonics. 1988. No 3. P. 81–85.
15. Mohr R. K., Wilder J. A., Masedo P. B., Gupta P. K. Technical Digest, Gradient Index Optical Imaging Systems, Rochester // Applied Optics. 1979. Vol. 19. Issue 7. P. 1035–1038.
16. Shingyouchi K., Konishi S., Susa K., Matsuyama I. // Electronics Lett. 1986. Vol. 22. Issue 2. P. 62 –63.
17. COMSOL Multiphysics/ COMSOL Multiphysics Modeling Software. Access mode: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics> (дата звернення 13.05.2021).