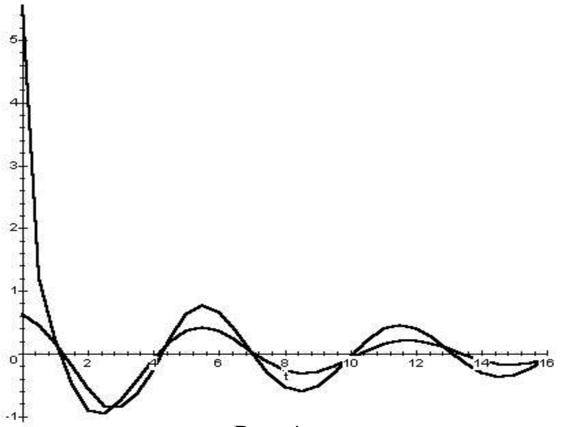

Рис. 4

6. Заключение

В цилиндрической системе координат получена функция Грина уравнений Максвелла для плоского волновода. С помощью этой функции записано четырехмерное интегральное уравнение для поля в волноводе, заполненном холодной изотропной плазмой, возникающей в нулевой момент времени. Получено явное представление резольвентного оператора в случае аксиально-симметричного распределения поля. При возбуждении волновода линейным источником получено первичное и преобразованное поле. Установлено, что структура поля зависит от последовательности моментов включения источника и возникновения плазмы. Показано, что после возникновения плазмы поле приобретает осциллирующий характер.

Литература: 1. *Nerukh A., Scherbatko I., Marciniak M.* Electromagnetic wave frequency shift by temporal variation of medium parameters// Pr. Inst. Lacznosci., 110, 1998. 3. 7-27. 2. *Нерух А.Г.,Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО”Тест-радио”.1991. 279с. 3. *Борисов В.В.* Неустановившиеся поля в волноводах. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та. 4. *Сахненко Н.К., Нерух А.Г.* Нестационарное аксиально-симметричное излучение источника в плоском волноводе //Вісник Харківського національного університету. 2000. №467. С. 144-147.

Поступила в редколлегию17.05.2000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Буц В.А.

Сахненко Наталия Константиновна, ассистент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: распространение электромагнитных волн в нестационарных средах. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-72.

Нерух Александр Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: нестационарная электродинамика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-72.

УДК 537.877

РАСЧЕТ ИСКАЖЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИИ В РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ. III

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Предлагается решение задачи о распространении электромагнитного импульса по круглому волноводу с произвольной огибающей [1,2]. Используемый математический метод − интегральное преобразование Фурье. Рассматривается случай заданного распределения электромагнитного поля в пространстве.

Постановка задачи

Требуется найти электромагнитное поле, представимое потенциалом Герца:

$$\vec{\Pi}(r,z,t)=\vec{z}_0\Pi(r,z,t)\,, \qquad (1)$$

где функция $\Pi(r,z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Pi(r,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi(r,z,t)}{\partial t^2}=0\,, \qquad (2)$$

начальным условиям

$$t=0 \qquad \Pi(r,z,0)=u(r,z)\,, \qquad (3а)$$

$$t=0 \quad \left.\frac{d}{dt}\Pi(r,z,t)\right|_{t=0}=v(r,z)\,, \qquad (3б)$$

здесь $u(r,z)$ и $v(r,z)$ должны быть известными (заданными по условию задачи) функциями; и граничному условию $E_z=0$ при $r=a$, т.е.

$$r=a\,,\ \frac{\partial^2\Pi(a,z,t)}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi(a,z,t)}{\partial t^2}=0\,. \qquad (4)$$

Решение задачи

Искомую функцию ищем в виде интеграла Фурье

$$\Pi(r,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A(h,r,t)\,e^{ihz}dh\,. \qquad (5)$$

Подставим искомое решение в виде (5) в уравнение (2):

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Pi(r,z,t)\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Pi(r,z,t)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}-h^2A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right]e^{ihz}dh=0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-h^2A=0\,. \qquad (6)$$

Поскольку переменные в цилиндрической системе координат разделяются, то решение уравнения (6) должно иметь вид

$$A(h,r,t)=\widetilde{A}(h)R(h,r)T(h,t)\,, \qquad (7)$$

где $\widetilde{A}(h)$ – пока будем рассматривать как произвольную константу.

Подставив (7) в (6), получим

$$\widetilde{A}(h)\left[T\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+T\frac{dR}{dr}-R\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}-h^2RT\right]=0\,,$$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}-h^2=\frac{1}{T}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}=-\frac{\omega^2}{c^2}(h)\,. \quad (8)$$

Из (8) следуют два уравнения:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}(h)-h^2\right]=0\,, \quad (9)$$

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=-\omega^2(h)\,. \quad (10)$$

Обозначим

$$\gamma^2=\frac{\omega^2}{c^2}(h)-h^2\equiv\gamma^2(h)\,. \quad (11)$$

Тогда, умножив (9) на r^2R, будем иметь

$$\gamma^2r^2\frac{d^2R}{d(\gamma r)^2}+(\gamma r)\frac{dR}{d(\gamma r)}+\gamma^2r^2=0\,,$$

$$R(h,r)=a(h)J_0(\gamma r)+b(h)H_0^{(1)}(\gamma r)\,, \quad (12)$$

где $b(h)=0$, так как поле не должно иметь особенностей внутри волновода; $a(h)$ выберем равным единице, поскольку в искомом решении общего вида (7) уже есть произвольная константа $\widetilde{A}(h)$ (или иначе – $a(h)$ включим в константу $\widetilde{A}(h)$).

Аналогично решение уравнения (10) представим в виде

$$T(h,t)=\alpha(h)e^{-i\omega(h)t}+\beta(h)e^{i\omega(h)t}\,. \quad (13)$$

Итак, согласно (7), (12), (13) имеем

$$A(h,r,t)=\widetilde{A}(h)\alpha(h)J_0(\gamma r)e^{-i\omega(h)t}+$$

$$+\widetilde{A}(h)\beta(h)J_0(\gamma r)e^{i\omega(h)t}=$$

$$=A_+(h)J_0(\gamma r)e^{-i\omega(h)t}+A_-(h)J_0(\gamma r)e^{i\omega(h)t}\,. (14)$$

Искомая функция $u(r,z,t)$ согласно (5) имеет вид

$$\Pi(r,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_+(h)J_0[\gamma(h)r]e^{ihz-i\omega(h)t}dh+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_-(h)J_0[\gamma(h)r]e^{ihz+i\omega(h)t}dh\,. \quad (15)$$

Известно, что во всех волноводах, кроме заполненных гиротронными средами, $\omega(h)=\omega(-h)$. Принимая во внимание, что $\gamma(-h)=\gamma(h)$ согласно (11) и заменяя h на $-h$ во втором слагаемом равенства (15), получаем

$$\Pi(r,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_+(h)J_0[\gamma(h)r]e^{ihz-i\omega(h)t}dh+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_-(-h)J_0[\gamma(h)r]e^{-ihz+i\omega(h)t}dh\,. \quad (16)$$

Формула (16) для $\Pi(r,z,t)$ определяет электромагнитное поле в комплексных амплитудах. Реальный физический процесс определяется вещественными функциями. Для того чтобы (16) была вещественной функцией, необходимо обязательное выполнение условия

$$A_-(-h)=A_+^*(h)\,,$$

где * означает комплексное сопряжение. Обозначим: $A_+(h)=\frac{1}{2}A(h)$. Тогда искомая функция примет окончательный вид:

$$\Pi(r,z,t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(h)J_0(\gamma r)e^{i(hz-\omega(h)t)}dh+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A^*(h)J_0(\gamma r)e^{-i(hz-\omega(h)t)}dh\,. \quad (17)$$

До сих пор $A(h)$, а следовательно, и $A^*(h)$ были произвольными константами. Определим их, воспользовавшись начальными условиями (3а) и (3б). Согласно (17) и (3а) имеем:

$$\Pi(r,z,0)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(h)J_0(\gamma r)e^{ihz}dh+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A^*(h)J_0(\gamma r)e^{-ihz}dh=u(r,z)\,. \quad (18^*)$$

Или, меняя h на $-h$ и пределы интегрирования во втором слагаемом

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(h)J_0(\gamma r)e^{ihz}dh+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A^*(-h)J_0(\gamma r)e^{ihz}dh=u(r,z)\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(h)+A^*(-h)}{2}J_0(\gamma r)e^{ihz}dh=u(r,z)\,. (18)$$

Умножая (18) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ihz}$ и интегрируя по z в пределах от $-\infty$ до ∞ (обратное преобразование Фурье), получаем

$$\frac{A(h)+A^*(-h)}{2}J_0(\gamma r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(r,z)e^{-ihz}dz\,. (19)$$

Аналогично используем начальное условие (3б) и (17). Найдем сначала производную по времени от функции $\Pi(r,z,t)$, определенной формулой (17):

$$\frac{d\Pi(r,z,t)}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(h))A(h)J_0(\gamma r)e^{i(hz-\omega t)}dh+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(h))A^*(h)J_0(\gamma r)e^{-i(hz-\omega t)}dh\,. \quad (20)$$

Подставим в (20) $t=0$ и воспользуемся (3б):

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega)A(h)J_0(\gamma r)e^{ihz}dh-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega)A^*(h)J_0(\gamma r)e^{-ihz}dh=v(r,z)\,. \quad (21)$$

Преобразуем интеграл (21) так же, как и (18*). Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$-[i\omega(h)]\frac{1}{2}[A(h)-A^*(-h)]J_0(\gamma r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}v(r,z)e^{-ihz}dz. \quad (22)$$

Итак, (19) и (22) можем записать в виде

$$\frac{A(h)+A^*(-h)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(r,z)}{J_0(\gamma r)}e^{-ihz}dz\,, \quad (23)$$

$$\frac{A(h)-A^*(-h)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\omega(h)}\frac{v(r,z)}{J_0(\gamma r)}e^{-ihz}dh\,. \quad (24)$$

Получим систему алгебраических уравнений относительно $A(h)$ и $A^*(-h)$. Складывая и вычитая (23), (24), соответственно, получаем

$$A(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{J_0(\gamma r)}[u(r,z)+\frac{i}{\omega(h)}v(r,z)]e^{-ihz}dz, \quad (25)$$

$$A^*(-h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{J_0(\gamma r)}[u(r,z)-\frac{i}{\omega(h)}v(r,z)]e^{-ihz}dz. \quad (26)$$

Напомним, что $\gamma(-h)=\gamma(h)$, $\omega(-h)=\omega(h)$. Заменим в (26) параметр $(-h)$ на h (так как $-\infty<h<\infty$ по определению), а также заменим z на $-z$ и порядок интегрирования по z, тогда получим из (26)

$$A^*(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{J_0(\gamma r)}[u(r,z)-\frac{i}{\omega(h)}v(r,z)]e^{-ihz}dz. \quad (27)$$

Действительно, (27) есть комплексно-сопряженное от (25). Если известны функции $u(r,z)$ и $v(r,z)$ (а они должны быть заданы по условию задачи), то тогда по ним находим $A(h)$ и $A^*(h)$ по формуле (25).

Пока у нас оставалась неизвестной постоянная разделения переменных в уравнении (8) – $\omega^2(h)$. Определим ее. Это можно сделать, воспользовавшись граничным условием (4) в постановке задачи:

$$E_z=\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Pi(r,z,t)\,. \quad (28)$$

Подставим сюда выражение $\Pi(r,z,t)$ из (17) и учтем обозначение (11):

$$E_z=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma^2A(h)J_0(\gamma r)e^{i(hz-\omega t)}dh+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma^2A^*(h)J_0(\gamma r)e^{-i(hz-\omega t)}dh\,. \quad (29)$$

Потребуем выполнения граничного условия (4)

$$E_z\big|_{r=a}=0\,,$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma^2A(h)J_0(\gamma a)e^{i(hz-\omega t)}dh+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma^2A^*(h)J_0(\gamma a)e^{-i(hz-\omega t)}dh\right\}=0\,. \quad (30)$$

Это граничное условие должно выполняться при любых значениях z и t ($-\infty<z<\infty$, $-\infty<t<\infty$). Его можно обеспечить только при условии

$$J_0(\gamma a)=0\,. \quad (31)$$

Отсюда следует, что

$$\gamma a=\mu_{0n}\,,\quad n=1,2,3,...\,, \quad (32)$$

где μ_{0n} – один из корней функции Бесселя (μ_{0n} – известные числа). Отсюда согласно (11) и (32):

$$\gamma^2a^2=\mu_{0n}^2\,,\left(\frac{\omega^2}{c^2}-h^2\right)a^2=\mu_{0n}^2\,,\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{\mu_{0n}^2}{a^2}+h^2, \quad (33)$$

$$\omega=\omega(h)=\frac{\mu_{0n}c}{a}\sqrt{1+\frac{h^2a^2}{\mu_{0n}^2}}\,, \quad (34)$$

а согласно (33)

$$\gamma=\frac{\mu_{0n}}{a}\,. \quad (35)$$

Из (35) видно, что для выполнения граничного условия при любых z и t необходимо, чтобы γ зависела от h и определялась величиной по формуле (35).

Перепишем основные формулы (17) и (25) с учетом результатов (35) и (34):

$$\Pi(r,z,t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(h)J_0(\mu_{0n}\frac{r}{a})e^{i(hz-\omega(h)t)}dh+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A^*(h)J_0(\mu_{0n}\frac{r}{a})e^{-i(hz-\omega(h)t)}dh\,, \quad (36)$$

$$A(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{J_0(\mu_{0n}\frac{r}{a})}\left[u(r,z)+\frac{i}{\omega(h)}v(r,z)\right]e^{-ihz}dz\ ,\tag{37}$$

где $$\omega(h)=\frac{\mu_{0n}c}{a}\sqrt{1+\frac{h^2a^2}{\mu_{0n}^2}}\ .\tag{38}$$

Вернемся к начальным условиям (3) в целях их уточнения. До сих пор было существенно только то, что функции $u(r,z)$ и $v(r,z)$ должны быть известными. Эти функции по своему смыслу есть потенциал Герца и его производная по t в фиксированный момент времени $t=0$, который определяет электромагнитное поле внутри волновода. Естественно, что и при $t=0$ должно выполняться граничное условие. Отсюда следует, что

$$u(r,z)=J_0(\mu_{0n}\frac{r}{a})v(z)\ ,\tag{39}$$

$$v(r,z)=J_0(\mu_{0n}\frac{r}{a})V(z)\ ,\tag{40}$$

где $v(z)$ и $V(z)$ уже могут быть произвольными (но должны быть известными по постановке задачи).

Учитывая (39), (40), формулу (37) следует переписать в виде

$$A(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[v(z)+\frac{i}{\omega(h)}V(z)\right]e^{-ihz}dz\ .\tag{37*}$$

Рассмотрим [3] пример, когда

$$v(z)=e^{-\frac{z^2}{2L^2}}\cos h_0z\ ,\ V(z)=0\ .\tag{41}$$

Подставив (41) в (37), получим

$$A(h)=\frac{L}{2}\left\{\exp\left[-\frac{L^2}{2}(h-h_0)^2\right]+\exp\left[-\frac{L^2}{2}(h+h_0)^2\right]\right\}=A^*(h).\tag{42}$$

Для вычисления $\Pi(r,z,t)$ подставим (42) в (36):

$$\Pi(r,z,t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{L^2}{2}(h-h_0)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\frac{L^2}{2}(h+h_0)^2\right]\right\}J_0(\mu_{0n}\frac{r}{a})e^{i[hz-\omega(h)t]}dh\ .\tag{43}$$

Если волновое число h_0, задаваемое в условии (4) таково, что при заданном радиусе волновода

$$\frac{1}{8}\frac{h_0^4a^4}{\mu_{0n}^4}<<1\ ,\tag{44}$$

то (38) можно заменить приближенной формулой

$$\omega(h)\approx\frac{\mu_{0n}c}{a}\left(1+\frac{h^2a^2}{2\mu_{0n}^2}\right)\ .\tag{45}$$

Применяемую процедуру можно строго обосновать, производя оценку интеграла методом стационарной фазы.

Вводя в (45) обозначения

$$\nu_n=\frac{\mu_{0n}c}{a}\ ,\quad \alpha_n^2=\frac{a^2}{\mu_{0n}^2}\ ,\tag{46}$$

формулу (45) перепишем в виде

$$\omega_n(h)=\nu_n\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{\mu_{0n}^2}\right).\tag{47}$$

Подставляя (47) в интеграл (43) и пользуясь готовым результатом Джексона, получаем:

$$\Pi(r,z,t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\exp[-(z-\nu\alpha^2h_0t)^2/2L^2(1+i\alpha^2\nu t/L^2)]}{\sqrt{1+(i\alpha^2\nu t/L^2)}}\times\right.$$
$$\times\exp[ih_0z-i\nu(1+h_0^2\alpha^2/2)t]+\tag{48}$$
$$+\frac{\exp[-(z+\nu\alpha^2h_0t)^2/2L^2(1+i\alpha^2\nu t/L^2)]}{\sqrt{1+(i\alpha^2\nu t/L^2)}}\times$$
$$\left.\times\exp[-ih_0z-i\nu(1+h_0^2\alpha^2/2)t]\right\}J_0(\mu_{0n}\frac{r}{a})\ .$$

Физический анализ огибающей электромагнитного импульса будет приведен в следующей статье.

В частности, групповая скорость (по точной формуле (38)) равна

$$v_{\text{гр}}=\left.\frac{d\omega(h)}{dh}\right|_{h=h_0}=\frac{\mu_{0n}c}{a}\frac{h_0a^2}{\mu_{0n}^2}\frac{1}{\sqrt{1+h_0^2a^2/\mu_{0n}^2}}=$$
$$=c\frac{h_0a}{\mu_{0n}}\frac{1}{\sqrt{1+h_0^2a^2/\mu_{0n}^2}}\ .$$

Литература: 1. *Чумаченко С.В.* Расчет искажения огибающей электромагнитного импульса при его распространении в регулярном волноводе. Основные положения. I // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №4. С.10-12. 2. *Чумаченко С.В.* Расчет искажения огибающей электромагнитного импульса при его распространении в регулярном волноводе. Основные положения. II // Радиоэлектроника и информатика. 2000. №1. С.19-23. 3. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702с.

Поступила в редколлегию 19.02.2000

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руженцев И.В.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, ассистент кафедры АПВТ ХТУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.