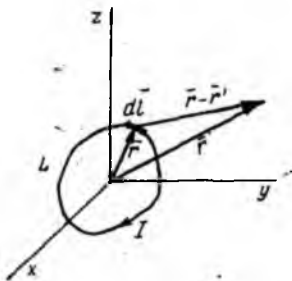


В. А. АРТЕМЕНКО, канд. техн. наук, Б. В. ДЗЮНДЗЮК, канд. техн. наук,  
В. К. ЯРМОЛЮК, канд. физ.-мат. наук

## РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТУРОВ С ТОКОМ.

### СООБЩЕНИЕ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ

Электротехнические и радиотехнические устройства создают вокруг себя магнитное поле. Наличие в какой-либо области пространства магнитного поля можно обнаружить по ряду характерных признаков, в частности по возникновению ЭДС в движущихся и в замкнутых проводниках, по механическому воздействию на находящиеся в этом поле проводники с током или движущиеся заряженные частицы. Указанные проявления зачастую создают помехи, например, при проведении точных электромагнитных измерений вблизи помехонесущих источников. Кроме того, следует учитывать воздействие переменных магнитных полей, которое еще недостаточно полно изучено, на живые организмы, особенно в сочетании



с СВЧ-полями [1]. Поэтому прогнозирование напряженности создаваемого магнитного поля еще на стадии проектирования в целях принятия мер для ослабления его вредного влияния (например, экранирования) имеет достаточно важное значение.

Рассмотрим метод расчета квазистационарного электромагнитного поля. Полагаем, что длина волны  $\lambda$  помехонесущего поля значительно больше, чем расстояние  $r$  от источника помех. Это равносильно пренебрежению запаздыванием или допущению, согласно которому поле в какой-либо фиксированный момент времени определяется мгновенным значением тока в тот же момент времени.

Пусть произвольно расположенный в пространстве контур (рисунок) обтекается током  $I$ . Требуется определить создаваемое

мое им магнитное поле в произвольной точке  $A$ . Векторный потенциал этого поля [2]

$$\bar{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{d\bar{l}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|}. \quad (1)$$

В общем случае контурный интеграл в выражении (1) вычислить сложно. Поэтому разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора. Рассматривая поле вдали от контура, т. е. при выполнении условия  $r'/r \ll 1$ , и ограничиваясь в разложении членами второго порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} &= [r^2 + (r')^2 - 2\bar{r} \cdot \bar{r}']^{-1/2} \cong \\ &\cong \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2}{r^4} - \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

При учете (2) выражение (1) приобретает вид

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\mu I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\bar{l}' + \frac{1}{r^3} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' + \right. \\ &\left. + \frac{3}{2r^5} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{l}' - \frac{1}{2r^3} \oint (r')^2 d\bar{l}' \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Напряженность магнитного поля найдем из соотношения

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A}. \quad (4)$$

Тогда, используя (3), имеем

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{I}{4\pi} \left\{ \text{rot} \left( \frac{1}{r} \oint d\bar{l}' \right) + \text{rot} \left[ \frac{1}{r^3} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' \right] + \right. \\ &\left. + \text{rot} \left[ \frac{3}{2r^5} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{l}' - \frac{1}{2r^3} \oint (r')^2 d\bar{l}' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для упрощения записи индекс  $L$  у контурного интеграла в дальнейшем опускаем. Выражение (5) характеризует разложение по мультиполям с точностью до мультиполя второго порядка. Очевидно, первый член в формуле (5) равен нулю в силу замкнутости контура. Второй член описывает диполь, третий — квадруполь. Явные выражения для дипольной и квадрупольной составляющей получим отдельно.

Дипольная составляющая напряженности магнитного поля

$$\bar{H}^{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi} \left[ \text{rot} \frac{1}{r^3} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' \right] =$$

$$= \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} \operatorname{rot} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' + \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} \times \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' \right] =$$

$$= \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') \operatorname{rot} d\bar{l}' + \frac{1}{r^3} \oint \operatorname{grad}(\bar{r} \cdot \bar{r}') \times d\bar{l}' - \frac{3\bar{r}}{r^5} \times \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' \right].$$

Здесь использовано известное равенство векторного анализа [3]

$$\operatorname{rot}(\varphi \bar{A}) = \varphi \operatorname{rot} \bar{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \bar{A}.$$

Для операции  $\operatorname{grad}$  вектор  $\bar{r}'$  является постоянным, поэтому  $\operatorname{grad}(\bar{r} \cdot \bar{r}') = \bar{r}'$ . И так как  $\operatorname{rot} d\bar{l}' \equiv 0$ , окончательно получим

$$\bar{H}_{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} \oint \bar{r}' \times d\bar{l}' - \frac{3\bar{r}}{r^5} \times \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' \right]. \quad (6)$$

Декартовы компоненты дипольной составляющей напряженности магнитного поля определяются скалярным умножением выражения (6) на соответствующий единичный вектор. Например,

$$H_x^{\text{дип}} = \bar{i} \cdot \bar{H}_{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi r^3} \oint \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ dx' & dy' & dz' \end{vmatrix} - \frac{3I}{4\pi r^5} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{I}{4\pi r^3} [(\oint y' dz' - z' dy') \cos^2 \alpha - (\oint 2y' dz' + z' dy') \cos^2 \beta +$$

$$+ (\oint y' dz' + 2z' dy') \cos^2 \gamma - 3(\oint x' dz') \cos \alpha \cos \beta +$$

$$+ 3(\oint x' dy' (\cos \alpha \cos \gamma + 3(\oint y' dy' - z' dz') \cos \beta \cos \gamma), \quad (7)$$

где  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ,  $\cos \beta = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \gamma = \frac{z}{r}$  — направляющие косинусы вектора  $\bar{r}$ . В общем виде можно записать

$$H_t^{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi r^3} (L_{xx}^t \cos^2 \alpha + L_{yy}^t \cos^2 \beta + L_{zz}^t \cos^2 \gamma +$$

$$+ L_{xy}^t \cos \alpha \cos \beta + L_{yz}^t \cos \beta \cos \gamma + L_{xz}^t \cos \alpha \cos \gamma), \quad (8)$$

где  $t$  принимает значения  $x, y, z$  и коэффициенты  $L^x$  определяются выражением (7)

$$L_{xx}^x = \oint y' dz' - z' dy'; \quad L_{yy}^x = -\oint 2y' dz' + z' dy';$$

$$L_{zz}^x = \oint y' dz' + 2z' dy'; \quad L_{xy}^x = -3\oint x' dz';$$

$$L_{xz}^x = 3\oint x' dy'; \quad L_{yz}^x = 3\oint y' dy' - z' dz'.$$

Коэффициенты  $L^y L^z$  несложно получить из коэффициентов  $L^x$  циклической перестановкой трех индексов одновременно. Например,

если  $L^x_{xx} = \oint y' dz' - z' dy'$ , то  $L^z_{zz} = \oint x' dy' - y' dx'$ ;

если  $L^x_{yz} = 3\oint y' dy' - z' dz'$ , то  $L^y_{zx} = 3\oint z' dz' - x' dx''$ .

Таким образом, выражение (8) определяет любую декартову компоненту дипольной составляющей напряженности магнитного поля.

Квадрупольная составляющая  $\bar{H}^{KB}$  описывается третьим членом выражения (5):

$$\begin{aligned} \bar{H}^{KB} &= \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \left[ \frac{3}{2r^5} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{l}' - \frac{1}{2r^3} \oint (r')^2 d\bar{l}' \right] = \\ &= \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{3}{2r^5} \operatorname{rot} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{l}' + \frac{3}{2} \operatorname{grad} \frac{1}{r^5} \times \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} \times \oint (r')^2 d\bar{l}' = \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{3}{r^6} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') (\bar{r}' \times d\bar{l}') - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{15}{2r^7} \bar{r} \times \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{l}' + \frac{3}{2r^5} \bar{r} \times \oint (r')^2 d\bar{l}' \right] \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Декартовы компоненты поля квадруполь, как и ранее, определяются скалярным умножением выражения (9) на соответствующий единичный вектор. Например,

$$H_x^{KB} = \bar{i} \cdot \bar{H}^{KB}. \quad (10)$$

Опуская простые, но громоздкие преобразования, компоненты поля квадруполь записываем в виде

$$\begin{aligned} H_t^{KB} &= \frac{3I}{8\pi r^4} (L^t_{xxx} \cos^3 \alpha + L^t_{yyy} \cos^3 \beta + L^t_{zzz} \cos^3 \gamma + \\ &+ L^t_{xxy} \cos^2 \alpha \cos \beta + L^t_{xxb} \cos^2 \alpha \cos \gamma + L^t_{xyy} \cos \alpha \cos^2 \beta + \\ &+ L^t_{yyz} \cos^2 \beta \cos \gamma + L^t_{xzz} \cos \alpha \cos^2 \gamma + L^t_{yzz} \cos \beta \cos^2 \gamma + \\ &+ L^t_{xyz} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma), \quad (11) \end{aligned}$$

где  $t=x, y, z$  и коэффициенты  $L^x$  определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned} L^x_{xxx} &= 2\oint x'y' dz' - 2\oint x'z' dy', \\ L^x_{yyy} &= -\oint [2(y')^2 - (x')^2 - (z')^2] dz' - 2\oint z'y' dy', \end{aligned}$$

$$L_{zzz}^x = \oint [2(z')^2 - (x')^2 - (y')^2] dy' + 2\oint z'y'dy',$$

$$L_{xxy}^x = -\oint [4(x')^2 - 3(y')^2 - (z')^2] dz' - 2\oint y'z'dy',$$

$$L_{xxz}^x = \oint [4(x')^2 - (y')^2 - 3(z')^2] dy' + 2\oint y'z'dz',$$

$$L_{xyy}^x = -8\oint x'y'dz' - 2\oint x'z'dy',$$

$$L_{yyz}^x = \oint [4(y')^2 - (x')^2 - 3(z')^2] dy' - 8\oint y'z'dz',$$

$$L_{xzz}^x = 8\oint x'z'dy' + 2\oint x'y'dz',$$

$$L_{yzz}^x = -\oint [4(z')^2 - (x')^2 - 3(y')^2] dz' + 8\oint y'z'dy',$$

$$L_{xyz}^x = 10\oint x'y'dy' - 10\oint x'z'dz'.$$

Коэффициенты  $L^y$ ,  $L^z$ , как и ранее, могут быть получены из коэффициентов  $L^x$  циклической перестановкой четырех индексов одновременно. Например, из последнего выражения для  $L_{xyz}^x$  вытекает, что

$$L_{yxz}^y = 10\oint y'z'dz' - 10\oint y'x'dx'.$$

Остальные коэффициенты получаем аналогично. Итак, выражения (8), (11) полностью определяют компоненты поля в декартовой системе координат.

Иногда возникает необходимость найти компоненты поля по другим направлениям в какой-либо криволинейной системе координат. Пусть криволинейные координаты  $u_1, u_2, u_3$  связаны с декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$  зависимостями  $x_1 = f_1(u_1, u_2, u_3)$ ;  $x_2 = f_2(u_1, u_2, u_3)$ ;  $x_3 = f_3(u_1, u_2, u_3)$ . Тогда для перехода от компонент  $A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}$  к компонентам  $A_1, A_2, A_3$  криволинейной системы координат приведем формулу преобразования [4]

$$A_i = \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 A_{x_k} \frac{\partial f_k}{\partial u_i} = H_i \sum_{k=1}^3 A_{x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

где

$$H_i^2 = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial u_i} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя эту формулу, легко получить компоненты поля в криволинейных системах: цилиндрической

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z;$$

$$H_\rho = \frac{xH_x + yH_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad H_\varphi = \frac{-yH_x + xH_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (12)$$

$$H_z = H_s,$$

сферической

$$x = r \cos \varphi \sin \theta; \quad y = r \sin \varphi \cos \theta; \quad z = r \cos \theta;$$

$$H_r = H_x \frac{x}{r} + H_y \frac{y}{r} + H_z \frac{z}{r}; \quad H_\varphi = \frac{-yH_x + xH_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (13)$$

$$H_\theta = \frac{xzH_x}{r\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{yzH_y}{r\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{H_z\sqrt{x^2 + y^2}}{r}.$$

Если требуется найти только радиальную компоненту поля, то вычисление декартовых компонент не обязательно. Указанную компоненту можно получить более простым путем непосредственно из выражения (6).

Умножая выражение (6) скалярно на вектор  $\bar{r}^0$ , имеем

$$\begin{aligned} H_r^{\text{дин}} &= \frac{I\bar{r}}{4\pi r} \left[ \frac{1}{r^2} \oint \bar{r}' \times d\bar{l}' - \frac{3\bar{r}}{r^3} \times \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' \right] = \\ &= \frac{I}{4\pi r^4} \oint \bar{r}' \times d\bar{l}', \end{aligned} \quad (14)$$

так как второй член при скалярном умножении на  $\bar{r}$  обращается в нуль. Выражение (14) нетрудно записать в координатном виде:

$$\begin{aligned} H_r^{\text{дин}} &= \frac{I}{4\pi r^3} [\cos \alpha \oint (y' dz' - z' dy') + \cos \beta \oint (z' dx' - x' dz') + \\ &+ \cos \gamma \oint (x' dy' - y' dx')]. \end{aligned} \quad (15)$$

Как следует из выражения (9), радиальная компонента квадрупольной составляющей

$$\begin{aligned} H_r^{\text{кв}} &= \frac{I\bar{r}}{4\pi r} \left[ \frac{3}{r^5} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') (\bar{r}' \times d\bar{l}') - \frac{15}{2r^7} \bar{r} \times \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{l}' + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2r^5} \bar{r} \times \oint (r')^2 d\bar{l}' \right] = \frac{3I\bar{r}}{4\pi r^6} \oint (\bar{r} \cdot \bar{r}') (\bar{r}' \times d\bar{l}'), \end{aligned} \quad (16)$$

так как второй и третий члены после скалярного умножения на  $\bar{r}$  обращаются в нуль. В координатном виде

$$\begin{aligned} H_r^{\text{кв}} &= \frac{3I}{4\pi r^6} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) (xx' + yy' + zz') \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ dx' & dy' & dz' \end{vmatrix} = \\ &= \frac{3I}{4\pi r^4} \left\{ \cos^2 \alpha \oint x' (y' dz' - z' dy') + \cos^2 \beta \oint y' (z' dx' - x' dz') + \right. \\ &+ \left. \cos^2 \gamma \oint z' (x' dy' - y' dx') + \cos \alpha \cos \beta [\oint y' (y' dz' - z' dy') + \right. \\ &+ \left. \cos \beta \cos \gamma [\oint x' (x' dz' - z' dx') + \cos \gamma \cos \alpha [\oint z' (z' dx' - x' dz') + \right. \\ &+ \left. \left. \cos \alpha \cos \gamma [\oint x' (x' dy' - y' dx') + \cos \gamma \cos \beta [\oint y' (y' dx' - x' dy') + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \oint (x' dy' - y' dx') + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \oint (y' dz' - z' dy') + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \oint (z' dx' - x' dz') \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \oint x' (x' dy' - y' dx') + \cos \alpha \cos \gamma [\oint z' (y' dz' - z' dy') + \\
& + \oint x' (x' dy' - y' dx') + \cos \beta \cos \gamma [\oint z' (z' dx' - x' dz') + \\
& + \oint y' (x' dy' - y' dx')]]. \quad (17)
\end{aligned}$$

Полное выражение для радиальной компоненты магнитного поля получим суммированием (15) и (17):

$$H_r = H_r^{\text{дип}} + H_r^{\text{кв}}.$$

Приведенные в данной статье формулы позволяют при относительно несложных распределениях (в частности, для плоских контуров простой конфигурации) токов вычислить все компоненты создаваемого ими магнитного поля. В случае более сложных распределений необходимо переходить к кусочно-линейной аппроксимации пространственных контуров, что значительно облегчит нахождение компонент магнитного поля.

**Список литературы:** 1. Минин Б. А. СВЧ и безопасность человека. М., 1974. 24 с. 2. Джексон Д. Классическая электродинамика. М., 1965. 702 с. 3. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1961. 426 с. 4. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М., 1961. 712 с.

Поступила в редколлегию 27.12.84.