УДК 681. 518

В. П. МАШТАЛИР, В. Я. ВИНАРСКИЙ, А. А. МАЙСТРЕНКО

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Во многих прикладных задачах обработки визуальной информации возникает необходимость анализа изображений, полученных при помощи нескольких датчиков или одного датчика, но в разное время. Математическими моделями возникающих при этом деформаций изображений являются группы геометрических преобразований. Знание параметров группы преобразований дает возможность определять ориентацию датчиков видеоинформации, компенсировать геометрические искажения и осуществлять опознание путем сравнения с эталоном. Реализация алгоритмов поиска коэффицентов преобразования в реальном масштабе времени на современных микропроцессорных средствах предъявляет ряд требований к методам вычисления неизвестного элемента группы. В частности, алгоритмы должны обладать ограниченной вычислительной сложностью, допускать возможность обработки изображений по отдельным фрагментам.

Настоящая работа посвящена разработке эффективного алгоритма определения параметров произвольной группы геометрических преобразований, сводящего вычисления к решению последовательности систем линейных уравнений.

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области $D \subset E_2$, называемой полем зрения датчика видеоинформации, наблюдаются изображения трехмерных сцен $F(x, t)$, $x \in E_2$, t — время. Значения функции $F(x, t)$ определяются выражением $F(x, t) = \lambda(x, t) B(x, t) + \{1 - \lambda(x, t)\} \Phi(x, t) + n(x, t)$, $\forall x \in D$, где $\lambda(x, t)$ — характеристическая функция изображения $B(x, t)$ анализируемого объекта,

$$\lambda(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D^*, \\ 0, & \text{если } x \in D/D^*, \end{cases}$$

$D^* \subset D$ — носитель функции распределения яркостей $B(x, t)$; $\Phi(x, t)$ — функция распределения яркостей изображений фоновых объектов; $n(x, t)$ — аддитивный шум, обусловленный флуктуациями атмосферы, внутренними шумами датчика видеоинформации и т. д. Для простоты дальнейшей записи положим, что датчик видеоинформации и фоновые объекты неподвижны. Тогда евклидовы движения объекта в E_3 индуцируют изменения изображений сцен в E_2 и в некоторые фиксированные моменты времени t_2, t_1 ($t_2 \to t_1 + 0$. Этот случай соответствует анализу последовательности изображений, получаемой в реальном масштабе времени) связаны следующим соотношением:

$$F(x, t_2) = \lambda(T_g x, t_1) B(T_g x, t_1) + \{1 - \lambda(T_g x, t_1)\} \Phi(x, t_1) + n(x, t_1), \tag{1}$$

где T_g — действие r — параметрической группы G, т. е. $T: G \times \times D \to D$. Потребуем, чтобы преобразования были эффективны и невырожденны, т. е. $\forall x T_g x = x$ только при $g = e$, $g, e \in G$, e — единица группы и, если $T_g x = (T_g^1(x_1, x_2), \quad T_g^2(x_1, x_2))$, то

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T_g^1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_g^1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial T_g^2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_g^2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Кроме того, потребуем, чтобы $B(x, t) \in C^2(D)$.

Задача заключается в нахождении элемента g по двум изображениям сцен $F(x, t_1)$ и $F(x, t_2)$.

Предположим, что задача фильтрации и выделения изображения из фона решена, тогда равенство (1) примет вид

$$B_{t_2}(x_1, x_2) = B_{t_1}(T_g^1(x_1, x_2), \; T_g^2(x_1, x_2)). \tag{2}$$

Очевидно, что при $t_2 \to t_1 + 0$, $g \to e$. Ограничившись линейной частью, запишем разложение функции $B_{t_1}(T_g^1(x_1, x_2), T_g^2(x_1, x_2))$ в ряд Тейлора по степеням преобразования в окрестности единицы группы:

$$B_{t_2}(x_1, x_2) = B_{t_1}(T_g^1(x_1, x_2), \; T_g^2(x_1, x_2))\Big|_{g=e} + \left\{ \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial B_{t_1}(x_1, x_2)}{\partial x_1} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \frac{\partial T_g^1(x_1, x_2)}{\partial \hat{g}_i}\Big|_{g=e} + \frac{\partial B_{t_1}(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial T_g^2(x_1, x_2)}{\partial \hat{g}_i}\Big|_{g=e} \right) (\hat{g}_i - \hat{e}_i) \right\} +$$
$$+ R_2(g, x_1, x_2), \tag{3}$$

где $\hat{g} = (\hat{g}_1, \; \hat{g}_2, \; \ldots, \; \hat{g}_r) \in E_r$ — вектор параметров преобразования T_g; $\hat{e} = (\hat{e}_1, \; \hat{e}_2, \; \ldots, \; \hat{e}_r) \in E_r$ — вектор, описывающий тождественное преобразование; $R_2(g, x_1, x_2)$ — остаточный член.

Разложение (3) выполняется для всех точек поля зрения, принадлежащих носителю изображений $\hat{D} = D^*_{t_1} \cup D^*_{t_2}$. Учитывая цифровую форму представления изображений, выделяя точки $(x_1^l, \; x_2^l) \in \hat{D}^*$, получаем систему линейных уравнений: $\Delta b = P\hat{g}$ **(4)**, где $\Delta B = B_{t_2}(x_1^l, \; x_2^l) - B_{t_1}(x_1^l, \; x_2^l)$ — вектор $L \times 1$, $L \leqslant N$, N — количество дискретных отсчетов в поле зрения; P — матрица $L \times r$, определяемая выражением под знаком суммы соотношения (3); $\hat{g}$ — вектор $r \times 1$ неизвестных параметров преобразования. Таким образом, $\hat{g} = P^{+} \Delta B$ **(5)**, где P^{+} — псевдообратная матрица.

Для поиска решения в виде (5) системы (4) одновременно с определением ΔB будем методом Гревилля [1] вычислять матрицу P^{+}. Пусть p_k — k-й столбец матрицы P, $k=\overline{1,\ r}$; $P_k = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k)$ — матрица, образованная первыми k-столбцами матрицы P; q_k — последняя строка матрицы P_k^{+}. Тогда $P_1^{+} = P_1^{+} = p_1^{\mathrm{T}}\,(p_1^{\mathrm{T}}p_1)^{-1}$, если $p_1 = 0$, то $P_1^{+} = 0$,

$$P_k^{+} = \begin{pmatrix} Q_k \\ q_k \end{pmatrix},\ Q_k = P_{k-1}^{+} + d_k q_k,\ d_k = P_{k-1}^{+} p_k, \tag{6}$$

$$q_k = \begin{cases} (p_k - P_{k-1}d_k)^{+}, & \text{если } P_k \neq p_{k-1}d_k, \\ (1 + d_k^{\mathrm{T}} d_k)^{-1} d_k^{\mathrm{T}} P_{k-1}^{+}, & \text{если } P_k = p_{k-1}d_k. \end{cases}$$

Пусть найденному решению $\hat{g}$ соответствует элемент группы g^0. Если действие группы нелинейно, то, поскольку в разложении (3) учитывается только линейная часть, может оказаться, что $\rho_G(g,\ g^0) \leqslant \varepsilon_0 \leqslant \rho_G(g,\ e)$, но достаточно велико; это означает

$$\rho_B\left(B_{t_2}(x_1,\ x_2),\ B_{t_1}\left(T^1_{g^0}(x_1,\ x_2),\ T^2_{g^0}(x_1,\ x_2)\right)\right) > \delta.$$

Здесь δ — требуемая точность приведения изображения к эталонному виду; ρ_G — метрика на группе преобразований; ρ_B — метрика в пространстве изображений.

Для более точного определения g воспользуемся итерационной процедурой, в которой на $m+1$ шаге с целью составления системы (3) будем разлагать функцию $B_{t_1}\left(T^1_g(x_1,\ x_2),\ T^2_g(x_1,\ x_2)\right)$ в ряд Тейлора в окрестности уже найденного элемента группы g^m. При этом

$$B_{t_2}(x_1,\ x_2) = B^m_{t_1}(x_1,\ x_2) + \left\{ \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial B^m_{t_1}(x_1,\ x_2)}{\partial x_1} \left.\frac{\partial T^1_g(x_1,\ x_2)}{\partial \hat{g}_i}\right|_{g=g^m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial B^m_{t_1}(x_1,\ x_2)}{\partial x_2} \left.\frac{\partial T^2_g(x_1,\ x_2)}{\partial \hat{g}_i}\right|_{g=g^m} \right) (\hat{g}_i - \hat{g}^m_i) \right\} + R_2(g^m,\ x_1,\ x_2), \tag{7}$$

где $B^m_{t_1}(x_1,\ x_2) = B_{t_1}\left(T^1_{g^m}(x_1,\ x_2),\ T^2_{g^m}(x_1,\ x_2)\right)$.

Проанализируем сходимость указанного процесса. Найдем связь ошибки $\rho_G(g,\ g^m) = \varepsilon_{m+1}$ на $m+1$ шаге итерации с ошибкой на предыдущем шаге. Учитывая равенство (2), перепишем разложение (7) в виде

$$B_{t_2}(x_1,\ x_2) = B_{t_1}\left(T^1_g(x_1,\ x_2),\ T^2_g(x_1,\ x_2)\right) = \bar{B}\left(T^1_{g^m}(x_1,\ x_2),\right.$$
$$\left. T^2_{g^m}(x_1,\ x_2)\right) + R_2(g^m,\ x_1,\ x_2).$$

Отсюда $\forall\,(x_1,\ x_2) \in \hat{D}^*$ и выполняется условие

$$\left| B_{t_1}\left(T^1_g(x_1,\ x_2),\ T^2_g(x_1,\ x_2)\right) - \bar{B}_{t_1}\left(T^1_{g^m}(x_1,\ x_2),\ T^2_{g^m}(x_1,\ x_2)\right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(x_1,x_2)\in\hat{D}^*} \left| R_2(g^m,\ x_1,\ x_2) \right|. \tag{8}$$

Остаточный член разложения (7) имеет вид

$$R_2(g^m, x_1, x_2) = \sum_{i=1}\left(\frac{\partial^2 B^m_{t_1}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 T^1_g(x_1, x_2)}{\partial \hat{g}_i^2}\bigg|_{g=g^m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 B^m_{t_1}(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2 T^2_g(x_1, x_2)}{\partial \hat{g}_i^2}\bigg|_{g=g^m}\right)\frac{(\hat{g}_i - \hat{g}_i^m)}{2}.$$

Учитывая, что область D ограничена и замкнута и $B_{t_1}(x_1, x_2) \in C^2(D)$, получаем существование величины

$$M = \max_{i=\overline{1,r}} \max_{(x_1 x_2)\in\hat{D}^*} \max_{g: \rho_G(g, g^m) < \varepsilon_m}\left|\frac{\partial^2 B^m_{t_1}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 T^1_g(x_1, x_2)}{\partial \hat{g}_i^2}\bigg|_{g=g^m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 B^m_{t_1}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 T^2_g(x_1, x_2)}{\partial \hat{g}_i^2}\bigg|_{g=g^m}\right|.$$

Тогда $\max\limits_{(x_1, x_2)\in\hat{D}^*} |R_2(g^m, x_1, x_2) \leqslant \sum\limits_{i=1}\frac{1}{2}\varepsilon_m^2 M = \frac{1}{2} r\varepsilon_m^2 M.$

Подставляя полученную оценку в неравенство (8), находим

$$|B_{t_1}(T^1_g(x_1, x_2), T^2_g(x_1, x_2)) - \overline{B}_{t_1}(T^1_{g^m}(x_1, x_2), T^{2m}_g(x_1, x_2))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} r\varepsilon_m^2 M. \qquad (9)$$

Рассмотрим модуль непрерывности функции $B_t(T^1_g(x_1, x_2), T^2_g(x_1, x_2))$ [2]:

$$\omega(\varepsilon_m) = \max_{(x_1 x_2)\in\hat{D}^*} \max_{\rho_G(g, g^m) < \varepsilon} |B_{t_1}(T^1_g(x_1, x_2), T^2_g(x_1, x_2)) -$$

$$- B_{t_1}(T^1_{g^m}(x_1, x_2), T^2_{g^m}(x_1, x_2))|. \qquad (10)$$

Поскольку функция $\omega(\varepsilon_m)$ по определению непрерывна и монотонна, существует обратная функция $\omega^{-1}(\varepsilon)$. Из соотношений (9) и (10) выводим $\rho_G(g, g_m) \leqslant \omega^{-1}\left(\frac{1}{2} r\varepsilon_m^2 M\right)$.

Найдем мажорирующую оценку для $\rho_G(g, g^m)$. Предположим, что функция $\omega^{-1}\left(\frac{1}{2} r\varepsilon_m^2 M\right)$ дважды дифференцируема в нуле, тогда, раскладывая ее в ряд Маклорена, имеем

$$\rho_G(g, g^m) \leqslant \omega^{-1}\left(\frac{1}{2} r\varepsilon_m^2 M\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_m^2 rM\left(\omega^{-1}\left(\frac{1}{2} r\varepsilon_m^2 M\right)\right)'\bigg|_{\varepsilon_m=0} +$$

$$+ 0(\varepsilon_m^2) = cu^2 + 0(u^2),$$

где $c = \frac{1}{2} rM\left(\omega^{-1}\left(\frac{1}{2} r\varepsilon_m^2 M\right)\right)'\Big|_{\varepsilon_m=0}$, $u = \varepsilon_m$.

Докажем, что $\forall \alpha > 0 \exists \beta : \forall u < \beta$ выполняется неравенство $cu^2 + 0(u^2) \leqslant \alpha u$. Доказательство проведем от противного. Пусть для выбранного произвольного α и последовательности $\{u_k\} \underset{k\to\infty}{\to} +0$ справедливо соотношение $\alpha u_k < cu_k^2 + 0(u_k^2)$. Тогда $cu_k^2 > \alpha u_k + 0(u_k^2)$ или $c > \frac{\alpha}{u_k} + \frac{0(u_k^2)}{u_k^2}$. Переходя к пределу, имеем

$$c \geqslant \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\alpha}{u_k} + \frac{0(u_k^2)}{u_k^2}\right) = \infty,$$

что является противоречием. Следовательно, выбирая $\alpha < 1$, окончательно получаем

$$\rho_G(g, g^m) = \varepsilon_{m+1} \leqslant \alpha\varepsilon_m \leqslant \alpha^{m+1}\varepsilon_0.$$

Таким образом, при сделанных предположениях процесс нахождения элемента группы сходится. Однако при реализации на ЭВМ вследствие систематических ошибок, вносимых вычислительной моделью составления и решения системы (4), он сходится лишь к некоторой окрестности точного решения.

Рассмотрим $m+1$ шаг итерации в случае, когда деформации изображений моделируются группой кремоновых преобразований вида

$$B_{t_2}(x_1, x_2) = B_{t_1}\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3}{a_4x_1 + a_5x_2 + a_6}, \frac{a_7x_1 + a_8x_2 + a_9}{a_{10}x_1 + a_{11}x_2 + a_{12}}\right).$$

Соотношение (7) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} B_{t_2}(x_1, x_2) - B_{t_1}^m(x_1, x_2) = \frac{\partial B_{t_1}^m(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Bigg\{ x_1b_1 + x_2b_2 + b_3 - \\ - \frac{x_1(a_1^mx_1 + a_2^mx_2 + a_3^m)}{(a_4^mx_1 + a_5^mx_2 + a_6^m)^2} b_4 - \frac{x_2(a_1^mx_1 + a_2^mx_2 + a_3^m)}{(a_4^mx_1 + a_5^mx_2 + a_6^m)^2} b_5 - \\ - \frac{a_1^mx_1 + a_2^mx_2 + a_1^m}{(a_4^m x_1 + a_5^mx_2 + a_6^m)^2} b_6 \Bigg\} + \frac{\partial B_{t_1}^m(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Bigg\{ x_1b_7 + x_2b_8 + b_9 - \\ - \frac{x_1(a_7^mx_1 + a_8^mx_2 + a_9^m)}{(a_{10}^mx_1 + a_{11}^mx_2 + a_{12}^m)^2} b_{10} - \frac{x_2(a_7^mx_1 + a_8^mx_2 + a_9^m)}{(a_{10}^mx_1 + a_{11}^mx_2 + a_{12}^m)^2} b_{11} - \\ - \frac{a_7^mx_1 + a_8^mx_2 + a_9^m}{(a_{10}^mx_1 + a_{11}^mx_2 + a_{12}^m)^2} b_{12} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $B_{t_1}^m(x_1, x_2) = B_{t_1}\left(\frac{a_1^mx_1 + a_2^mx_2 + a_3^m}{a_4^mx_1 + a_5^mx_2 + a_6^m}, \frac{a_7^m x_1 + a_8^mx_2 + a_9^m}{a_{10}^mx_1 + a_{11}^mx_2 + a_{12}^m}\right)$, $b_i = a_i - a_i^m$, a_i^m — решение, полученное на предыдущем шаге, $i =$

$=\overline{1,\ 12}$. Полагая, что $\{(x_1, x_2)\in D \mid x_1\in[0, d_1], x_2\in[0, d_2]\}$, и анализируется точка $(x_1^0, x_2^0)\in D$. Чтобы избежать операции численного дифференцирования, вычислим интегралы с переменными верхними пределами от обеих частей равенства (11):

$$\int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}(B_{t_2}(x_1, x_2)-B_{t_1}^m(x_1, x_2))\,dx_2dx_1 = b_1\left\{x_1^0\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1^0, x_2)\,dx_2 -\right.$$

$$\left.-\int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)\,dx_2dx_1\right\} + b_2\int_0^{x_2^0}x_2B_{t_1}^m(x_1^0, x_2)dx_2 + b_3\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1^0,$$

$$x_2)\,dx_2 - b_4\left\{x_1^0\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1^0, x_2)f_1(x_1^0, x_2)\,dx_2 - \int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)V_1(x_1,\right.$$

$$\left.x_2)Z_1(x_1, x_2)\,dx_2dx_1\right\} - b_5\left\{\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1^0, x_2)\,x_2f_1(x_1^0, x_2)\,dx_2 -\right.$$

$$\left.-\int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)\,x_2V_2(x_1, x_2)Z_1(x_1, x_2)\,dx_2dx_1\right\} - b_6\left\{\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1^0,\right.$$

$$\left.x_2)f_1(x_1^0, x_2)\,dx_2 - \int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)V_2(x_1, x_2)Z_1(x_1, x_2)\,dx_2dx_1\right\} +$$

$$+ b_7\int_0^{x_1^0}x_1B_{t_1}^m(x_1, x_2^0)\,dx_1 + b_8\left\{x_2^0\int_0^{x_1^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2^0)\,dx_1 - \int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)\times\right.$$

$$\left.\times\,dx_2dx_1\right\} + b_9\int_0^{x_1^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2^0)\,dx_1 - b_{10}\left\{\int_0^{x_1^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2^0)\,x_1f_2(x_1, x_2^0)\times\right.$$

$$\left.\times\,dx_2 - \int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)\,x_1V_3(x_1, x_2)Z_2(x_1, x_2)\,dx_2dx_1\right\} -$$

$$-b_{11}\left\{x_2^0\int_0^{x_1^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2^0)f_2(x_1, x_2^0)\,dx_1 - \int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)V_4(x_1, x_2)Z_2(x_1,\right.$$

$$\left.x_2)\,dx_2dx_1\right\} - b_{12}\left\{\int_0^{x_1^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2^0)f_2(x_1, x_2^0)\,dx_1 -\right.$$

$$\left.-\int_0^{x_1^0}\int_0^{x_2^0}B_{t_1}^m(x_1, x_2)V_3(x_1, x_2)Z_2(x_1, x_2)\,dx_2dx_1\right\},$$

где

$$f_1(x_1^0, x_2) = (a_1^mx_1^0 + a_2^mx_2 + a_3^m)\,(a_4^mx_1^0 + a_5^mx_2 + a_6^m)^{-2};$$

$$f_2(x_1,\ x_2^0) = (a_7^m x_1 + a_8^m x_2^0 + a_9^m)(a_{10}^m x_1 + a_{11}^m x_2^0 + a_{12}^m)^{-2};$$

$$V_1(x_1,\ x_2) = a_2^m (a_5^m)^2 x_2^3 + a_4^m (2a_1^m a_5^m - a_2^m a_4^m) x_1^2 x_2 +$$
$$+ 2a_1^m (a_5^m)^2 x_1 x_2^2 + a_4^m (2a_1^m a_6^m - a_3^m a_4^m) x_1^2 + a_5^m (2a_2^m a_6^m + a_3^m a_5^m) x_2^2 +$$
$$+ 4a_1^m a_5^m a_6^m x_1 x_2 + a_6^m (a_2^m a_6^m + 2a_3^m a_4^m) x_1 + 2a_1^m (a_6^m)^2 x_2 + a_3^m (a_6^m)^2;$$

$$V_2(x_1,\ x_2) = a_5^m (a_1^m a_5^m - 2a_2^m a_4^m) x_2^2 - a_1^m (a_4^m)^2 x_1^2 - 2a_2^m (a_4^m)^2 x_1 x_2 +$$
$$+ 2(a_1^m a_5^m a_6^m - a_3^m a_4^m a_5^m - a_2^m a_4^m a_6^m) x_2 - 2a_3^m (a_4^m)^2 x_1 +$$
$$+ a_6^m (a_1^m a_6^m - 2a_3^m a_4^m);$$

$$V_3(x_1,\ x_2) = a_{10}^m (a_8^m a_{10}^m - 2a_7^m a_{11}^m) x_1^2 - a_8^m (a_{11}^m)^2 x_2^2 - 2a_7^m (a_{11}^m)^2 x_1 x_2 +$$
$$+ 2(a_8^m a_{10}^m a_{12}^m - a_9^m a_{10}^m a_{11}^m - a_7^m a_{11}^m a_{12}^m) x_1 - 2a_9^m (a_{11}^m)^2 x_2 +$$
$$+ a_{12}^m (a_8^m a_{12}^m - 2a_9^m a_{11}^m); \quad V_4(x_1,\ x_2) = a_7^m (a_{10}^m)^2 x_1^3 + 2a_8^m (a_{10}^m)^2 x_1^2 x_2 +$$
$$+ a_{11}^m (2a_8^m a_{10}^m - a_7^m a_{11}^m) x_1 x_2^2 + a_{10}^m (2a_7^m a_{12}^m + a_9^m a_{10}^m) x_1^2 +$$
$$+ a_{11}^m (2a_8^m a_{12}^m - a_9^m a_{11}^m) x_2^2 + 4a_8^m a_{10}^m a_{12}^m x_1 x_2 + a_{12}^m (a_7^m a_{12}^m +$$
$$+ 2a_9^m a_{10}^m) x_1 + 2a_8^m (a_{12}^m)^2 x_2 + a_9^m (a_{12}^m)^2;$$

$$Z_1(x_1,\ x_2) = (a_4^m x_1 + a_5^m x_2 + a_6^m)^{-4}; \quad Z_2(x_1,\ x_2) = (a_{10}^m x_1 +$$
$$+ a_{11}^m x_2 + a_{12}^m)^{-4}.$$

Сканируя поле зрения D, при помощи соотношений (6) и (12) находим вектор $(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{12})$, тогда $a_i^{m+1} = a_i^m + b_i$, $i = \overline{1,12}$.

Кремоновы преобразования имеют в качестве подгрупп проективные, аффинные преобразования. Например, для определения параметров проективной группы необходимо положить $a_{10} = a_4$, $a_{11} = a_5$, $a_{12} = a_6 = 1$.

В заключение отметим, что предложенный метод определения параметров геометрических преобразований изображений путем решения последовательности систем линейных уравнений может также использоваться для уточнения элементов групп, вычисленных иными способами.

Список литературы: 1. *Гантмахер Р. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с. 2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.

Поступила в редколлегию 23.12.83.